

Усов А.В., Савельєва О.С.,  
Становська І.І., Перпері А.О.

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ



### **Усов Анатолій Васильович**

Лауреат Державної премії України,  
доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри вищої математики та  
моделювання систем  
Одеського національного політехнічного  
університету

### **Савельєва Оксана Степанівна**

Кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри нафтогазового  
та хімічного машинобудування  
Одеського національного політехнічного  
університету



### **Становська Іраїда Іванівна**

Ст. викладач кафедри вищої математики  
та моделювання систем  
Одеського національного  
політехнічного університету

### **Перпері Алла Олександрівна**

заст. директора  
архітектурно-художнього інституту  
Одеської державної академії  
будівництва та архітектури





А.В.Усов, О.С. Савельєва, І.І.Становська, А.О.Перієрі

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

За науковою редакцією докт. техн. наук,  
проф. Становського О.І.

*Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту  
України як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

Одеса  
ПАЛЬМІРА  
2011

ББК В22  
УДК 51-74: 004.942  
М34

Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Пернері А.О. Математичні методи моделювання. Підручник / За ред. Становського О.Л. – Одеса: ПАЛЬМІРА, 2011. – 500 с.

ISBN 978-966-8945-61-8

У підручнику розглянуті методи та засоби математичного моделювання об'єктів машинобудування (конструкцій, технологічних процесів, тощо). Наведені основні засади побудови та експлуатації аналітичних, скінченноелементних, структурних та інтелектуальних математичних моделей.

Розраховано на студентів та аспірантів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за машинобудівними спеціальностями.

ББК В22  
УДК 51-74: 004.942

Рецензенти: **О.Ф. Данченко**, лауреат Державної премії України, Заслуженої діяч науки і техніки України, д-р техн. наук, професор, директор Інституту машинобудування Одеського національного політехнічного університету;  
**В.М. Варганин**, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри економіки і маркетингу Харківського національного аерокосмічного університету;  
**В.Б. Мокін**, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри моделювання та моніторингу складних систем Вінницького національного технічного університету;

Рекомендовано до видання рішенням Вченої ради Одеського національного політехнічного університету: 26 квітня 2011 року (Протокол № 9)

Затверджено Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-7323 від 5 серпня 2011 р.)

ISBN 978-966-8945-61-8

© Усов А.В., Савельєва О.С.,  
Становська І.І., Пернері А.О., 2011

Передмова редактора

## ПЕРЕДМОВА РЕДАКТОРА

Моделювання – побудова та дослідження моделі будь-якого об'єкта (*оригіналу, прототипу*) з метою одержання знань про останній методом *аналогії*.  
... Модель повинна представляти оригінал в тому ж сенсі, в якому він цікавить дослідника.

Філософський словник

*Я образ твої намалював,  
Відбив у ньому нескінченне...  
У нього щастя я благаю,  
І поринаю у нездійсненне!..*

З раннього дитинства людина захоплюється моделюванням. Хлопчики майструють моделі літаків та космічних кораблів. Дівчата моделюють різноманітні аспекти нашого побуту. Вони ще не знаються в математиці, і тому їхні моделі не є математичними. Їх намагання отримати якнайближчу до оригіналу модель ще не обтяжені потребами математично доводити її адекватність, точність та стійкість.

Коли мій син був ще маленьким, а комп'ютери надто дорогими, зробив він якось собі комп'ютер з паперу, намалював на клавіатурі квадратики з буквами та й заходився в ці букви тикати пальцями. Дивитись на це без розчудлення було неможливо... І лише набагато пізніше я зрозумів, чому. Адже насправді дитина зробила модель не обчислювальної системи, а *самого майже матеріального бажання* мати це чудо техніки у себе!

Тепер син вже виріс, захистив дисертацію з комп'ютерних наук, але створена ним модель, як посмішка Чеширського Кота досі витає у повітрі, відбиваючи найскладнішу для формалізації сутність людини – її почуття!

Підручник, який Ви взяли в руки, створено саме на межі моделювання почуттів – настільки широкий клас задач «одержання знань про об'єкт» він охоплює.

Залишилося зовсім небагато «навчити» цим почуттям той самий комп'ютер, зробити його союзником в усіх аспектах людської діяльності. Сдиною



## Розділ 12 ЕВОЛЮЦІЙНІ МОДЕЛІ\*

### 12.1. Метод класичного генетичного алгоритму

Оптимізація є найважливішим етапом розв'язку завдань моделювання. Основні труднощі застосування класичних методів оптимізації нелінійних функцій пов'язані із проблемами локального екстремуму (рис. 12.1) і «прокляття розмірності» (рис. 12.2).



Рис. 12.1. Проблема локального екстремуму

Рис. 12.2. Проблема «прокляття розмірності»

Спроби подолання зазначених проблем привели до створення теорії генетичних алгоритмів (ГА), які «вирощують» оптимальний розв'язок шляхом схрещування вихідних варіантів з наступною селекцією за деяким критерієм.

Нехай задана функція

$$z = z(x, y), \quad (12.1)$$

що описує деякий об'єкт, про який відомо, що вона гладка, неперервна на  $0 \leq x \leq x_{\max}$  і  $0 \leq y \leq y_{\max}$ , а також має в цій області два максимуми (рис. 12.3).

Сформулюємо завдання оптимізації, в якому функція (12.1) виступає в якості цільової:

$$\max_{x, y} \{z(x, y)\}, \quad (12.2)$$

тобто потрібно знайти такі значення аргументів  $x$  і  $y$ , які доставляють максимум функції  $z$ .

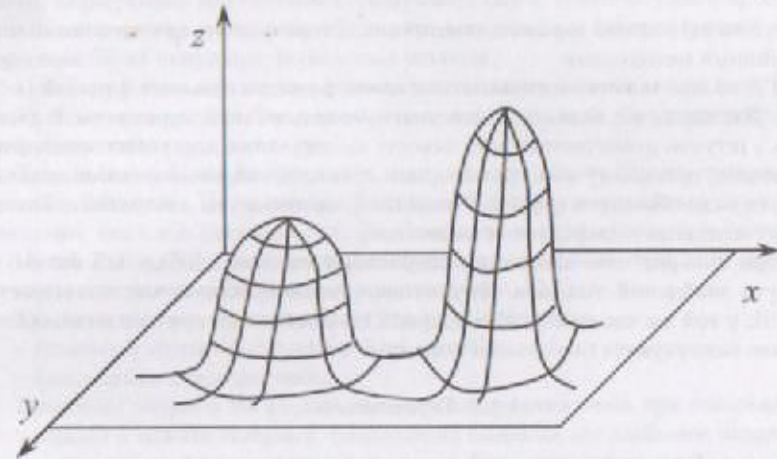


Рис. 12.3. Графік функції (12.1)

Для розв'язання цього завдання застосуємо метод генетичного алгоритму (ГА), оскільки функція (12.1), як випливає із рис. 12.3, багатоекстремальна.

Відомо, що будь-який об'єкт (спосіб, обладнання, речовина) можна представити набором своїх ознак або *фенотипом*, який фактично визначає, чим є цей об'єкт у реальному світі.

У біологічних системах, що зазнають еволюції за дарвінівським принципом (розмноження – передача генів – природний добір), об'єкт, крім фенотипу, може бути описаний ще й *генотипом*, який містить усею інформацію про об'єкт на рівні хромосомного набору.

При цьому кожний ген, тобто елемент інформації генотипу, має своє відбиття у фенотипі. Використовуючи цю інформацію, природа вирішує найбільше завдання оптимізації – вибір і збереження кращих, з деяких міркувань, біологічних особин.

В еволюційній математиці для розв'язання задач оптимізації методом класичного ГА, насамперед, необхідно представити кожен ознаку об'єкта у формі, що підходить для використання в цьому методі. Все подальше функціонування механізмів ГА проводиться на рівні генотипу і дозволяє обійтися без інформації про внутрішню структуру об'єкта, що й обумовлює його широке застосування.

У різновиді класичного ГА, що найчастіше зустрічається, для представлення генотипу об'єкта застосовуються бітові рядки. При цьому кожному атри-

\* В розділі використані матеріали монографії О.П. Ротштейна «Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі».



бути об'єкта у фенотипі відповідає один ген у генотипі об'єкта. Ген є бітовим рядком, найчастіше фіксованої довжини, який представляє значення цієї ознаки.

### 12.1.1. Переваги генетичних алгоритмів

Існують дві головні переваги генетичних алгоритмів перед класичними оптимізаційними методиками:

1) ГА не має значних математичних вимог до видів цільових функцій і обмежень. Дослідник не повинен спрощувати модель об'єкта, втрачаючи її адекватність і штучно домагаючись можливості застосування доступних математичних методів; при цьому можуть використовуватися найрізноманітніші цільові функції та види обмежень (лінійні і нелінійні), визначені на дискретних, безперервних і змішаних універсальних множинах;

2) при використанні класичних покрокових методик глобальний оптимум може бути знайдений тільки в тому випадку коли проблема має властивість опуклості; у той же час еволюційні операції генетичних алгоритмів дозволяють ефективно відшукувати глобальний оптимум.

### 12.1.2. Термінологія

Оскільки ГА виходять як із природничих наук (генетика), так і з комп'ютерних наук, то використовувана термінологія є певним сплавом природного і штучного. Відповідність термінів, що відносяться до ГА, і тих, які відносяться до розв'язку оптимізаційних проблем, наведена в табл. 12.1.

Основні терміни теорії ГА

Таблиця 12.1

|   | Генетичний алгоритм        | Пояснення                |
|---|----------------------------|--------------------------|
| 1 | Хромосоми                  | Рішення (код)            |
| 2 | Ген (декілька біт)         | Частина рішення          |
| 3 | Локус (місце розташування) | Позиція гена в хромосомі |
| 4 | Алель                      | Значення гена            |
| 5 | Фенотип                    | Розкодоване рішення      |
| 6 | Генотип                    | Закодоване рішення       |

### 12.1.3. Принципи побудови генетичних алгоритмів

ГА можна розглядати як один з різновидів випадкового пошуку, який заснований на механізмах, що нагадують природний добір і розмноження.

На відміну від існуючих методик, ГА починає роботу з деякого випадкового набору розв'язків, який називається популяцією. Кожний елемент із популяції називається хромосомою і є деяким розв'язком проблеми в першому набли-

женні. Хромосома є рядком символів деякої природи, не обов'язково бінарних. Хромосоми еволюціонують протягом певної кількості ітерацій, що носять назву поколінь (або генерацій). У ході кожної ітерації хромосома оцінюється з використанням деякої міри відповідності (англ. *fitness function*), яку називають функцією відповідності. Для створення наступного покоління нові хромосоми (нащадки), формуються або шляхом схрещування (англ. *crossover*) двох хромосом – батьків з поточної популяції, або шляхом випадкової зміни (мутації) однієї хромосоми. Нова популяція формується шляхом:

а) вибору згідно з функцією відповідності деяких батьків і нащадків,

б) видалення особин, що залишилися, для того, щоб зберігати постійним розмір популяції.

Хромосоми з більшою функцією відповідності мають більше шансів бути обраними (вижити). Після декількох ітерацій алгоритм сходиться до кращої хромосоми, яка є або оптимальним, або близьким до оптимального розв'язком.

Нехай  $P(t)$  і  $C(t)$  є батьками і нащадками з поточної генерації. Загальна структура генетичного алгоритму має вигляд (рис. 12.4).

Таким чином, використовуються два види операцій:

– генетичні операції: схрещування й мутація;

– еволюційна операція: вибір.

Генетичні операції нагадують процес спадкування генів при створенні нового нащадка в кожній генерації. Еволюційна операція, що здійснює перехід від однієї популяції до наступної, нагадує процес Дарвінівської еволюції.

### 12.1.4. Визначення фенотипу об'єкта за його генотипом

Таким чином, для того, щоб визначити фенотип об'єкта (тобто значення ознак, що описують об'єкт) необхідно знати тільки значення генів, відповідних до цих ознак, тобто генотип об'єкта. Сукупність генів, що описують генотип об'єкта, є хромосомою. У ГА хромосома – це бітовий рядок фіксованої довжини. При цьому кожній ділянці рядка відповідає ген. Довжина генів всередині хромосоми може бути однаковою або різною. Найчастіше застосовують гени однакової довжини (рис. 12.5).

### 12.1.5. Кодування «ознака – ген»

Розглянемо приклад хромосоми та інтерпретації її значення. У прикладі 12.1 в об'єкта є 2 ознаки, кодуємо кожен ген довжиною в 8 елементів.

Розділимо інтервали  $0 \leq x \leq x_{\max}$  і  $0 \leq y \leq y_{\max}$  на 8 рівних частин кожний і пронумеруємо їх числами від 1 до 8. Таким чином, неперервні координати  $x$  і  $y$  будуть замінені дискретними десятковими номерами (кодами) тих частин, у які ці координати потрапляють.

Далі виконаємо перетворення окремих тетрад десяткових кодів за допомогою коду Грея (табл. 12.2).



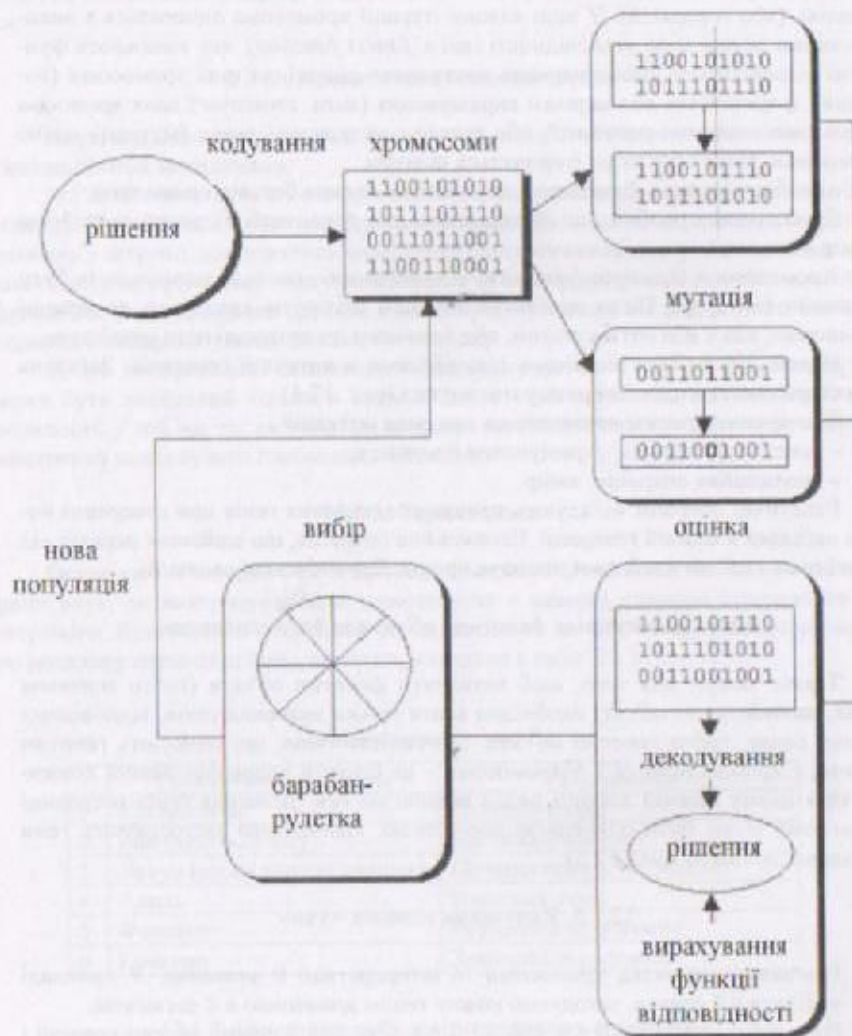


Рис. 12.4. Узгаальнена структура генетичного алгоритму

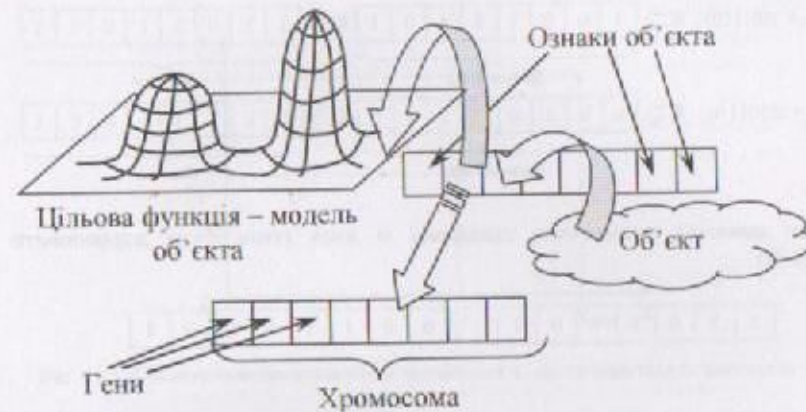


Рис. 12.5. Схема до перетворення фенотипу об'єкта в його генотип у ГА

Таблиця 12.2

Переклад десяткових кодів у код Грея

| Двійкове кодування |               |                     | Кодування за кодом Грея |               |                     |
|--------------------|---------------|---------------------|-------------------------|---------------|---------------------|
| Десятковий код     | Двійковий код | Шістнадцятковий код | Десятковий код          | Двійковий код | Шістнадцятковий код |
| 0                  | 0000          | 0                   | 0                       | 0000          | 0                   |
| 1                  | 0001          | 1                   | 1                       | 0001          | 1                   |
| 2                  | 0010          | 2                   | 3                       | 0011          | 3                   |
| 3                  | 0011          | 3                   | 2                       | 0010          | 2                   |
| 4                  | 0100          | 4                   | 6                       | 0110          | 6                   |
| 5                  | 0101          | 5                   | 7                       | 0111          | 7                   |
| 6                  | 0110          | 6                   | 5                       | 0101          | 5                   |
| 7                  | 0111          | 7                   | 4                       | 0100          | 4                   |
| 8                  | 1000          | 8                   | 12                      | 1100          | C                   |
| 9                  | 1001          | 9                   | 13                      | 1101          | D                   |
| 10                 | 1010          | A                   | 15                      | 1111          | F                   |
| 11                 | 1011          | B                   | 14                      | 1110          | E                   |
| 12                 | 1100          | C                   | 10                      | 1010          | A                   |
| 13                 | 1101          | D                   | 11                      | 1011          | B                   |
| 14                 | 1110          | E                   | 9                       | 1001          | 9                   |
| 15                 | 1111          | F                   | 8                       | 1000          | 8                   |

Приведемо приклад такого кодування для хромосоми, що відповідає точці з координатами:  $x = 15710$  і  $y = 4610$ .





Тоді довжина хромосоми, складеної із двох генів, буде дорівнювати  $2 \times 8 = 16$  біт.



### 12.1.6. Декодування «ген – ознака»

У практичних застосуваннях генетичних алгоритмів необхідність перетворювати значення ознаки в значення гена виникає рідко – тільки при попередній обробці. На практиці набагато частіше має місце зворотнє завдання, коли за значенням гена необхідно визначити значення відповідної йому ознаки.

Завдання декодування значення генів, яким відповідають *цлочисельні* ознаки, тривіальне.

При кодуванні ознак, яким відповідають *числа із плаваючою точкою*, також використовують бітове представлення. Такий варіант має ті ж недоліки, що й для цілих чисел.

Тому на практиці звичайно застосовують наступну послідовність дій:

- розбивають весь інтервал допустимих значень ознаки на ділянки з необхідною точністю;

- приймають значення гена як ціле число, що визначає номер інтервалу (використовуючи код Грея);

- у якості значення параметра приймають число, що є серединою цього інтервалу.

При кодуванні *нечислових даних* необхідно попередньо перетворити їх у числа.

Після декодування кожна конкретна хромосома є однією точкою в області  $0 \leq x \leq x_{\max}$  і  $0 \leq y \leq y_{\max}$  площини  $xOy$  (рис. 12.6).

## 12.2. Стратегія ГА та основні генетичні оператори

Як відомо, у теорії еволюції важливу роль відіграє спосіб, яким ознаки батьків передаються нащадкам. У генетичних алгоритмах за передачу нащадкам ознак батьків відповідає оператор, який називається *схрещуванням* (його також називають «кросовер» або «кросинговер»).

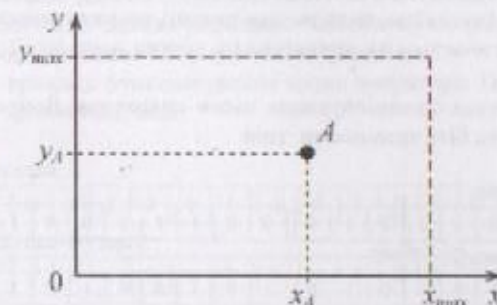


Рис. 12.6. Геометричне представлення хромосоми  $A$ , що складається із двох генів

Схрещування є головною генетичною операцією. Ця операція виконується над двома хромосомами-батьками і створює нащадків шляхом комбінування особливостей обох батьків. Приведемо найпростіший приклад схрещування. На початку виберемо деяку випадкову точку (точка схрещування – англ. *cut-point*), після цього створимо хромосому-нащадок шляхом комбінування сегмента першого батька, що розміщений ліворуч від обраної точки схрещування, із сегментом другого батька, що розміщений праворуч від точки схрещування (рис. 12.7).

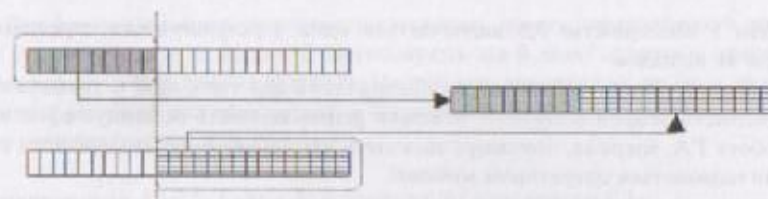


Рис. 12.7. Операція схрещування

Цей метод працює дуже добре, якщо хромосоми представлені у вигляді бітових рядків. Крім того продуктивність усього генетичного алгоритму, в першу чергу, залежить від продуктивності використовуваної операції схрещування. Частка отриманих на кожній ітерації нащадків називається *коефіцієнтом схрещування* ( $p_c$ ). Добуток  $p_c \times \text{розмір\_популяції}$  показує кількість нащадків. Велике значення цього коефіцієнта дозволяє досліджувати більше областей простору пошуку (або простору розв'язків) і зменшує шанс влучення в локальний мінімум. Але якщо значення  $p_c$  занадто велике, то це призведе до великих витрат часу обчислень на дослідження безперспективних областей.

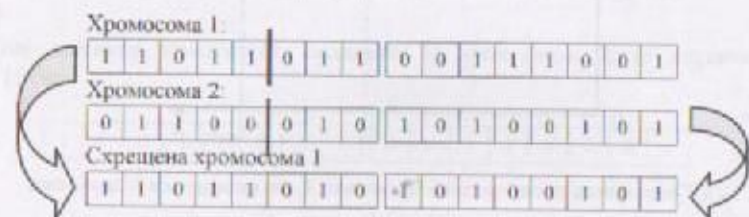
Де він наступним чиняом:

- з популяції вибираються дві особини, які будуть батьками,

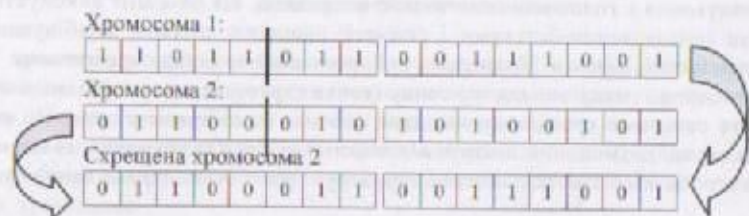


- створюються хромосоми цих особин;
- визначається (звичайно, випадковим чином) точка схрещування;
- нащадок визначається як конкатенація частин першого й другого батька.

Розглянемо приклад функціонування цього оператора. Допустимо, розрив відбувається після 5-го біта хромосоми, тоді:



або



Потім з ймовірністю 0,5 визначається одна з результуючих схрещених хромосом як нащадок.

Наступний генетичний оператор призначений для того, щоб підтримувати різноманітність особин популяції, оскільки різноманітність підвищує ефективність роботи ГА, зокрема, покращує збіжність алгоритму й прискорює його роботу. Він називається оператором *мутації*.

Мутація – це фонові операції, що робить випадкову зміну в різних хромосомах.

Найпростіший варіант мутації полягає у випадковій зміні одного або більш генів. У ГА мутація відіграє важливу роль для:

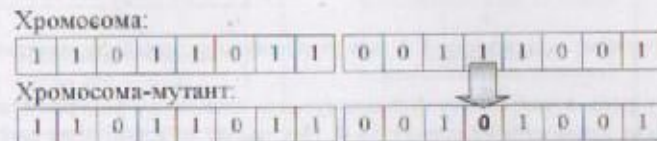
- відновлення генів, що випали з популяції в ході операції вибору, так що вони можуть бути випробувані в нових комбінаціях;
- формування генів, які не були представлені в початковій популяції.

Інтенсивність мутацій визначається *коефіцієнтом мутацій* ( $p_m$ ). Він дорівнює частці генів, що зазнають мутації на даній ітерації, по відношенню до їхньої загальної кількості.

Занадто малі значення цього коефіцієнта приводить до того, що багато генів, які могли б бути корисними, ніколи не будуть розглянуті. У той же час, занадто велике значення коефіцієнта  $p_m$  призведе до більших випадкових збурювань. Наслідки перестануть бути схожими на батьків і алгоритм втратить можливість навчатися, зберігаючи спадкоємні ознаки.

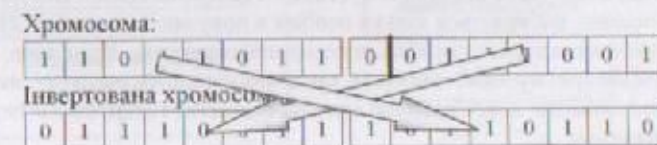
При використанні даного оператора деякі біти в хромосомі з певною ймовірністю інвертуються. У деяких реалізаціях алгоритму оператор мутації є інверсією тільки одного випадково обраного біта хромосоми.

Розглянемо приклад функціонування цього оператора. Припустимо, мутує дванадцятий біт хромосоми, тоді:



Крім того, використовується ще й так званий оператор *інверсії*, який полягає в тому, що хромосома ділиться на дві частини, і потім ці частини міняються місцями.

Схематично дію цього оператора можна представити таким чином:



Для функціонування генетичного алгоритму досить перерахованих генетичних операторів, але на практиці застосовують ще й деякі додаткові оператори або модифікації цих двох операторів. Наприклад, кросовер може бути не одноточковим (як було описано вище), а багатоточковим, коли формується кілька точок розриву (найчастіше дві).

### 12.2.1. Схеми функціонування класичного ГА

Розглянемо послідовність функціонування ГА в його класичному варіанті.

- Ініціювати початковий момент часу  $t = 0$ . Випадковим чином сформувати початкову популяцію, що складається з  $k$  особин.  $B_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ .
- Обчислити пристосованість кожної особини  $FA_i = fit(A_i)$ ,  $i = 1 \dots k$  і популяції в цілому  $F_t = fit(B_t)$  (її іноді називають терміном фітнес). Значення цієї функції визначає наскільки добре підходить особина, описана даною хромосомою, для розв'язання завдання.
- Вибрати особину  $A_c$  з популяції.  $A_c = Get(B_t)$ .
- З певною ймовірністю (ймовірністю кросовера  $P_c$ ) вибрати другу особину з популяції  $A_{c1} = Get(B_t)$  і виконати оператор кросовера  $A_c = Crossing(A_c, A_{c1})$ .
- З певною ймовірністю (ймовірністю мутації  $P_m$ ) виконати оператор мутації  $A_c = mutation(A_c)$ .



6. З певною ймовірністю (ймовірністю інверсії  $P_i$ ) виконати оператор інверсії  $A_c = inversion(A_c)$ .

7. Помістити отриману хромосому в нову популяцію  $insert(B_{t+1}, A_c)$ .

8. Виконати операції, починаючи з пункту 3,  $k$  раз.

9. Збільшити номер поточної епохи  $t = t + 1$ .

10. Якщо виконалася умова зупинки, то завершити роботу, інакше – перейти на крок 1.

Схема алгоритму класичного ГА для розглянутого прикладу наведена на рис. 12.8.

Найбільшу роль в успішному функціонуванні алгоритму відіграє етап добору батьківських хромосом на кроках 3 і 4. При цьому можливі різні варіанти. Найчастіше використовується метод відбору, який називається «рулетка».

При використанні такого методу ймовірність вибору хромосоми визначається її пристосованістю, тобто  $P_{ge}(A_i) \sim F_{it}(A_i)/F_{it}(B_t)$ . Використання цього методу призводить до того, що ймовірність передачі ознак більш пристосованими особинами нащадкам зростає.

Інший метод, який часто використовується, – турнірний відбір. Він полягає в тому, що випадково вибирається кілька особин з популяції (звичайно 2) і переможцем вважається особина з найбільшою пристосованістю. Крім того, у деяких реалізаціях алгоритму застосовується так звана стратегія елітизму, яка полягає в тому, що особини з найбільшою пристосованістю гарантовано переходять у нову популяцію.

Використання елітизму звичайно дозволяє прискорити збіжність генетичного алгоритму. Недолік використання стратегії елітизму – підвищується ймовірність потрапляння алгоритму в локальний мінімум.

Інший важливий момент – визначення критеріїв зупинки. Звичайно в цій якості застосовуються або обмеження на максимальне число епох функціонування алгоритму, або визначення його збіжності, наприклад, шляхом порівняння пристосованості популяції на декількох епохах і зупинки при стабілізації цього параметра.

### 12.2.2. Стратегії пошуку

Пошук є одним з найбільш універсальних методів знаходження розв'язку для випадків, коли апріорі не відома послідовність кроків, що веде до оптимуму.

Існують дві пошукові стратегії: експлуатація найкращого розв'язку і дослідження простору розв'язків. Градієнтний метод – приклад стратегії, яка вибирає найкращий розв'язок для можливого покращення, ігноруючи в той же час дослідження всього простору пошуку. Випадковий пошук – приклад стратегії, яка, навпаки, досліджує простір розв'язків, ігноруючи дослідження перспективних областей пошукового простору.

Генетичний алгоритм – це клас пошукових методів загального призначення, які комбінують елементи обох стратегій.

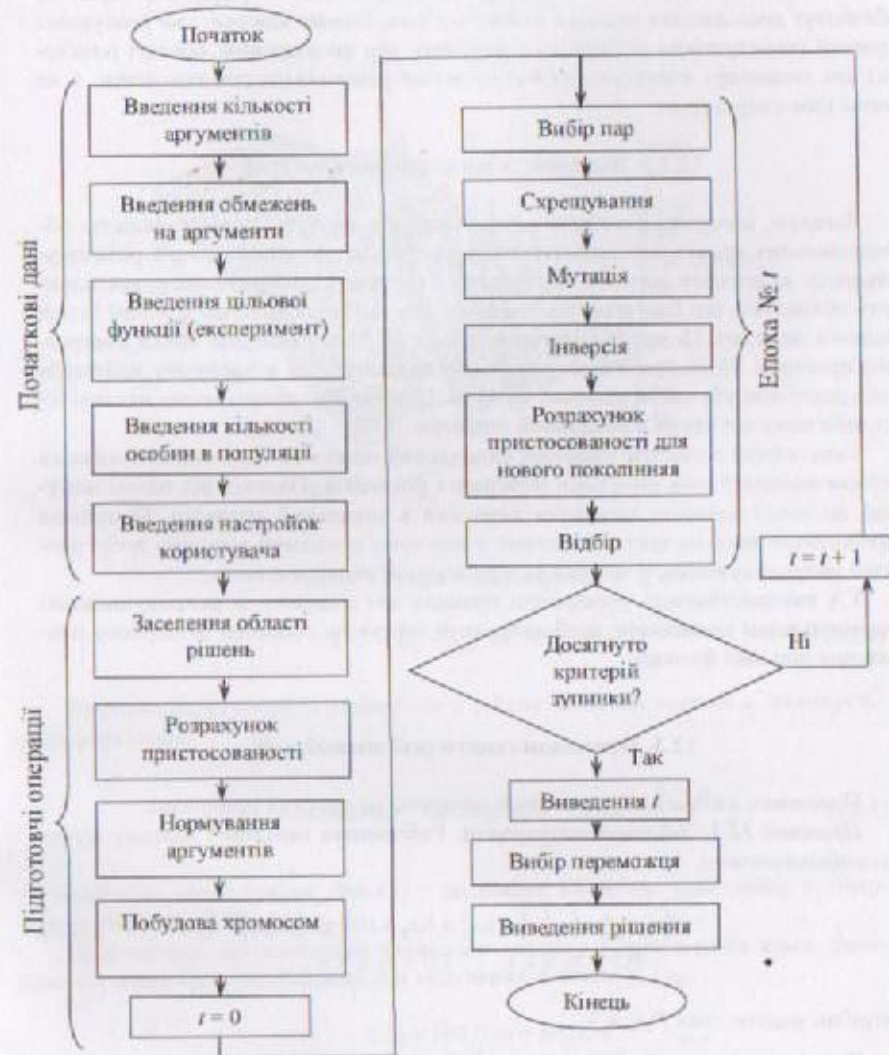


Рис. 12.8. Схема алгоритму класичного ГА

Використання цих методів дозволяє втримувати прийнятний баланс між дослідженням і експлуатацією найкращого розв'язку. На початку роботи генетичного алгоритму популяція випадкова і має різноманітні елементи. Тому оператор схрещування здійснює велике дослідження простору розв'язків. З ростом



значення функції відповідності одержуваних розв'язків оператор схрещування забезпечує дослідження околиць кожного з них. Інакше кажучи, тип пошукової стратегії (експлуатація найкращого розв'язку або дослідження області розв'язків) для оператора схрещування визначається різноманітністю популяції, а не самим цим оператором.

### 12.2.3. Відмінність від класичного пошуку

Загалом, алгоритм розв'язку оптимізаційних проблем є послідовністю обчислювальних кроків, які асимптотично сходяться до оптимального розв'язку. Більшість класичних методів оптимізації генерують детерміновану послідовність обчислень, що базується на градієнті або похідній цільової функції більш високого порядку. Ці методи застосовуються до однієї вихідної точки пошукового простору. Потім розв'язок поступово поліпшується в напрямку найшвидшого росту або убуття цільової функції. При такому поточковому підході існує небезпека влучення в локальний оптимум.

Генетичний алгоритм здійснює одночасний пошук за багатьма напрямками шляхом використання популяції можливих розв'язків. Перехід від однієї популяції до іншої дозволяє уникнути влучення в локальний оптимум. Популяція перетерплює щось на зразок еволюції: у кожному поколінні відносно добрі розв'язки репродукуються, у той час як відносно погані відмирають.

ГА використовують імовірнісні правила для визначення репродуцьованої або знищеної хромосоми, щоб направити пошук до областей імовірного покращення цільової функції.

### 12.3. Приклади генетичної оптимізації

Пояснимо, як працює генетичний алгоритм на простих прикладах.

**Приклад 12.1.** Завдання оптимізації. Розглянемо нелінійну цільову функцію з обмеженнями:

$$f(x_1, x_2) = (-2x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_2 + 10) \cdot \sin(\ln(x_1) e^{x_2}), \quad (12.3)$$

$$0.5 \leq x_1 \leq 1.1, \quad 1.0 \leq x_2 \leq 4.6.$$

Потрібно знайти:  $\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$

Поверхня цільової функції показана на рис. 12.9.

**Кодування.** Для реалізації генетичного алгоритму необхідно закодувати оптимізуємі параметри у двійковий рядок. Довжина рядка залежить від необхідної точності. Наприклад, нехай змінна  $x_1$  має інтервал зміни  $[a_1, b_1]$ , і необхідна точність – п'ять знаків після коми. У цьому випадку інтервал зміни змінної  $x_1$  повинен бути розбитий як мінімум на  $(b_1 - a_1) \cdot 10^5$  квантів. Необхідну кількість бітів  $m_1$  знаходимо за формулою:

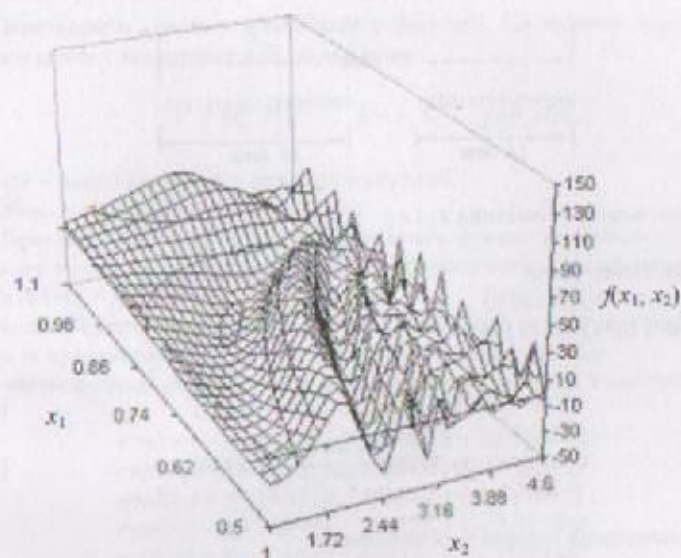


Рис. 12.9. Графік цільової функції

$$2^{m_1-1} < (b_1 - a_1) \cdot 10^5 \leq 2^{m_1} - 1 \quad (12.4)$$

Зворотнє перетворення рядка бітів у дійсне значення змінної  $x_1$  виконується за формулою:

$$x_1 = a_1 + \text{десятичне\_число(рядок\_бітів)} \cdot \frac{b_1 - a_1}{2^{m_1} - 1}, \quad (12.5)$$

де десятичне\_число(рядок\_бітів) – десятичне значення, закодоване в бінарному рядку рядок\_бітів.

Припустимо, що необхідна точність становить 5 знаків після коми. Знайдемо кількість бітів, необхідних для кодування змінних  $x_1$  і  $x_2$ :

$$(1.1 - 0.5) \times 100,000 = 60,000$$

$$2^{15} < 60,000 < 2^{16} - 1, \quad m_1 = 16$$

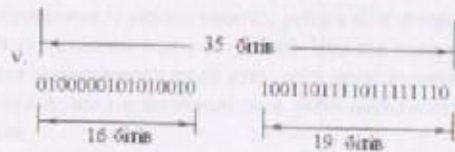
$$(4.6 - 1.0) \times 100,000 = 360,000$$

$$2^{18} < 360,000 < 2^{19} - 1, \quad m_2 = 19$$

$$m = m_1 + m_2 = 16 + 19 = 35$$

Сумарна довжина хромосоми становить 35 бітів, які можна представити таким чином





Відповідні значення змінних  $x_1$  і  $x_2$ :

|       | Двійкове число     | Десяткове число |
|-------|--------------------|-----------------|
| $x_1$ | 0100000101010010   | 16722           |
| $x_2$ | 100110111101111110 | 319230          |

$$x_1 = 0.5 + 16722 \frac{1.1 - 0.5}{2^{16} - 1} = 0.65310, \quad (12.6)$$

$$x_2 = 1.0 + 319230 \frac{4.6 - 1.0}{2^{19} - 1} = 3.19198. \quad (12.7)$$

Вихідна популяція генерується випадково:

$v_1 = [0100000101010010100110111101111110]$   
 $v_2 = [10001110101110011000000010101001000]$   
 $v_3 = [11111000111000001000010101001000110]$   
 $v_4 = [0110011011010010110100000010111001]$   
 $v_5 = [00000010111101100010001110001101000]$   
 $v_6 = [10111110101011011000000010110011001]$   
 $v_7 = [00110100010011111000100110011101101]$   
 $v_8 = [11001011010100001100010110011001100]$   
 $v_9 = [01111110001011101100011101000111101]$   
 $v_{10} = [01111101001110101010000010101101010]$

Відповідні значення змінних  $x_1$  і  $x_2$  мають вигляд:

$v_1 = [x_1, x_2] = [0.653097, 3.191983]$   
 $v_2 = [x_1, x_2] = [0.834511, 2.809287]$   
 $v_3 = [x_1, x_2] = [1.083310, 2.874312]$   
 $v_4 = [x_1, x_2] = [0.740989, 3.926276]$   
 $v_5 = [x_1, x_2] = [0.506940, 1.499934]$   
 $v_6 = [x_1, x_2] = [0.946903, 2.809843]$   
 $v_7 = [x_1, x_2] = [0.622600, 2.935225]$   
 $v_8 = [x_1, x_2] = [0.976521, 3.778750]$   
 $v_9 = [x_1, x_2] = [0.795738, 3.802377]$   
 $v_{10} = [x_1, x_2] = [0.793504, 3.259521]$

Оцінка функції відповідності хромосоми виконується в три кроки.

1. Перетворити генотип хромосоми у фенотип. Це означає перетворення двійкового рядка у відповідне дійсне значення

$$x^k = (x_1^k, x_2^k), \quad k = 1, 2, \dots, pop\_size,$$

де  $pop\_size$  – число варіантів у вихідній популяції.

2. Обчислити цільову функцію  $f(x_k)$ .

3. Перетворити цільову функцію в значення функції відповідності. Для розв'язуваного завдання оптимізації функція відповідності еквівалентна цільовій функції  $eval(v_k) = f(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, pop\_size$ .

Функція відповідності відіграє роль середовища і оцінює хромосоми за ступенем їх пристосованості до виконання критерію оптимізації.

Значення функцій відповідності вищенаведених хромосом наступні:

$eval(v_1) = f(0.653097, 3.191983) = 20.432394$   
 $eval(v_2) = f(0.834511, 2.809287) = -4.133627$   
 $eval(v_3) = f(1.083310, 2.874312) = 28.978472$   
 $eval(v_4) = f(0.740989, 3.926276) = -2.415740$   
 $eval(v_5) = f(0.506940, 1.499934) = -2.496340$   
 $eval(v_6) = f(0.946903, 2.809843) = -23.503709$   
 $eval(v_7) = f(0.622600, 2.935225) = -13.878172$   
 $eval(v_8) = f(0.976521, 3.778750) = -8.996062$   
 $eval(v_9) = f(0.795738, 3.802377) = 6.982708$   
 $eval(v_{10}) = f(0.793504, 3.259521) = 6.201905$

Очевидно, що хромосома  $v_3$  найбільш сильна, а хромосома  $v_6$  найбільш слабка.

**Відбір.** Найбільше поширення на практиці одержав підхід, називаний колесо рулетки (від англ. *roulette wheel*). Згідно із цим підходом добір здійснюється на основі деякої функції розподілу, яка будується пропорційно обчисленим функціям відповідності згенерованих варіантів-хромосом. Колесо рулетки може бути сконструйоване таким чином.

1. Обчислюємо значення функції відповідності  $eval(v_k)$  для кожної хромосоми  $v_k$ :

$$eval(v_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.8)$$

2. Обчислюємо загальну функцію відповідності популяції:

$$F = \sum_{k=1}^{pop\_size} \left( eval(v_k) - \frac{\min_{j=1, pop\_size} \{ eval(v_j) \}}{pop\_size} \right). \quad (12.9)$$

3. Обчислюємо ймовірність добору  $p_k$  для кожної хромосоми  $v_k$ :



$$p_k = \frac{eval(v_k) - \min_{j=1, \dots, pop\_size} \{eval(v_j)\}}{F}, k=1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.10)$$

4. Обчислимо сукупну ймовірність  $q_k$  для кожної хромосоми  $v_k$ :

$$q_k = \sum_{j=1}^k p_j, k=1, 2, \dots, pop\_size. \quad (12.11)$$

Процес добору починається з обертання колеса  $pop\_size$  раз, при цьому щораз вибирається одна хромосома за алгоритмом:

- генеруємо випадкове число  $r$  з інтервалу  $[0, 1]$ ,
- якщо  $r \leq q_1$ , то вибираємо першу хромосому  $v_1$ , інакше вибираємо  $k$ -у хромосому  $v_k$  ( $2 \leq k \leq pop\_size$ ) таку, що  $q_{k-1} < r \leq q_k$ .

Загальна функція відповідності  $F$  усієї популяції:

$$F = \sum_{k=1}^{10} (eval(v_k) - \min_{j=1, \dots, 10} \{eval(v_j)\}) = 242.208919. \quad (12.12)$$

Ймовірність добору  $p_k$  для кожної хромосоми  $v_k$  ( $k=1, 2, \dots, 10$ ) дорівнює:

$$p_1 = 0.181398, p_2 = 0.079973, p_3 = 0.216681, p_4 = 0.087065, p_5 = 0.086732, \\ p_6 = 0.000000, p_7 = 0.039741, p_8 = 0.059897, p_9 = 0.125868, p_{10} = 0.122645.$$

Сукупні ймовірності  $q_k$  для кожної хромосоми  $v_k$  ( $k=1, 2, \dots, 10$ ) дорівнюють:

$$q_1 = 0.181398, q_2 = 0.261370, q_3 = 0.478052, q_4 = 0.565117, q_5 = 0.651849, \\ q_6 = 0.651849, q_7 = 0.691590, q_8 = 0.751487, q_9 = 0.877355, q_{10} = 1.000000.$$

Тепер можна обертати колесо рулетки 10 раз і щораз відібрати одну хромосому для нової популяції. Допустимо, що випадкова послідовність 10 чисел з інтервалу  $[0, 1]$  має вигляд:

$$0,301431 \quad 0,322062 \quad 0,766503 \quad 0,881893 \quad 0,350871 \quad 0,583392 \\ 0,177618 \quad 0,343242 \quad 0,032685 \quad 0,197577.$$

Перше число  $r_1 = 0.301431$  більше за  $q_2$  і менше ніж  $q_3$ . Це означає, що відбирається хромосома  $v_3$ . Друге число  $r_2 = 0.322062$  також більше за  $q_2$  і менше ніж  $q_3$ . Значить знову відбираємо хромосому  $v_3$  для нової популяції, і т.д. Нарешті, одержимо нову популяцію, що складається з таких хромосом:

$$v'_1 = [1111100011100000100010101001000110] (v_3) \\ v'_2 = [1111100011100000100010101001000110] (v_3) \\ v'_3 = [11001011010100001100010110011001100] (v_6) \\ v'_4 = [01111110001011101100011101000111101] (v_8) \\ v'_5 = [1111100011100000100010101001000110] (v_3) \\ v'_6 = [0110011011010010110100000010111001] (v_4)$$

$$v'_7 = [0100000101010010100110111101111110] (v_1) \\ v'_8 = [11111000111000001000010101001000110] (v_3) \\ v'_9 = [0100000101010010100110111101111110] (v_1) \\ v'_{10} = [1000111010111001100000010101001000] (v_3)$$

**Схрещування.** Для схрещування хромосом будемо використовувати метод з однієї точкою обміну. У відповідності із цим методом, випадково вибирається одна точка, щодо якої міняються місцями частини хромосоми батьків. Для прикладу розглянемо схрещування двох хромосом, для яких була випадково обрана точка обміну після 17-го гена:

$$v_1 = [11111000111000001000010101001000110] \\ v_2 = [10001110101110011000000010101001000]$$

В результаті обміну частин батьківських хромосом виходять наступні хромосоми-нащадки:

$$v_1 = [1111100011100000100000010101001000] \\ v_2 = [10001110101110011000010101001000110]$$

Нехай ймовірність схрещування  $p_c = 0,25$ , тобто в середньому 25% хромосом піддалися схрещуванню.

Припустимо, що згенерована послідовність випадкових чисел:

$$0.625721 \quad 0.266823 \quad 0.288644 \quad 0.295114 \quad 0.163274 \\ 0.567461 \quad 0.085940 \quad 0.392865 \quad 0.770714 \quad 0.548656.$$

Це означає, що хромосоми  $v'_3$  і  $v'_7$  вибираються для схрещування. Після цього ми генерується випадкове ціле число  $pos$  (позиція) із проміжку  $[1, 34]$  (оскільки загальна довжина хромосоми дорівнює 35) і вважаємо його точкою обміну хромосом або, інакше кажучи, точкою схрещування. Припустимо, що було згенеровано число  $pos$  рівне 1, тобто хромосоми-батьки обмінюються частинами після першого біта, і з'являться наступні хромосоми-нащадки:

$$v'_3 = [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_7 = [10100000101010010100110111101111101] \\ v'_5 = [11000001010100101001101111011111101] \\ v'_7 = [01111000111000001000010101001000110]$$



**Мутація.** Мутація полягає в зміні однієї або більшої кількості генів з ймовірністю, яка дорівнює коефіцієнту мутації. Допустимо, що 18-й ген хромосоми  $v_1$  зазнає мутації. Оскільки маємо справу з бінарними рядками, то мутація полягає в інверсії відповідного біта:

$$v_1 = 1111000111000001000010101001000110$$



$$v_1 = 1111000111000001100010101001000110$$

Задамо коефіцієнту мутації значення  $p_m = 0,01$ , так що в середньому 1% усіх бітів популяції піддається операції мутації. Число бітів у всій популяції становить  $m \cdot pop\_size = 35 \cdot 10 = 350$  бітів. Тому, в середньому, в кожному поколінні мутує 3–4 біта. Кожний біт має однаковий шанс піддатися мутації. Таким чином, необхідно згенерувати послідовність випадкових чисел  $r_k$  ( $k = 1, 350$ ) з інтервалу  $[0, 1]$ . Припустимо, що мутують наступні гени:

| Позиція біта в популяції | Номер хромосоми | Позиція біта в хромосомі | Випадкове число $r_k$ |
|--------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------------|
| 111                      | 4               | 6                        | 0.009857              |
| 172                      | 5               | 32                       | 0.003113              |
| 211                      | 7               | 1                        | 0.000946              |

Після мутації одержуємо наступну популяцію:

$$\begin{aligned} v'_1 &= [1111000111000001000010101001000110] \\ v'_2 &= [1111000111000001000010101001000110] \\ v'_3 &= [1100101101010000100010110011001100] \\ v'_4 &= [01111010001011101100011101000111101] \\ v'_5 &= [1100000101010010100110111101110110] \\ v'_6 &= [01100110110100101101000000010111001] \\ v'_7 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_8 &= [11111000111000001000010101001000110] \\ v'_9 &= [0100000101010010100110111101111110] \\ v'_{10} &= [10001110101110011000000010101000000] \end{aligned}$$

Відповідні десяткові значення змінних  $x_1$  і  $x_2$  та значення функції відповідності мають вигляд:

$$\begin{aligned} f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(0.976521, 3.778750) &= -8.996062 \\ f(0.786363, 3.802377) &= 9.366723 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0.953101, 3.191928) &= -23.229745 \\ f(0.740989, 3.926276) &= -2.415740 \\ f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(1.083310, 2.874312) &= 28.978472 \\ f(0.653097, 3.191983) &= 20.432394 \\ f(0.834511, 2.809232) &= -4.138564 \end{aligned}$$

Таким чином, завершено одну ітерацію генетичного алгоритму. Виконавши багато ітерацій, одержимо найкращу хромосому в 419-му поколінні.

$$\begin{aligned} v^* &= [01000011000100110110010011011101001] \\ eval(v^*) &= f(0.657208, 2.418399) = 31.313555 \\ x_1^* &= 0.657208 \quad x_2^* = 2.418399 \\ f(x_1^*, x_2^*) &= 31.313555 \end{aligned}$$

#### 12.4. Багатоцільова оптимізація

Досить часто в реальних ситуаціях якість експлуатації досліджуваного об'єкта або системи оцінюється не одним критерієм чи показником якості, а сукупністю критеріїв, які можуть бути однаково значимими. Такий підхід у двомірній постановці призводить до завдання оптимізації з векторною цільовою функцією:

$$Z(x, y) = \{z_1(x, y), z_2(x, y)\}, \quad (12.13)$$

яка повинна певним чином трактуватися.

Як правило, відносна значимість цих цілей, загалом, невідома доти, доки не будуть визначені всі основні властивості системи й не будуть повністю визначені всі можливі взаємозв'язки. При зростанні кількості можливих цілей, взаємозв'язки утворюють складну структуру і їх стає важче ідентифікувати. У цьому випадку багато залежить від інтуїції дослідника і його вміння точно виражати ті або інші переваги в процесі оптимізації. Таким чином, стратегія побудови багатокритеріальної оптимізації полягає, насамперед, у здатності адекватно визначити постановку завдання так, що б це завдання допускало розв'язок, а також представити необхідні переваги у вигляді числових залежностей, зберігти при цьому реальність самого завдання.

Всяка складна система складається з окремих більш простих підсистем (елементів). Тому, природно, вирішуючи задачу багатоцільової оптимізації для системи в цілому, розроблювач неминує повинен ставити та вирішувати задачі багатоцільової оптимізації для окремих її підсистем. При цьому повинна здійснюватися координація (взаємне узгодження) критеріїв оптимальності підсистем відповідно до їхнього призначення і зв'язків, що існують між підсистемами.

Сукупність показників якості системи можна розглядати як вектор, тому



багатоцільову оптимізацію називають також векторною. Теорія векторної оптимізації безупинно розвивається. Зростає кількість робіт прикладного характеру, виконаних з використанням методів і алгоритмів багатоцільової оптимізації.

#### 12.4.1. Компромісні розв'язки

При розробці нових технологічних процесів, їх апаратного оформлення та відповідних систем автоматичного управління враховуються численні якісні показники. Кожний з них намагаються оцінити кількісно за допомогою обраного (локального) критерію оптимальності. В реальних задачах не вдається досягти одночасно екстремальних значень усіх розглянутих критеріїв оптимальності, оскільки ці екстремуми відповідають різним точкам простору незалежних змінних, які варіюються в процесі оптимізації. Отже, розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації є деяким компромісом між окремими критеріями оптимальності. Обґрунтування принципу цього компромісу і становить одну з основних концептуальних труднощів проблеми векторної оптимізації.

Для наочного представлення компромісних розв'язків розглянемо задачу оптимізації з двома критеріями якості  $f_1$  і  $f_2$ . Якщо кожний з них є неперервною функцією незалежних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що змінюються в деякій області простору, то існує деяка область  $Q$  відповідних значень критеріїв оптимальності (рис. 12.10).

Кожному набору окремих критеріїв  $f_1$  і  $f_2$  відповідає певна точка області  $Q$ .

Для визначеності будемо вважати, що бажано збільшити значення кожного з розглянутих критеріїв. Якщо це не так, то знак відповідного критерію слід змінити на зворотний.

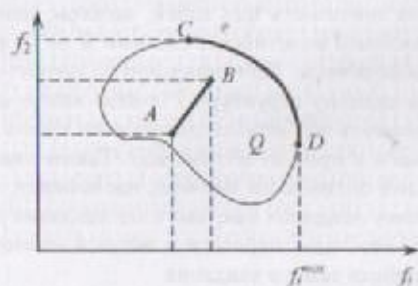


Рис. 12.10. Область можливих розв'язків  $Q$  і множина компромісів  $CD$

Візьмемо точки  $A$  і  $B$  всередині області можливих розв'язків  $Q$  (рис. 12.10). Очевидно, у точці  $B$  обидва критерії  $f_1$  і  $f_2$  мають більші значення, ніж в точці  $A$ . Отже, розв'язок загальної задачі в точці  $B$  має бути кращим за розв'язок у точці  $A$ . Процес покращення розв'язків можна продовжити, рухаючись у тому ж напрямку до границі області, де це покращення припиняється. Максимальні зна-

чення критеріїв  $f_1$  і  $f_2$  досягаються в точках  $D$  і  $C$  відповідно.

Точки, що належать лінії  $CD$ , мають особливу властивість: рухаючись вздовж лінії  $CD$ , не можна покращити значення одного із критеріїв, не погіршивши при цьому значення іншого критерію. Множину точок, що утворюють лінію  $CD$ , в такому випадку, називають множиною компромісних розв'язків, або множиною компромісів.

Розв'язки, що відповідають множині компромісів, прийнято називати ефективними. Легко переконатися в тому, що до множини компромісів можуть належати лише точки на границі області можливих розв'язків  $Q$ . Сукупність критеріїв, які відповідають будь-якій точці, що лежить усередині цієї області, може бути покращена шляхом руху до границі.

Якщо відома вся область допустимих розв'язків, то найчастіше можна відразу вказати множину компромісів. Очевидно, труднощі виникають тоді, коли область  $Q$  не можна описати аналітично, а множину компромісів визначають поточково за допомогою методів пошуку.

#### 12.4.2. Основні поняття та визначення

Для розв'язку задач багатоцільової оптимізації повинні бути забезпечені певні умови. Зокрема, повинна бути надана можливість змінювати в певних межах незалежні змінні якості, що впливають на критерії.

Будь-яка незалежна змінна величина, яку можна змінювати в деяких межах і яка впливає на всі критерії якості або тільки на деякі з них, прийнято називати управляємою змінною (або управлінням). Ця термінологія в певному сенсі співзвучна термінології з теорії управління. Вона підкреслює, що процес багатоцільової оптимізації має деяку подібність із процесом управління системою.

Сукупність усіх управляємих змінних можна розглядати як вектор управління. Йому ставиться у відповідність точка  $n$ -мірного простору управління.

Множина допустимих значень управляємих змінних називається областю управління. Вона характеризує ту частину простору управління, де перебувають усі реалізовані управління. Ця область може бути як зв'язаною, так і незв'язаною. В окремому випадку вона може складатися з окремих ізольованих точок.

Простір цільових (або цільовий простір) — це простір, координатами якого є значення всіх розглянутих критеріїв якості.

Областю цільових (або цільовою областю) називається множина точок у просторі цільових, де лежать усі можливі значення векторів мети.

Залежність критеріїв якості від управляємих змінних є деяким відображенням простору управління на простір цільових. При цьому кожній точці області цільових відповідає одна або кілька точок простору управління. Це значить, що один і той же самий результат (та сама цільова точка) може бути досягнутий за допомогою різних комбінацій значень управляючих величин.

Ефективною множиною компромісів називається множина всіх цільових точок, які не можна далі рівномірно (тобто одночасно за всіма критеріями) покращити в рамках наявних можливостей управління. Таким чином, до цієї мно-



жину відносяться всі точки, які не можна порівняти одну з одною в понятті покращення або погіршення ефекту управління.

Як відомо, скалярні величини можна легко впорядкувати шляхом попарного порівняння їх значень. Проблема порівняння векторних величин набагато складніша.

Якщо для цієї мети скористатися «довжиною» вектора (нормою), то по суті задача зведеться до порівняння скалярних величин.

Якщо ж при порівнянні, як це потрібно в багатоцільовій оптимізації, потрібно порівнювати окремі компоненти векторів, то зробити однозначний висновок можна лише тоді, коли всі без винятку компоненти одного вектора більші (або менші) відповідних компонентів іншого вектора.

Коли деякі компоненти одного вектора менші, а інші – більші за відповідні компоненти іншого вектора, то ці вектори вважаються непорівнянними між собою. Така ситуація має місце в множині компромісів.

#### 12.4.3. Узагальнена цільова функція

Для розв'язання задачі можна скористатися наступними узагальненими критеріями оптимізації:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^m W_i \cdot \left[ \frac{R_i^* - R_i}{R_i^*} \right] \quad (12.14)$$

Тут  $R_i^*$  – найкраще значення цільової функції, знайдене при розв'язанні задачі безкомпромислої оптимізації,  $W_i$  – ваговий коефіцієнт, що враховує важливість  $i$ -го критерію.

При цьому:

$$\sum_{i=1}^m W_i = 1 \quad (12.15)$$

Існує й інша можливість.

$$\Phi(X) = \sqrt[n]{\eta_1^{n_1} \cdot \eta_2^{n_2} \cdot \dots \cdot \eta_m^{n_m}} \quad (12.16)$$

$$\text{Тут } \eta_i = \frac{K_i(R_i - R_i^*)}{R_{\max,i} - R_{\min,i}}; \quad K_i = \begin{cases} +1 & \text{для пошуку мінімуму} \\ -1 & \text{для пошуку максимуму} \end{cases}; \quad \alpha_i = \frac{1}{W_i}$$

При цьому виконується співвідношення (12.15).

#### 12.4.4. Визначення коефіцієнтів ваги параметрів

Важливим елементом при такій оптимізації є призначення коефіцієнтів ваги кожному параметру. Розповсюджений метод – визначення коефіцієнтів ваги за допомогою експертів, який є, по суті, звичайним обговоренням, з тою лише різницею, що своєю думку експерти виражають не словами, а числами.

Для визначення впливу коефіцієнтів ваги на результат розв'язку задачі можна вирішувати її при різних значеннях цих коефіцієнтів.

Методи експертних оцінок широко поширені в спорті, наприклад, у фігурним катанні, гімнастиці. Немає підстави вважати неприйнятною колективну думку фахівців і при прийнятті оптимальних розв'язків.

Запропоновано досить багато методів визначення експертних оцінок. Розглянемо три з них.

#### 12.4.5. Безпосереднє призначення коефіцієнтів ваги

При безпосередньому призначенні коефіцієнтів ваги  $i$ -тий експерт оцінює порівняльну важливість розглянутих параметрів, які будуть входити в цільову функцію. Кожен  $i$ -ий експерт для кожного  $k$ -го параметра повинен призначити коефіцієнт ваги  $\alpha_{ik}$  таким, щоб сума всіх коефіцієнтів ваги, призначених одним експертом для різних параметрів, дорівнювала одиниці:

$$\sum_{k=1}^K W_{ik} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12.17)$$

де  $n$  – кількість експертів. Алгоритм методу.

1. Визначити кількість параметрів  $K$ , які будуть включені в цільову функцію.
2. Зробити таблицю за формою, яку називають базовою.

| Експерт                           | Параметри |       |       | Сума |
|-----------------------------------|-----------|-------|-------|------|
|                                   | A         | B     | C     |      |
| 1                                 | 0,5       | 0,2   | 0,3   | 1    |
| 2                                 | 0,5       | 0,3   | 0,2   | 1    |
| 3                                 | 0,2       | 0,4   | 0,4   | 1    |
| 4                                 | 0,2       | 0,3   | 0,5   | 1    |
| 5                                 | 0,4       | 0,2   | 0,4   | 1    |
| 6                                 | 0,3       | 0,4   | 0,3   | 1    |
| 7                                 | 0,3       | 0,3   | 0,4   | 1    |
| 8                                 | 0,5       | 0,2   | 0,3   | 1    |
| Середнє значення коефіцієнта ваги | 0,363     | 0,288 | 0,35  |      |
| Середньоквадратичне відхилення    | 0,119     | 0,049 | 0,06  |      |
| Дисперсія                         | 0,015     | 0,006 | 0,008 |      |



## 3. Визначити коефіцієнт варіабельності:

$$v = \frac{\text{Середньоквадратичне відхилення}}{\text{Середнє значення коефіцієнта ваги}} \quad (12.18)$$

Значення коефіцієнта варіабельності показує величину розкиду експертних оцінок. При  $v < 0,2$  оцінки експертів можна вважати погодженими. У випадку  $v > 0,2$  доцільно провести з експертами змістовне обговорення важливості оцінюваних параметрів, після чого повторити експертизу. При збереженні величини розкидування доцільно враховувати імовірнісний характер експертних оцінок за методами, які наведені нижче.

Як показує досвід, задоволення експертами вимоги (12.17) при  $K > 3$ , викликає труднощі.

Для того щоб уникнути виконання цієї вимоги, можна коефіцієнти ваги визначати і іншими методами, які розглянуто нижче.

## 12.4.6. Оцінка важливості параметрів у балах

При оцінці важливості параметрів у балах кожний експерт оцінює параметри за десятибальною системою. При цьому оцінка, яка призначається кожним експертом кожному параметру, не пов'язана з оцінками, які він же призначає іншим параметрам. Наприклад, усім параметрам можна призначити однакову оцінку. Визначення експертних оцінок у балах проводиться за таким алгоритмом: складається таблиця, в яку вносяться оцінки всіх параметрів у балах, зроблені кожним експертом; переходять від оцінок параметрів у балах до значень коефіцієнтів ваги, сума яких для всіх параметрів дорівнює одиниці в кожного експерта.

| Експерт | Оцінка в балах |   |   |   | Сума | Експерт    | Параметри |      |      |      |
|---------|----------------|---|---|---|------|------------|-----------|------|------|------|
|         | Параметри      |   |   |   |      |            | А         | Б    | В    | Г    |
|         | А              | Б | В | Г |      |            |           |      |      |      |
| 1       | 6              | 7 | 5 | 7 | 25   | 1          | 0,24      | 0,28 | 0,2  | 0,28 |
| 2       | 10             | 8 | 4 | 9 | 31   | 2          | 0,32      | 0,26 | 0,13 | 0,29 |
| 3       | 5              | 7 | 6 | 8 | 26   | 3          | 0,19      | 0,27 | 0,23 | 0,31 |
| 4       | 8              | 6 | 4 | 8 | 24   | 4          | 0,25      | 0,32 | 0,18 | 0,25 |
| 5       | 8              | 6 | 4 | 6 | 24   | 5          | 0,33      | 0,25 | 0,17 | 0,25 |
|         |                |   |   |   |      | Коеф. ваги | 0,27      | 0,28 | 0,18 | 0,28 |

Якщо при  $k > 3$  одночасна оцінка всіх параметрів викликає ускладнення, їх можна оцінювати ще одним методом, який називається методом парних порівнянь. Цей метод реалізується за допомогою наступного алгоритму.

1. Визначається кількість оцінюваних параметрів  $k$  і кількість експертів  $n$ . Нехай вони становлять  $k = 5$ ;  $n = 4$ .

2. Для кожного експерта складається окрема таблиця.

У цій таблиці експерт приводить оцінку парних порівнянь: якщо  $k$ -ий параметр важливіше  $j$ -го, то в ячейці, що належить  $k$ -му рядку і  $j$ -му стовпцю, вказується 1, інакше – 0.

Приклад заповнення такої таблиці першим експертом наведений нижче. З неї видно, що за оцінкою цього експерта параметр А менш важливий, ніж параметр Б і Д, але важливіший за В і Г.

| Параметри | Параметри |   |   |   |   | Сума |
|-----------|-----------|---|---|---|---|------|
|           | А         | Б | В | Г | Д |      |
| А         |           | 0 | 1 | 1 | 0 | 2    |
| Б         | 1         |   | 0 | 1 | 0 | 2    |
| В         | 0         | 1 |   | 0 | 0 | 1    |
| Г         | 0         | 0 | 1 |   | 1 | 2    |
| Д         | 1         | 1 | 1 | 0 |   | 3    |
|           |           |   |   |   |   | 10   |

Далі складається підсумкова таблиця всіма експертами.

| Експерт    | Параметри |      |      |      |      | Сума |
|------------|-----------|------|------|------|------|------|
|            | А         | Б    | В    | Г    | Д    |      |
| 1          | 0,20      | 0,20 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 1    |
| 2          | 0,25      | 0,15 | 0,15 | 0,25 | 0,20 | 1    |
| 3          | 0,20      | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,15 | 1    |
| 4          | 0,25      | 0,15 | 0,25 | 0,15 | 0,20 | 1    |
| Коеф. ваги |           |      |      |      |      |      |

## 12.4.7. Принципи рівномірності

У загальному випадку він полягає в прагненні до рівномірного підвищення якості об'єкта, який оптимізується за всіма нормованими критеріями.

Цей принцип має кілька різновидів.

1. Принцип рівності нормованих критеріїв. За цим принципом найкращим компромісним розв'язком  $x^*$  є такий, при якому досягається рівність усіх нормованих критеріїв, тобто  $f_1(x^*) = f_2(x^*) = \dots = f_n(x^*)$ . Іноді цей принцип є надмірно жорстким. Він може приводити до ситуацій, коли розв'язок задачі знаходиться поза зоною компромісу або відсутній.

2. Принцип квазірівності. За цим принципом ідея рівностей окремих критеріїв реалізується приблизно з точністю до деякої величини  $\epsilon$ . Розв'язок вважається найкращим, якщо значення окремих нормованих критеріїв відрізняються один від одного не більш, ніж на  $\epsilon$ .

3. Принцип «слухної поступки». За цим принципом розрізняють абсолютну і відносну поступку. Абсолютною вважається така поступка, при якій сумарний абсолютний рівень зниження одного або декількох критеріїв не переви-



ще сумарного абсолютного рівня підвищення інших критеріїв. Аналогічно формулюється принцип відносної «слухної поступки».

#### 12.4.8. Принцип послідовної «поступки»

Припустимо, що часткові критерії оптимальності ранжировані в порядку зменшення їх важливості. Для визначеності будемо вважати, що кожний з них потрібно максимізувати.

Процедура побудови компромісного розв'язку зводиться до знаходження розв'язку, що приводить в максимум головний критерій оптимальності  $f_1$ . Потім призначається, виходячи із практичних міркувань і точності, з якою відомі вихідні дані, деяка «поступка»  $Df_1$ , яку можна допустити, щоб перетворити на максимум другий критерій  $f_2$ . Далі накладаємо на критерій  $f_1$  обмеження, щоб він був не менше, ніж  $f_1(x^*) - df_1$ . При такому обмеженні шукаємо розв'язок, що приводить в максимум критерій  $f_2$ . Потім призначається поступка для критерію  $f_2$  і т.д.

Такий спосіб знаходження компромісного розв'язку відразу показує, ціною якої «поступки» в одному окремому критерії здобувається виграв в іншому.

На практиці використовуються й інші схеми компромісів.

#### 12.4.9. Використання множників Лагранжа

При розв'язанні задач векторної оптимізації зазвичай спочатку шукають множину ефективних рішень, які не покращуються (множину Парето), потім для прийняття заключного рішення використовують відповідну схему компромісу.

Складність розв'язку задачі залежить від того, чи відома аналітична залежність узагальненого критерію оптимальності від окремих критеріїв, чи вона повинна бути знайдена за допомогою чисельного експерименту на ЕОМ.

Якщо функціональна залежність узагальненого критерію від окремих критеріїв встановлена, то для розв'язку задачі можна використовувати метод невизначених множників Лагранжа.

Розглянемо наступну задачу векторної оптимізації:

$$f_{i, \text{opt}} = \min f_i(x), \quad i = 1, k. \quad (12.19)$$

Метод  $\epsilon$ -обмежень припускає видозміну постановки цієї задачі:

$$f_{i, \text{opt}} = \min f_i(x), \quad (12.20)$$

Для розв'язку задачі складається функція Лагранжа

$$L = f_1(x) + \sum_{i=2}^k \lambda_i (f_i(x) - \epsilon_i), \quad (12.21)$$

де  $\lambda$  – невизначені множники Лагранжа,  $\epsilon_i$  – максимальні припустимі (граничні) значення критеріїв оптимальності, крім першого.

Розглянемо два приклади використання цього методу.

**Приклад 12.2.** В цій задачі використовуються два критерії оптимальності і два управляемі незалежні змінні

$$\min \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 \\ f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 \end{cases} \quad (12.22)$$

*Розв'язок*

Перша фаза розв'язку полягає в перетворенні початкової постановки задачі:  $\min f_1(x_1, x_2)$  з врахуванням обмеження  $f_2(x_1, x_2) \leq \epsilon_2$ .

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2) = f_1(x_1, x_2) + \lambda_2 (f_2(x_1, x_2) - \epsilon_2). \quad (12.23)$$

Підставляючи в неї вираз для  $f_1$  і  $f_2$ , одержимо

$$L(x_1, x_2, \lambda_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 + \lambda_2 [(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 - \epsilon_2]. \quad (12.24)$$

тут  $\lambda_{12}$  – невизначений множник Лагранжа.

Знайдемо часткові похідні від функції Лагранжа за всіма аргументами і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + 2\lambda_2(x_1 - 6) = 0, \quad (12.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2\lambda_2(x_2 - 10) = 0, \quad (12.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = [(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 - \epsilon_2] = 0. \quad (12.27)$$

Розв'язавши систему, одержимо співвідношення

$$\lambda_2 = \frac{x_1 - 2}{6 - x_1} = \frac{x_2 - 4}{10 - x_2}. \quad (12.28)$$

З виразу для  $\lambda_{12}$  одержимо співвідношення

$$x_2 = 1,5x_1 + 1. \quad (12.29)$$



На рис. 12.11 зображена множина компромісів. Вона є відрізком прямої лінії. Лінії постійного рівня кожного із критеріїв оптимальності є колами. Відзначимо, що отриманий розв'язок не залежить від введеного обмеження. На рис. 12.12 показана множина компромісів у цільовому просторі.

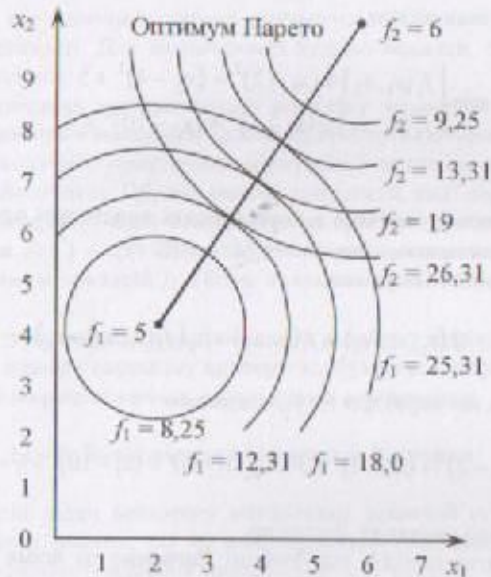


Рис. 12.11. Непокращувані (парето-оптимальні) рішення в просторі

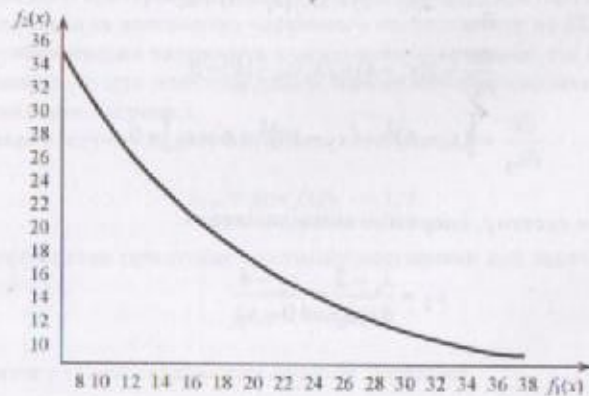


Рис. 12.12. Ефективна множина компромісів у цільовому просторі

Чисельні результати розв'язку цієї задачі представлені в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1$ | $f_2$ | $\lambda_{12}$ |
|-------|-------|-------|-------|----------------|
| 2,0   | 4,00  | 5,00  | 58,00 | 0              |
| 2,5   | 4,75  | 5,81  | 45,81 | 0,14           |
| 3,0   | 5,50  | 8,25  | 35,25 | 0,33           |
| 3,5   | 6,25  | 12,31 | 26,31 | 0,60           |
| 4,0   | 7,00  | 18,00 | 19,00 | 1,00           |
| 4,5   | 7,75  | 25,31 | 13,31 | 1,67           |
| 5,0   | 8,5   | 34,25 | 9,25  | 3,00           |
| 5,5   | 9,25  | 44,81 | 6,81  | 7,00           |
| 6,0   | 10,00 | 57,00 | 6,00  |                |

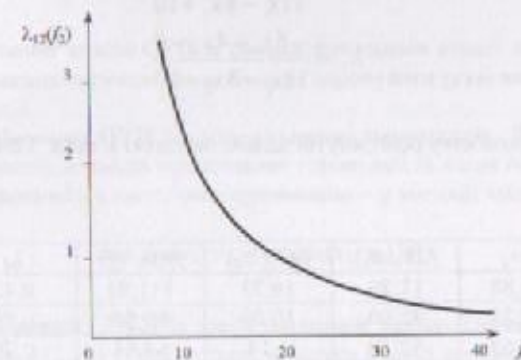
Множник Лагранжа  $\lambda_{12}$  є функцією  $f_1$  і  $f_2$ . Це, зокрема, видно на рис. 12.13.

У даному простому прикладі розв'язок отриманий у замкненій формі. У задачах великої розмірності, коли одержати замкнену форму неможливо, розв'язок шукають шляхом варіювання  $\epsilon$ .

Перейдемо тепер до більш складної задачі, в якій розглядаються дві керувані змінні і три локальні критерії оптимальності.

**Приклад 12.3.** Математичне формулювання задачі має такий вигляд.

$$\min_{x_1, x_2} \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5 \\ f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6 \\ f_3(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 15)^2 + 10 \end{cases} \quad (12.30)$$

Рис. 12.13. Множник Лагранжа як функція критерію оптимальності  $f_2$



## Розв'язок

Перепишемо задачу у формі  $\epsilon$ -обмежень:  $\min_{x_1, x_2} f_1(x_1, x_2)$  з врахуванням  $f_2(x_1, x_2) \leq \delta_2$ ,  $f_3(x_1, x_2) \leq \delta_3$ . Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x_1, x_2, \lambda_2, \lambda_3) = f_1(x_1, x_2) + \lambda_2(f_2(x_1, x_2) - \delta_2) + \lambda_3(f_3(x_1, x_2) - \delta_3). \quad (12.31)$$

Підставляючи сюди вираз для  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  і використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, одержуємо

$$\lambda_2 = \frac{11x_1 - 8x_2 + 10}{-5x_1 + 4x_2 - 10}, \quad (12.32)$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{-5x_1 + 4x_2 - 10}. \quad (12.33)$$

Помітимо, що функція  $f_1(x_1, x_2)$  не обов'язково повинна бути «основною», а функції  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  повинні виконувати роль обмежень.

Розглянута задача може бути записана в іншому вигляді, наприклад:  $\min_{x_1, x_2} f_2(x_1, x_2)$  з врахуванням обмежень  $f_1(x_1, x_2) \leq \delta_1$ .

Функція Лагранжа для задачі, записаної в такій формі, має вигляд

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_3) = f_2(x_1, x_2) + \lambda_1(f_1(x_1, x_2) - \delta_1) + \lambda_3(f_3(x_1, x_2) - \delta_3). \quad (12.34)$$

Вирішуючи цю задачу за допомогою методу невизначених множників Лагранжа, одержимо:

$$\lambda_1 = \frac{-5x_1 + 4x_2 - 10}{11x_1 - 8x_2 + 10}, \quad (12.35)$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{11x_1 - 8x_2 + 10}. \quad (12.36)$$

Результати розв'язку розглянутої задачі наведені в табл. 12.4.

Таблиця 12.4

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ | $f_3(x_1, x_2)$ | $\lambda_1$ | $\lambda_3$ |
|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| 4     | 6,88  | 17,29           | 19,73           | 111,93          | 0,42        | 0,19        |
| 5     | 8,25  | 32,00           | 10,06           | 80,56           | 0,50        | 0,50        |
| 6     | 9,63  | 52,70           | 6,14            | 54,84           | 0,70        | 1,00        |
| 7     | 11,00 | 79,00           | 8,00            | 35,00           | 1,00        | 2,00        |
| 8     | 12,38 | 111,22          | 15,66           | 20,86           | 2,17        | 5,17        |

## 12.5. Метод комплексного генетичного алгоритму

Проаналізуємо, як завдання багатоцільової оптимізації систем впливає на основні оператори та алгоритми класичного ГА при його модернізації до комплексного генетичного алгоритму (КГА).

Розглянемо для прикладу деякий моделює мий об'єднаний технологічний процес (ОТП), який складається з окремих елементарних технологічних процесів (ЕТП).

Запишемо функцію (12.13) для двох окремих ЕТП, що входять до системи:

$$z_1 = z_1(x_1, y_1), \quad (12.37)$$

$$z_2 = z_2(x_2, y_2). \quad (12.38)$$

Конкуренція цілей полягає в тому, що вони зв'язані значеннями загальних аргументів, «перетягуючи» їх на себе, – кожна прагне підтягти аргументи до «свого» оптимуму, погіршуючи ситуацію в іншому. Введемо наступну класифікацію конкуренції:

– *відсутність* конкуренції означає, що в обох цільових функціях усі аргументи незалежні;

– *м'яка* конкуренція означає, що в обох цільових функціях узагальнена частина аргументів, інші незалежні;

– *жорстка* конкуренція означає, що в обох цільових функціях узагальнені всі аргументи.

При проектуванні систем багатокритеріальність мети виникає тоді, коли компонентами (12.13) стають показники якості окремих підсистем. Ресурси, за які вони конкурують, – це пари конкретних значень загальних аргументів  $x$  і  $y$ , оскільки, у загальному випадку:

$$\max_{x, y} \{z_1(x_1, y_1)\} \neq \max_{x, y} \{z_2(x_2, y_2)\} \quad (12.39)$$

При проектуванні класів ОТП зі своїми функціями якості  $z_1$ ,  $z_2$  і з різним ступенем узагальнення аргументів необхідно вирішувати різні завдання багатоцільової оптимізації.

**1. Клас послідовних ОТП без узагальнених параметрів.** Якщо ОТП послідовний, то споживчу цінність представляє тільки якість після останнього ЕТП  $z_2$  – перший «вкладений» у нього опосередковано – у вигляді «матрьошки»:

$$\max_{x, y} \{z_2(x_2, y_2, \max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\})\}. \quad (12.40)$$

**2. Клас послідовних ОТП із узагальненими параметрами.** У цьому випадку «матрьошка» (12.39) спрощується, оскільки один з аргументів у цільових функціях узагальнений, наприклад, по  $y$ :



$$\max_{x,y} \{z_2(x_2, y, \max_{x_1} \{z_1(x_1, y)\})\}. \quad (12.41)$$

3. Клас ОТП із частковим розпаралелюванням без узагальнених параметрів приводить до завдання:

$$\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}, \quad (12.42)$$

$$\max_{x_2} \{z_2(x_2, y_1, x_2, y_2)\}. \quad (12.43)$$

4. Клас ОТП із частковим розпаралелюванням з узагальненими параметрами приводить до завдання:

$$\max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\}, \quad (12.44)$$

$$\max_{x_2} \{z_2(x_2, x_2, y)\}. \quad (12.45)$$

5. Клас ОТП із повним розпаралелюванням без узагальнених параметрів характеризується тим, що завдання оптимізації розпадається на дві самостійні, розв'язок кожної з яких тривіальний.

$$\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}, \quad (12.46)$$

$$\max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}. \quad (12.47)$$

6. Клас ОТП із повним розпаралелюванням з узагальненими параметрами характеризується тим, що у двох ЕТП у є загальним, а компоненти аргументу  $x$  можуть відрізнятися один від одного. Тут окремі вирази (12.46) і (12.47) повинні розглядатися у вигляді системи

$$\begin{cases} \max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}, \\ \max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}. \end{cases} \quad (12.48)$$

розв'язок якої при оптимізації параметрів ОТП такого класу може бути здійснений тільки спільно.

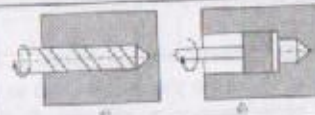
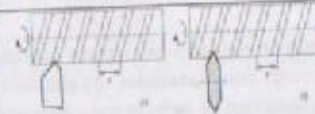
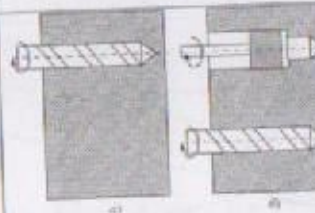
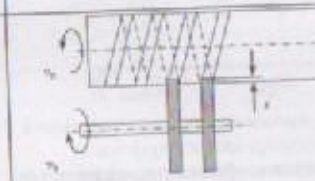
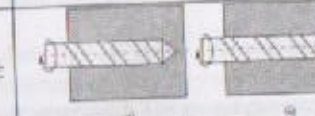
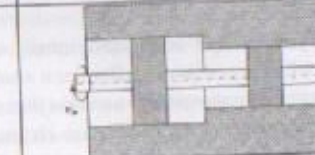
Узагальнено сказане для прикладу трьох цільових функцій (трьох ЕТП в ОТП) (табл. 12.5).

### 12.5.1. Перетворення фенотипу в генотип

Виберемо в якості прикладу ОТП із повним розпаралелюванням і узагальненими параметрами. ОТП складається із двох ЕТП і є розгортанням двох співвісних внутрішніх отворів за допомогою східчастої розгортки. Нехай передатною функцією «параметри процесу  $\rightarrow$  якість» буде вираз

Таблиця 12.5

Постановка завдання багатодільової оптимізації ОТП різних класів

| ОТП                            | ОП    | Схема ОТП   | Завдання оптимізації  | КГА |
|--------------------------------|-------|---|---|-----|
| 1                              | 2     | 3   | 4   | 5   |
| Послідовні                     | Немає |    | $\max_{x,y} \{z_2(x_2, \theta_2, \max_{x_1} \{z_1(x_1, \theta_1)\})\}$                              | -   |
|                                | Є     |    | $\max_{x,y} \{z_2(x_2, \theta, \max_{x_1} \{z_1(x_1, y)\})\}$                                       | -   |
| Із частковим розпаралелюванням | Немає |    | $\max_{x,y} \{z_1(x_1, \theta_1)\}, \max_{x,y} \{z_2(x_2, \theta_1, x_2, \theta_2)\}$               | -   |
|                                | Є     |   | $\max_{x,y} \{z_1(x_1, y)\}, \max_{x,y} \{z_2(x_2, y)\}$  | -   |
| З повним розпаралелюванням     | Немає |  | $\max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}, \max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\}$                              | +   |
|                                | Є     |  | $\begin{cases} \max_{x_1, y_1} \{z_1(x_1, y_1)\}, \\ \max_{x_2, y_2} \{z_2(x_2, y_2)\} \end{cases}$ | +   |



$$R_z = f(\omega, Z), \quad (12.49)$$

де  $R_z$  – шореткість обробленої поверхні,  $\omega$  – кутова швидкість обертання розгортки;  $Z$  – кількість зубів розгортки.

Звернімо увагу на те, що загальним параметром (ознакою фенотипу) для обох ЕТП є кутова швидкість обертання розгортки. Фенотип, як впливає із (12.49), представлений тут двома ознаками: кількістю зубів розгортки  $Z$  і кутовою швидкістю її обертання  $\omega$ . Величина  $Z$  в обох розгортаннях може відрізнятися, а величина  $\omega$  – ні.

Геометричне представлення хромосоми довільної особини  $A$ , однозначно обумовленої двома незалежними  $Z_{1A}$  і  $Z_{2A}$  і одною узагальненою  $\omega$  ознакою, із парної загальної кількості особин  $N$ , розміщених в області  $0 \leq Z \leq Z_{max}$ ,  $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$ , наведено на рис. 12.14.

КГА, так само, як і класичний ГА, починається з введення вихідних даних.

Тут відмінність від ГА полягає в тому, що цільових функцій більше, ніж одна, і всі вони повинні бути відомі (наприклад, у результаті експерименту) до початку роботи КГА.

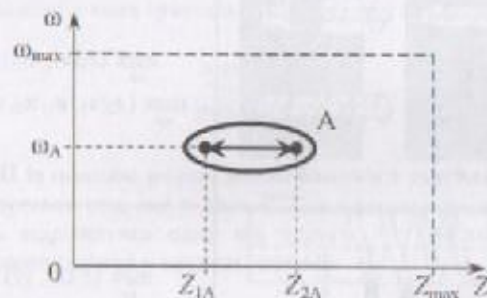


Рис. 12.14. Геометричне представлення особини  $A$ , що складається із двох незалежних і однієї узагальненої ознаки

### 12.5.2. Схрещування

Відмінність схрещування в КГА від схрещування в ГА полягає в двох компонентах:

– спочатку розраховуються цільові функції для всієї популяції, а потім їх значення поєднуються в значення функції пристосованості  $P$ ;

– у новому методі – особливі, комплексні хромосоми, які будуються за розробленими правилами. Схема формування хромосоми ОТП, що складається із двох ЕТП, з узагальненим параметром  $\omega$  наведена на рис. 12.15.

Усього формується  $N$  хромосом, зображених на рис. 12.15 *в*, – по кількості особин-батьків нульового покоління.

Далі починається основна частина КГА, коли в циклі об'єкт проживає  $T$  епох до завершення процесу оптимізації. Протягом нульової епохи (номер епохи  $t=0$ ,  $t \in T$ ) спочатку здійснюється схрещування, яке складається із чотирьох операторів: вибору пари, власне схрещування (кросовера), мутації та інверсії.

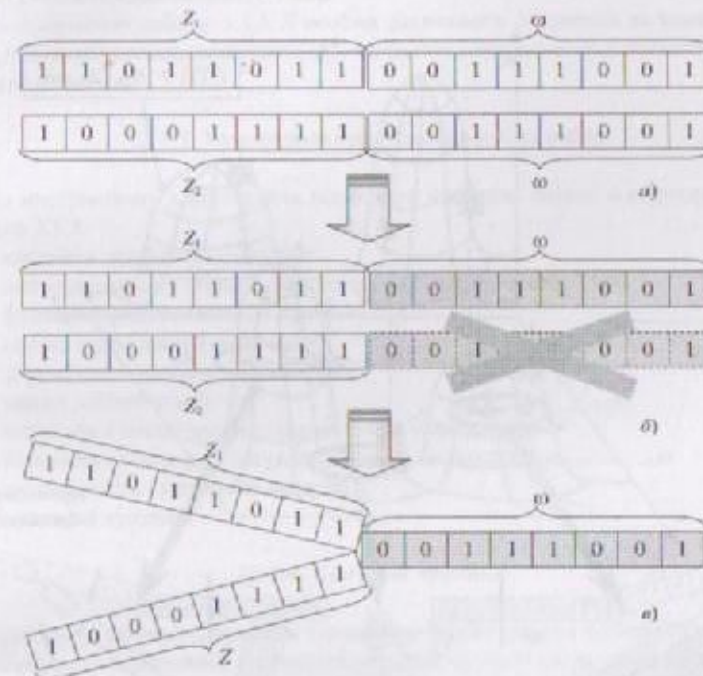


Рис. 12.15. Схема формування хромосоми ОТП із узагальненим параметром  $\omega$ :  
*a* – формування хромосом окремих ЕТП;  
*b* – виключення повторюваного в обох хромосомах гена;  
*c* – конкатенація індивідуальних і узагальненого генів у одну хромосому

Пари особин  $A_1$  і  $A_2$  (рис. 12.16 *a*) підбираються для схрещування з  $N$  відповідно до настроювань користувача (наприклад, випадково).

Механізм схрещування хромосом особин  $A_1$  і  $A_2$  наведений на рис. 12.16 *b*. Спочатку звичайним для ГА способом виконується оператор кросовера для узагальненої частини хромосом батьків. При цьому виходить узагальнена частина хромосоми нащадка.

Далі в такий же спосіб схрещують окремо індивідуальні частини хромосом особин  $A_1$  і  $A_2$ . Конкатенацією отриманих фрагментів одержують нову повну хромосому. До окремих її частин застосовують оператори мутації і (якщо необхідно) інверсії, після чого хромосома нащадка готова (рис. 12.16 *b*).

Далі  $N$  хромосом батьків і  $N/2$  хромосом нащадків зазнають добору за ве-



личною функцією  $P$ . У цьому випадку функція  $P$  є, по суті, зворотним компонентом багатощільового показника якості  $R_o(R_{o1}, R_{o2})$  і перетворенням їх в сукупності у скалярний цільовий показник.

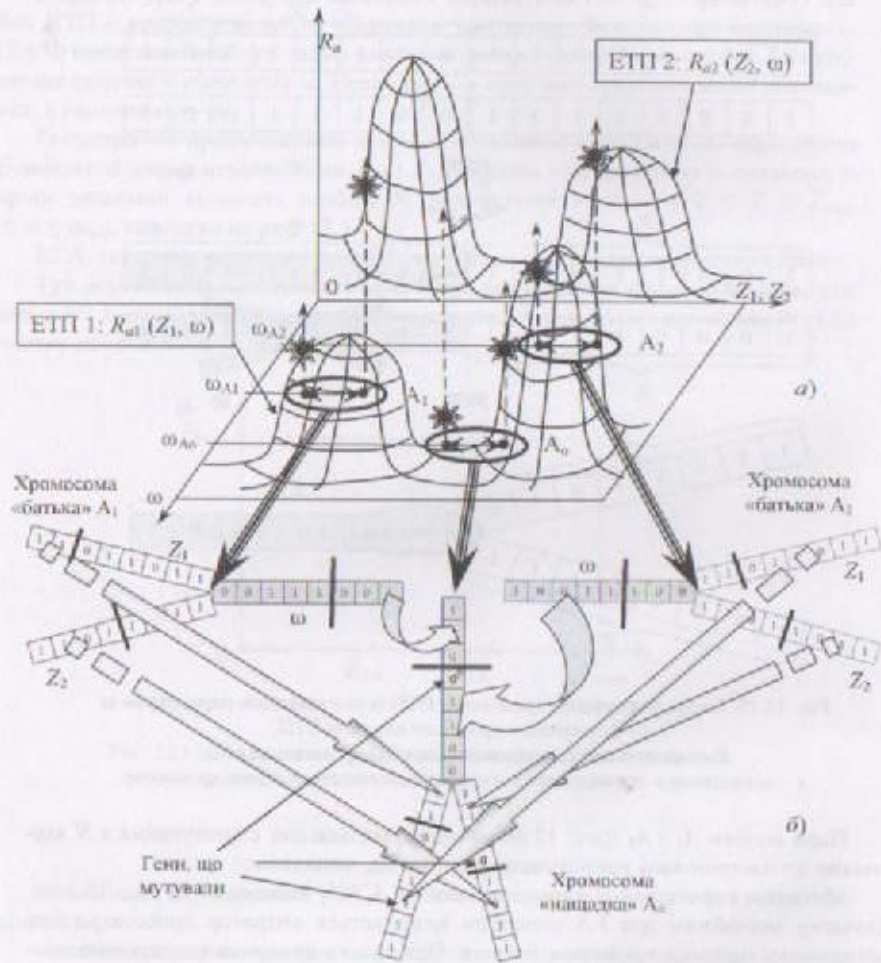


Рис. 12.16. Схема процесу схрещування в методі КГА:  
а – фенотип ОПТ; б – генотип ОПТ

Вибір виду цієї функції є налаштуванням користувача КГА і надає йому широкі можливості: лінійні, мінімізаційні, максимізаційні, добутку й функції Кобба-Дугласа та ін., виходячи із принципів домінантності, Парето, Слейтера, Джеррі, рівності, ефективності, тощо.

По закінченні добору з  $1,5 N$  особин залишають  $N$  кращих за значенням  $P$ , інші  $0,5 N$  знищуються (стираються), і на цьому поточна епоха процесу оптимізації завершується.

### 12.5.3. Розрахунки пристосованості та вибір

До налаштувань користувача віднесемо наступні зміни в структурі та параметрах КГА:

- кількість особин у популяції;
- метод заселення області рішень на нульовому етапі;
- функція пристосованості  $P$ ;
- спосіб нормування аргументів,
- структура і довжина хромосоми;
- метод добору пари;
- кількість і місце розташування точок схрещування;
- кількість і місце розташування точок, що мутують;
- необхідність і методика інверсії;
- критерій зупинки.

### 12.5.4. Критерій зупинки

Критерієм загальної зупинки є відсутність збільшення всіх значень функції  $P$  для всіх особин поточної і передостанньої популяції після чергової епохи, що брали участь у роботі алгоритму. Така зупинка вважається штатною для алгоритму, оскільки в цьому випадку він сходиться, сходиться на оптимум і сходиться за прийнятний час.

Якщо ні, то необхідно міняти налаштування користувача.

### 12.5.5. Загальний алгоритм методу КГА

Схема комплексного генетичного алгоритму оптимізації ОПТ виглядає так (рис. 12.17).



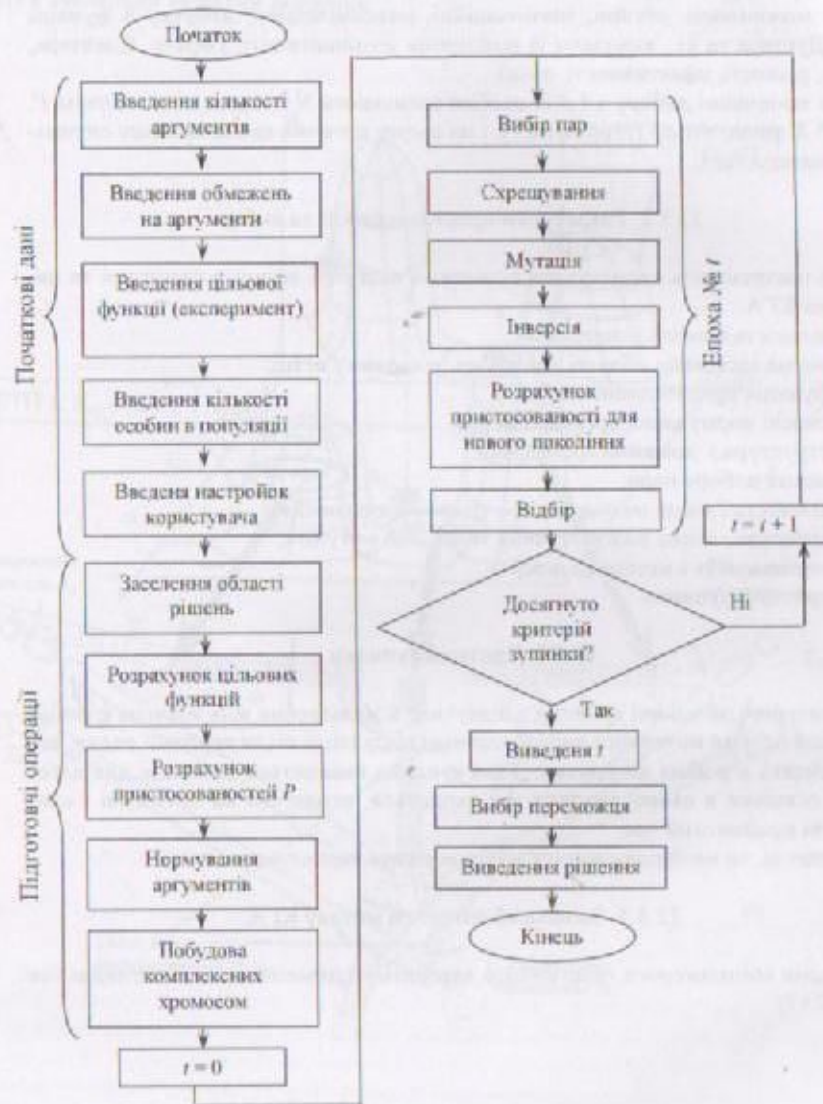


Рис. 12.17. Схема комплексного генетичного алгоритму оптимізації ОТП

## 12.6. Питання до самоконтролю

1. Які завдання розв'язуються за допомогою генетичного алгоритму?
2. Що таке «фенотип» та «генотип» і який існує між ними зв'язок?
3. Які переваги та за рахунок чого має генетичний алгоритм над іншими методами оптимізації?
4. Основні терміни теорії генетичних алгоритмів. Чому вони схожі на біологічні терміни?
5. В чому полягають основні принципи побудови генетичних алгоритмів?
6. Кодування ознак при переході від фенотипу до генотипу. Що таке код Грея?
7. Як виконується операція схрещування та які особливості її виконання?
8. Як виконується підбір пар для схрещування? Переваги та недоліки різних методів підбору.
9. Як виконуються оператори мутації та інверсії? Навщо вони потрібні в генетичному алгоритмі?
10. Опишіть схему функціонування класичного генетичного алгоритму.
11. Що є критерієм зупинки роботи генетичного алгоритму?
12. Сходимость генетичного алгоритму.
13. Наведіть приклад багатоекстремальної функції. Чому саме до неї вигідно застосовувати генетичні алгоритми оптимізації?
14. Що таке багаточільова оптимізація і який основний недолік цього процесу? Методи боротьби з ним.
15. Наведіть приклади об'єктів оптимізації, моделювання яких зводиться до розв'язання багаточільової задачі.
16. В чому полягає особливість комплексного генетичного алгоритму?
17. Як виглядає зіркоподібна хромосома методу КГА та як її скласти?
18. Процес схрещування зіркоподібних хромосом в методі КГА.
19. Загальна схема комплексного генетичного алгоритму.
20. Чому методи генетичних алгоритмів відносяться до еволюційних методів оптимізації?



## ЗАКЛЮЧЕННЯ

Підручник «Математичні методи моделювання» за своїм змістом повністю включає завдання Учбової програми однойменної дисципліни в частинах лекційного навчання та самостійної роботи студентів.

Автори планують також видання для цієї дисципліни збірника завдань для практичних робіт.

Підручник побудовано на вибраних матеріалах:

– широкої мережі фундаментальних та прикладних робіт з математичного моделювання;

– монографій С.О. Балана, Т.П. Становської та О.Л. Становського «Проектирование и управление в машиностроении», Л.Г. Раскина та О.В. Сірої «Нечеткая математика. Основы теории. Приложения», О.П. Рогштейна «Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети»;

– навчального посібника О.Г. Руденко та С.В. Бодяньського «Штучні нейронні мережі»;

– захищених кандидатських дисертацій С.О. Балана, О.С. Гончарової, О.С. Плачиди, Т.П. Становської, Х. Ягі, виконаних в Одеському національному політехнічному університеті;

– сучасних електронних ресурсів;

– власних наукових робіт авторів, виконаних в Одеському національному політехнічному університеті.

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

## Основна

1. Абрамов О.В. Прогнозирование состояния технических систем / О.В. Абрамов, А.Н. Розенбаум. – М.: Наука, 1990. – 126 с.
2. Балан С.А. Проектирование и управление в машиностроении / С.А. Балан, Т.П. Становская, А.Л. Становский. – Одесса: Астропринт, 2002. – 376 с.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Р. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. – 336 с.
5. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, П. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
6. Бубняк Т.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: Новий світ – 2000. – 436 с.
7. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1980. – 686 с.
8. Бурышкин М.Л. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций / М.Л. Бурышкин, В.Н. Гордеев. – К.: Будівельник, 1984. – 120 с.
9. Васильев К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 551 с.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1967.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – Физматлит, 2004.
14. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
15. Галушкин А.И. Теория нейронных сетей. – М.: ИПРЖР, 2000. – 416 с.
16. Гащук П.М. Линейні моделі дискретно-неперервних механічних систем / П.М. Гащук, Л.-М. М. Зорій. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.
17. Гильде В. Зеркальный мир. – М.: Мир, 1982. – 120 с.
18. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Уч. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 311 с.
19. Дьяконів, В. П. Нові інформаційні технології: Уч. посібник. Ч. 3. Основи математики й математичне моделювання / В. П. Дьяконів, И. В. Абраменкова, А. А. Пенська. – Смоленськ: СГПУ, 2003. – 192 с.



20. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. – М.: Приор, 2002.
21. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. Шк., 1985. – 480 с.
22. Корячко В.П. Теоретические основы САПР / В.П. Корячко, В.М. Курейчик, И.П. Норенков // М.: Энергоатомиздат, 1987. – 400 с.
23. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
24. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
25. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.
26. Минюк С.А. Дифференциальные уравнения и экономические модели. Учебное пособие / С.А. Минюк, Н.С. Березкина. – Минск: Высш. школа, 2007. – 141 с.
27. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Учебное пособие. – М.: Наука, 1983. 424 с.
28. Оборский Г.О. Моделирование та забезпечення надійності технічних систем і технологічних процесів. – Одеса: ОДПУ, 1997. – 137 с.
29. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 366 с.
30. Оробей В.Ф. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем / В.Ф. Оробей, А.Ф. Дашенко, Н.Н. Андриенко. – К.: Наукова думка, 1995. – 388 с.
31. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М., 1999.
32. Пехович А.И. Расчеты теплового режима твердых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидних. – Л.: Энергия, 1976. – 352 с.
33. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М.: Просвещение, 1962. – 184 с.
34. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с.
35. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Вивниця: УНИ-ВЕРСУМ-Вивниця, 1999. – 320 с.
36. Самарский А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
37. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975. – 768 с.
38. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 4-х томах. – М.: Наука, 1981. 655 с.
39. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
40. Темкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. – М.: Энергия, 1973. – 464 с.
41. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. Учебное пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

42. Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А.В. Усов, А.Н. Дубов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2003. – 682 с.
43. Усов А.В. Вероятностно-статистическое моделирование технико-экономических систем / А.В. Усов, А.М. Третьяк, А.П. Коновалов, К.А. Дубров. – Одесса: Астропринт, 2003. – 224 с.
44. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
45. Эндриус Дж. Математическое моделирование / Дж. Эндриус, Р. Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979.

## Долыткова

46. Аведьян Э.Д. Алгоритмы настройки многослойных нейронных сетей // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 106 – 118.
47. Алифанов О.М. Идентификация процесса теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
48. Алон Н. Вероятностный метод / Алон Н., Спенсер Дж. – М.: Бином, 2007. – 302 с.
49. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
50. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченкова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
51. Антонов А.В. Системный анализ: Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2004. – 454 с.
52. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.
53. Арсенин В.Я. Некорректно поставленные задачи / В.Я. Арсенин, А.Н. Тихонов // Энциклопедия кибернетики. – 1975. – Т. 2. – С. 76 – 78.
54. Артюхин Е.А. Определение коэффициента температуропроводности по данным эксперимента. – Изв. физ. журн., 1975, 29, № 1. – С. 87 – 90.
55. Бекшаев С.Я. Применение обобщенных координат в расчетах симметричных механических систем // Механика симметричных неоднородных сред и ее приложения. – Одесса: ОГАСА, 1997. – С. 18 – 26.
56. Белов В.В. Теория графов / В.В. Белов, В.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
57. Белоусов А.И. Дискретная математика / Белоусов А.И., Ткачев С.Б. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
58. Биркгоф Г. Теория структур. – М.: Иностранная литература, 1952. – 407 с.
59. Боголюбов А.Н. Основы математического моделирования. – М.: Наука, 1994. – 146 с.
60. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем.



- тем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
61. Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. – Ташкент: ФАН, 1987. – 148 с.
62. Булинелий А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит., 2005. – 394 с.
63. Буришкин М.Л. Проблемы врахування симетрії у дискретних методах механіки. Підсумки та перспективи досліджень / М.Л. Буришкин, В.П. Крижанівський // Механіка симетричних неоднородних серед і її приложения. – Одеса: ОГАСА, 1997. – С. 6–9.
64. Бурышкин М.Л. Об учёте симметрии в расчетах стержневых конструкций / М.Л. Бурышкин, В.А. Семёнов // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1974. – Вып. 19. – С. 133–141.
65. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем // М.: Наука, 1978. – 400 с.
66. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том I. – М.: Мир, 1972. – 336 с.
67. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том II. – М.: Мир, 1969. – 495 с.
68. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том III. – М.: Мир, 1973. – 504 с.
69. Вашик В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. – М.: Наука, 1994. – 409 с.
70. Верлань А.Ф. Системы искусственного интеллекта. Методическое пособие / А.Ф. Верлань, И.А. Чмырь, А.Р. Ахатов, О.Ж. Бобомуратов. – Самарканд: СамГУ, 2009. – 121 с.
71. Вороновский Г.К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Вороновский, К.В. Махотнюк, С.Н. Петрашев, С.А. Сергеев. – Харьков: Основа, 1997. – 212 с.
72. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл., У. Мюррей., М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
73. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.
74. Гнеденко Б.Д. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 2009. – 423 с.
75. Говорухин В. Компьютер в математическом исследовании. – М.: Наука, 2001. – 633 с.
76. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. – М.: СП ПараГраф, 1991. – 320 с.
77. Гордеев В.Н. Использование симметрии при создании конструктивных форм // Механика симметричных неоднородных сред и её приложения. – Одеса: ОГАСА, 1997. – С. 50–55.
78. Гусев А.С. Расчет конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.
79. Джеффри Е. Хинтон. Как обучаются нейронные сети // В мире науки. –

1992. – № 11–12. – С. 103–110.
80. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терmini та визначення. – Чинний від 01.01.1996. – К.: Держстандарт України. – 41 с.
81. Дьяконов В.П. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование / В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова, А.А. Пеньков. – Смоленск: СГПУ, 2003. – 192 с.
82. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. – К.: Физматлит, 2003. – 432 с.
83. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
84. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
85. Золотаревский В.С. Механические свойства металлов. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.
86. Иберна К.А. Факторный анализ. – М.: Мир, 1983-2. – 376 с.
87. Иванов А.Е. Виртуальная реальность // История философии. Энциклопедия. – Минск, 2002. – С. 183–186.
88. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Уч. пособие. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 288 с.: ил.
89. Извачков Ю.С., Петров В.Н. Информационные системы. Сиб.: Питер, 2005. – 656 с.
90. Йореско К.Г. Факторный анализ методами наименьших квадратов и максимального правдоподобия // Статистические методы для ЭВМ. – М.: Наука, 1986. – С. 136–169.
91. Касаткина Н.В. Информационні системи та їх застосування / Н.В. Касаткіна, Л.А. Пономаренко, В.О. Філатов. – К.: ПП «Аверс», 2008. – 142 с.
92. Коголовский М.Р. Перспективные технологии информационных систем. – М.: ДМК Пресс, 2003. – 288 с.
93. Коздоба Л.А. Методы решения обратных задач теплопереноса / Л.А. Коздоба, П.Г. Круковский. – К.: Наукова думка, 1982. – 360 с.
94. Кострова Г.В. САПР об'єктів машинобудування: Навч. посібник / Г.В. Кострова, О.С. Савельева, О.Л. Становський. – К.: ІЗМН, 1998. – 192 с.
95. Крупский В.Н. Введение в сложность вычислений. – М.: Факториал, 2006. – 123 с.
96. Кузнецов Е.С. Техническая эксплуатация автомобилей / Е.С. Кузнецов, В.П. Воронов, А.П. Болдин и др. – М.: Транспорт, 1991. – 413 с.
97. Кузьмин М.П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. – М.: Энергия, 1974. – 416 с.
98. Кускова Т.В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. – М., 1971. – Вып. 3. – С. 77–83. 36.
99. Куссуль Э.М. Ассоциативные нейронподобные структуры. – К.: Техніка, 1992. – 210 с.
100. Левин С.Ф. Статистический анализ систем обеспечения эксплуатации



- технических объектов – М.: АН СССР, 1989. – 248 с.
101. Лескин А.А. Сети Петри в моделировании и управлении / А.А. Лескин, П.А. Мальцев, А.М. Спиридонов. – Л.: Наука, 1989. – 133 с.
102. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
103. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. – М.: ГТТИ. – 1957.
104. Ляшко И.И. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатко. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с.
105. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент, 2008. – 347 с.
106. Масалович А.И. От нейрона к дейрокомпьютеру // Журнал доктора Добба. – 1992. – № 1. – С. 20 – 23.
107. Математическая энциклопедия, Том 3. – М.: Советская энциклопедия, 1992. – 1182 с.
108. Мкртчян С.О. Нейроны и нейронные сети. – М.: Энергия, 1989. – 178 с.
109. Молчанов И.Н. Основы метода конечных элементов / И.Н. Молчанов, Л.Д. Николенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.
110. Нейрокомпьютеры и интеллектуальные роботы / Под ред. Н.М. Амосова. – К.: Наукова думка, 1991. – 272 с.
111. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения. – М.: Радио и связь, 1986. – 405 с.
112. Никитенко Н. И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. – Киев: Наук. думка, 1978. – 212 с.
113. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса. – К.: Наукова думка, 1983. – 352 с.
114. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.
115. Новиков В.В. Математическое моделирование профиля равного сопротивления / В.В. Новиков, В.Г. Максимов, С.А. Балап, О.Е. Гончарова // Оптимизация в материаловедении. – Одесса: АстроПринт, 1999. – С. 151.
116. Ногин В. Д. Принятия решений в многокритериальной среде. – М.: Физматлит, 2005. – 170 с.
117. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Т. Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
118. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
119. Омельченко К.Г. Решение обратной задачи нелинейной теплопроводности по определению теплофизических характеристик / К.Г. Омельченко, В.Г. Пчелкина. – Инж.-физ. журн., 1975, 29, № 1. – С. 95 – 98.
120. Панкратов Н.М. Ускоренные испытания мобильных машин и их элементов / Н.М. Панкратов, Н.Д. Боровский. – Одесса: Черноморье, 1998. – 198 с.

121. Печат А. Нечёткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ, 2009. – 797 с.
122. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.
123. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.
124. Попырин Л. С. Математическое моделирование и оптимизация тепловых энергетических установок. – М.: Энергия, 1978. – 416 с.
125. Растринин Л.А. Адаптация сложных систем. Рига: Знание, 1981. – 375 с.
126. Расчеты на прочность деталей машин. Справочник / И.А. Биргер и др. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
127. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
128. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурно-неоднородных тел. – Рига, 1989. – 224 с.
129. Ротштейн О.П. Застосування нейронних мереж для ідентифікації нелінійних залежностей / О.П. Ротштейн, Ю.І. Мілюшкін // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1998. – № 3. – С. 9 – 15.
130. Савула Я.Г. Метод скінчевних елементів / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко. – Львів: Вид-во Львівського університету, 1976. – 242 с.
131. Сазанов А.А. Четырёхмерная модель мира по Минковскому. – М.: URSS, 2009. – 283 с.
132. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
133. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
134. Словарь по кибернетике / Под ред. В.С. Михалевича. – 2-е изд. – К.: Гл. ред. УСЭ им. М.П. Бажана, 1989. – 751 с.
135. Соколов Е.Н. Нейроинтеллект: от нейрона к нейрокомпьютеру / Е.Н. Соколов, Г.Г. Вайтнявичус. – М.: Наука, 1989. – 283 с.
136. Таненбаум Э., Степ М. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. – М.: Мир, 2003. – 893 с.
137. Татт У. Теория графов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
138. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
139. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
140. Тихонов А.Н. Обратные задачи теплопроводности. – Инж.-физ. журн., 1975. – 39. – № 1. – С. 7 – 12.
141. Трудоношин В.А. Математические модели технических объектов / В.А. Трудоношин, И.В. Пивоварова // САПР. В 9 кн. Кн. 4. – М.: Высшая школа, 1986. – 160 с.
142. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – М.:



- Мир, 1992.  
 143. Успенский В.А. Некоторые приложения механики к математике. – М.: Физматлит, 1958 – 49 с.  
 144. Федоров Е.С. Симметрия и структура кристаллов. – М.: АН СССР, 1949. – 631 с.  
 145. Физический энциклопедический словарь. Т. 3. Максвелла теорема. – М.: Советская энциклопедия, 1963. – 123 с.  
 146. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. – М.: URSS, 2004. – 287 с.  
 147. Чмирь И.А. Объектно-ориентированное моделирование / И.А. Чмирь, А.Ф. Верлань. – Одесса: НАДУ, 2005. – 243 с.  
 148. Шпур Г.Н. Автоматизированное проектирование в машиностроении / Г.Н. Шпур, Ф.Л. Краузе. – М.: Машиностроение, 1988. – 648 с.  
 149. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве / А.В. Шубников, В.А. Колшак. – М.: Наука, 1972. – 354 с.  
 150. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. Практическое руководство. – М.: Мир, 1982. – 238 с.  
 151. Эллиот Дж. Симметрия в физике. Т. 1 / Дж. Эллиот, П. Добер. – М.: Мир, 1983. – 368 с.

АЛФАВИТНИЙ ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- а**декватність 7  
 аналіз концентраційного стану 160  
 — НДС 145  
 — розмірності 9  
 — термічного стану 160  
 аналітичні методи 8  
 асимптотичні моделі 12
- б**агатоцільова оптимізація 461  
 бінарні операції над нечіткими множинами 361
- в**икористання фрагментів структур 268  
 випадкові процеси 300  
 віртуальний скінченний елемент 221  
 віртуальні моделі 183  
 — об'єкти 183  
 — — багатовимірні 200  
 — — двовимірні 183
- г**ексадральні ізопараметричні елементи 94  
 генотип 445  
 графи гамільтонові 256  
 — ейлерові 256  
 графічні методи 8
- д**едукція 12  
 декодування «ген – ознака» 448  
 дельта-правило розширене 424  
 дерева 257  
 детерміновані змінні 13  
 динаміка відновлюваних систем 279
- динамічна система 16  
 дискретизація двовимірного простору 79  
 — одновимірного простору 68  
 — простору-часу 68  
 — тривимірного простору 90  
 — часу 97  
 диференціальне рівняння теплопровідності 44  
 — — гіперболічного типу 59  
 — — еліптичного типу 61  
 — — параболічного типу 42  
 дослідження граничних випадків 10  
 досяжність та зв'язність 255
- е**волюційні моделі 442  
 еквівалентне перетворення 268
- і**зоморфізм графів 258  
 ізопараметричні елементи 75  
 індукція 12  
 інтелектуальні моделі 334
- к**ількість змінних 18  
 класифікація симетрії 105  
 кодування «ознака – ген» 445  
 коефіцієнт ваги параметрів 465  
 компромісні розв'язки 462  
 крайова задача 27  
 критична точка 16
- л**інійні диференціальні рівняння 25  
 лінійність 18



|   |          |
|---|----------|
| ПЕРЕДМОВА РЕДАКТОРА .....   | 3        |
| <b>ЧАСТИНА I. АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ.....</b>  | <b>6</b> |
| Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ .....                                     | 6        |
| 1.1. Основні поняття моделювання .....  | 6        |
| 1.1.1. Основні види моделей та їх властивості .....                                     | 6        |
| 1.1.2. Мета, принципи та технологія моделювання .....                                   | 7        |
| 1.1.3. Поняття об'єкта та його моделі .....   | 10       |
| 1.2. Класифікація моделей. Роль моделювання в пізнавальній діяльності .....             | 12       |
| 1.3. Приклади математичних моделей. Форми їх представлень .....                         | 13       |
| 1.4. Структурна стійкість математичних моделей .....                                    | 15       |
| 1.5. Диференціальні рівняння математичної фізики для моделювання технічних систем ..... | 17       |
| 1.6. Питання до самоконтролю .....  | 20       |
| Розділ 2. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....                      | 21       |
| 2.1. Загальні поняття .....   | 21       |
| 2.2. Лінійні системи .....  | 23       |
| 2.3. Крайова задача .....   | 27       |
| 2.4. Різницеві системи .....  | 28       |
| 2.5. Рівняння систем управління .....   | 30       |
| 2.6. Розрахункові схеми пружних систем .....  | 31       |
| 2.7. Приклад складання рівнянь .....  | 33       |
| 2.8. Математичні моделі пружних систем .....  | 34       |
| 2.9. Математичні моделі замкнених технологічних систем .....                            | 35       |
| 2.10. Програмні управління .....  | 36       |
| 2.10.1. Стійкість за Ляпуновим програмних рухів .....                                   | 38       |
| 2.10.2. Стабілізація програмних рухів .....   | 39       |
| 2.11. Питання до самоконтролю .....   | 41       |
| Розділ 3. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ .....           | 42       |
| 3.1. Диференціальні рівняння параболічного типу .....                                   | 42       |
| 3.1.1. Деякі питання теорії теплопровідності .....                                      | 42       |
| 3.1.2. Диференціальне рівняння теплопровідності .....                                   | 44       |
| 3.1.3. Метод інтегральних перетворень .....   | 47       |
| 3.1.4. Метод скінченних елементів .....   | 52       |
| 3.2. Диференціальні рівняння гіперболічного типу .....                                  | 59       |
| 3.3. Диференціальні рівняння еліптичного типу .....                                     | 61       |
| 3.4. Питання до самоконтролю .....  | 67       |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ЧАСТИНА II. СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТНІ МОДЕЛІ .....</b>                    | <b>68</b> |
| Розділ 4. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ПРОСТОРУ-ЧАСУ .....                            | 68        |
| 4.1. Дискретизація одновимірного простору .....                        | 68        |
| 4.1.1. Скінченні елементи лагранжевого типу .....                      | 68        |
| 4.1.2. Скінченні елементи ермітова типу .....                          | 73        |
| 4.1.3. Ізопараметричні елементи .....                                  | 75        |
| 4.2. Дискретизація двовимірного простору .....                         | 79        |
| 4.2.1. Трикутні елементи .....   | 79        |
| 4.2.2. Трикутні і чотирикутні ізопараметричні елементи .....           | 82        |
| 4.2.3. Двовимірні скінченні елементи ермітова типу .....               | 89        |
| 4.3. Дискретизація тривимірного простору .....                         | 90        |
| 4.3.1. Тетраедральні елементи .....                                    | 90        |
| 4.3.2. Гексадральні ізопараметричні елементи .....                     | 94        |
| 4.3.3. Просторові елементи ермітова типу .....                         | 96        |
| 4.4. Дискретизація часу .....  | 97        |
| 4.5. Питання до самоконтролю .....                                     | 100       |
| Розділ 5. ПЕРЕТВОРЕННЯ МОДЕЛЕЙ .....                                   | 101       |
| 5.1. Принцип симетрії .....  | 101       |
| 5.1.1. Загальні положення .....  | 103       |
| 5.1.2. Класифікація симетрії .....                                     | 105       |
| 5.1.3. Опис симетрій скінчених елементів .....                         | 112       |
| 5.2. Принцип суперпозиції .....  | 128       |
| 5.2.1. Загальні положення .....  | 128       |
| 5.2.2. Суперпозиція при симетричному розташуванні джерел .....         | 137       |
| 5.3. Принцип еквівалентності .....                                     | 139       |
| 5.4. Принцип взаємності .....  | 142       |
| 5.5. Питання до самоконтролю .....                                     | 144       |
| Розділ 6. ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННІХ ЕЛЕМЕНТНИХ МОДЕЛЕЙ .....             | 145       |
| 6.1. Аналіз напружено-деформованого стану .....                        | 145       |
| 6.1.1. Напружено-деформований стан тіла .....                          | 145       |
| 6.1.2. Зв'язок між напруженнями і деформаціями .....                   | 150       |
| 6.1.3. Чисельний метод розрахунку напружено-деформованого стану .....  | 153       |
| 6.2. Аналіз термічного і концентраційного стану .....                  | 160       |
| 6.2.1. Чисельні методи рішення прямих задач тепломасопереносу .....    | 160       |
| 6.2.2. Чисельні методи рішення зворотних задач тепломасопереносу ..... | 171       |
| 6.2.3. Чисельний метод визначення теплофізичних характеристик .....    | 178       |
| 6.3. Питання до самоконтролю .....                                     | 182       |



|  |            |
|--|------------|
| <b>ЧАСТИНА ІІІ. СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ.....</b>   | <b>183</b> |
| Розділ 7. ВІРТУАЛЬНІ МОДЕЛІ.....   | 183        |
| 7.1. Віртуальні об'єкти.....   | 183        |
| 7.1.1. Двовимірні віртуальні об'єкти.....  | 183        |
| 7.1.2. Багатовимірні віртуальні об'єкти.....   | 200        |
| 7.2. Застосування методу віртуального об'єкта.....   | 205        |
| 7.2.1. Розрахунок статично невизначених систем.....  | 209        |
| 7.2.2. Розрахунок оптимальних перетинів.....   | 217        |
| 7.2.3. Віртуальний скінченний елемент.....   | 221        |
| 7.2.4. Моделювання нагромадження ушкоджень.....  | 224        |
| 7.2.5. Розрахунок параметрів управління.....   | 241        |
| 7.3. Питання до самоконтролю.....  | 249        |
| Розділ 8. МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ГРАФІВ.....   | 251        |
| 8.1. Основні визначення.....   | 251        |
| 8.2. Матриці графів.....   | 252        |
| 8.3. Досяжність та зв'язність.....   | 255        |
| 8.4. Ейлерові та гамільтонові графи.....   | 256        |
| 8.5. Деревя та цикли.....  | 257        |
| 8.6. Ізоморфізм графів та проблеми аналітичних методів його виявлення.....                           | 258        |
| 8.7. Морфологічні моделі на основі ізоморфних структур.....  | 261        |
| 8.7.1. Експериментально-статистичний метод виявлення ізоморфізму графів.....                         | 261        |
| 8.7.2. Методи забезпечення ізоморфності структур.....  | 263        |
| 8.7.3. Приведення структури реального об'єкта до представлення у вигляді графа необхідної форми..... | 268        |
| 8.7.4. Еквівалентні перетворення моделі механічної конструкції.....                                  | 268        |
| 8.8. Морфологічні моделі надійності об'єктів із резервованою структурою.....                         | 279        |
| 8.8.1. Динаміка відновлених систем.....  | 279        |
| 8.8.2. Моделювання працездатності в міру внесення пошкоджень в структуру.....                        | 282        |
| 8.9. Питання до самоконтролю.....  | 297        |
| Розділ 9. МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ.....   | 300        |
| 9.1. Марковські процеси.....   | 300        |
| 9.1.1. Поняття випадкового процесу.....  | 300        |
| 9.1.2. Класифікація марковських випадкових процесів.....   | 301        |
| 9.1.3. Марковські процеси з дискретним часом.....  | 304        |
| Марковські ланцюги.....  | 304        |
| 9.1.4. Марковські процеси з неперервним часом (напівмарковські процеси).....                         | 312        |
| 9.2. Процеси загибелі та розмноження.....  | 315        |
| 9.3. Синергетичне поєднання можливостей марковських моделей.....                                     | 321        |
| 9.4. Немарковські моделі.....  | 325        |
| 9.5. Приховані марковські моделі.....  | 328        |
| 9.6. Питання до самоконтролю.....  | 333        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>ЧАСТИНА ІV. ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ МОДЕЛІ.....</b>                                      | <b>334</b> |
| Розділ 10. НЕЧІТКІ МОДЕЛІ.....   | 334        |
| 10.1. Основні поняття та визначення.....   | 334        |
| 10.1.1. Основні визначення.....  | 334        |
| 10.1.2. Основні характеристики нечітких множин.....                                | 338        |
| 10.1.3. Основні типи функції належності.....                                       | 342        |
| 10.1.4. Методи побудови функції належності нечітких множин.....                    | 352        |
| 10.2. Операції над нечіткими множинами.....  | 359        |
| 10.2.1. Рівність і домінування нечітких множин.....                                | 359        |
| 10.2.2. Унарні операції над нечіткими множинами.....                               | 360        |
| 10.2.3. Бинарні операції над нечіткими множинами.....                              | 361        |
| 10.2.4. Нечіткі оператори.....   | 367        |
| 10.3. Нечіткі відношення.....  | 369        |
| 10.3.1. Нечіткі відношення і способи їхнього завдання.....                         | 369        |
| 10.3.2. Основні характеристики нечітких відношень.....                             | 373        |
| 10.3.3. Операції над нечіткими відношеннями.....                                   | 375        |
| 10.3.4. Відображення нечітких множин.....  | 378        |
| 10.3.5. Властивості бінарних нечітких відношень, заданих на одному універсумі..... | 379        |
| 10.3.6. Нечіткі відношення переваги.....   | 383        |
| 10.4. Нечіткі величини, числа та інтервали.....                                    | 387        |
| 10.4.1. Основні визначення.....  | 387        |
| 10.4.2. Операції над нечіткими числами.....  | 388        |
| 10.5. Питання до самоконтролю.....   | 399        |
| Розділ 11. НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ.....  | 400        |
| 11.1. Основні поняття штучних нейронних мереж.....                                 | 400        |
| 11.1.1. Структура штучного нейрона.....  | 400        |
| 11.1.2. Функція активації.....   | 401        |
| 11.2. Моделі штучних нейронів.....   | 407        |
| 11.2.1. Формальна модель нейрона Маккаллоха – Пінтса.....                          | 407        |
| 11.2.2. Модель нейрона Фукушіми.....   | 409        |
| 11.2.3. Модель штучного нейрона Гопфілда.....                                      | 410        |
| 11.2.4. Модель Гроссберга.....   | 411        |
| 11.2.5. Узагальнена модель нейрона.....  | 413        |
| 11.2.6. $\Sigma$ - $\Pi$ -нейрон.....  | 414        |
| 11.2.7. Стохастичний нейрон.....   | 414        |
| 11.3. Топологія ШНМ.....   | 415        |
| 11.3.1. ШНМ прямого поширення.....   | 417        |
| 11.3.2. ШНМ зворотного поширення.....  | 417        |
| 11.3.3. Повнозв'язні ШНМ.....  | 419        |
| 11.4. Навчання ШНМ.....  | 419        |
| 11.4.1. Правило навчання Гебба.....  | 421        |
| 11.4.2. Дельта-правило.....  | 423        |
| 11.4.3. Розширене дельта-правило.....  | 424        |



|  |     |
|--|-----|
| 11.4.4. Конкуренційне навчання                           | 424 |
| 11.4.5. Стохастичне навчання                             | 424 |
| 11.4.6. Градієнтні методи навчання                       | 425 |
| 11.4.7. Навчання з підкріпленням                         | 431 |
| 11.5. Повторне навчання                                  | 432 |
| 11.5.1. Вплив повторного навчання на відмовостійкість НМ | 432 |
| 11.5.2. Механічний аналог повторного навчання ШНМ        | 437 |
| 11.6. Питання до самоконтролю                            | 441 |
| Розділ 12. ЕВОЛЮЦІЙНІ МОДЕЛІ                             | 442 |
| 12.1. Метод класичного генетичного алгоритму             | 442 |
| 12.1.1. Переваги генетичних алгоритмів                   | 444 |
| 12.1.2. Термінологія                                     | 444 |
| 12.1.3. Принципи побудови генетичних алгоритмів          | 444 |
| 12.1.4. Визначення фенотипу об'єкта за його генотипом    | 445 |
| 12.1.5. Кодування «ознака – ген»                         | 445 |
| 12.1.6. Декодування «ген – ознака»                       | 448 |
| 12.2. Стратегія ГА та основні генетичні оператори        | 448 |
| 12.2.1. Схема функціонування класичного ГА               | 451 |
| 12.2.2. Стратегії пошуку                                 | 452 |
| 12.2.3. Відмінність від класичного пошуку                | 454 |
| 12.3. Приклади генетичної оптимізації                    | 454 |
| 12.4. Багатозалежна оптимізація                          | 461 |
| 12.4.1. Компромісні розв'язки                            | 462 |
| 12.4.2. Основні поняття та визначення                    | 463 |
| 12.4.3. Узагальнена цільова функція                      | 464 |
| 12.4.4. Визначення коефіцієнтів ваги параметрів          | 465 |
| 12.4.5. Безпосереднє призначення коефіцієнтів ваги       | 465 |
| 12.4.6. Оцінка важливості параметрів у балах             | 466 |
| 12.4.7. Принципи рівномірності                           | 467 |
| 12.4.8. Принцип послідовної «поступки»                   | 468 |
| 12.4.9. Використання множників Лагранжа                  | 468 |
| 12.5. Метод комплексного генетичного алгоритму           | 473 |
| 12.5.1. Перетворення фенотипу в генотип                  | 474 |
| 12.5.2. Схрещування                                      | 476 |
| 12.5.3. Розрахунки пристосованості та вибір              | 479 |
| 12.5.4. Критерій зупинки                                 | 479 |
| 12.5.5. Загальний алгоритм методу КГА                    | 479 |
| 12.6. Питання до самоконтролю                            | 481 |
| ЗАКЛЮЧЕННЯ   | 482 |
| ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ                        | 483 |
| АЛФАВІТНИЙ ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК                           | 491 |

Усов А.В., Савельєва О.С., Становська І.І., Пернері А.О.  
**Математичні методи моделювання** Підручник / За ред. Становського  
 О.Л. – Одеса: ПАЛЬМІРА, 2011. – 500 с.

ISBN 978-966-8945-61-8

У підручнику розглянуті методи та засоби математичного моделювання об'єктів машинобудування (конструкцій, технологічних процесів, тощо). Наведені основні засади побудови та експлуатації аналітичних, скінченноелементних, структурних та інтелектуальних математичних моделей.

Розраховано на студентів і аспірантів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за машинобудівними спеціальностями.

ББК В22  
 УДК 51-74:004.942



*Навчальне видання*

**УСОВ** Анатолій Васильович  
**САВСЬКА** Оксана Степанівна  
**СТАНОВСЬКА** Іраїда Іванівна  
**ПЕРПЕРІ** Алла Олександрівна

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

*Підручник*

*Науковий редактор - О. Л. Становський*

Здано до виробництва 05.08.2011. Підписано до друку 20.09.2011  
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс.  
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 29,06. Наклад 500 прим. Зам. № 56

Видавництво «Пальміра»  
65111, Одеса, просп. Добровольського, 118/178, тел. (048) 700-97-34  
e-mail palmira 2005@ukr.net

Свідчення про внесення суб'єкта видавничої справи до державного  
реєстра видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої  
продукції. Серія ДК № 2049.

Надруковано у друкарні «Апрель»  
СПД Бондаренко М.О.

м. Одеса, вул. Велика Арнаутська, 60  
т. 0482-33-79-76