УДК 513.88:517.948.3

Г. С. Полетаев, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами и его абстрактный аналог

Рассмотрено интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами, порождаемыми функциями из различных банаховых алгебр, и линейное уравнение с двумя коэффициентами в абстрактных кольцах с факторизационными парами подколец. Установлены теоремы и формулы, характеризующие общую связь проблемы их разрешимости с факторизуемостью элементов, строящихся по ядрам, коэффициентам.

Розглянуто інтегральне рівняння типу згортки з двома ядрами, які породжені функціями з різних банахових алгебр, та лінійне рівняння з двома коефіцієнтами в абстрактних кільцях з факторизаційними парами підкілець. Встановлені теореми та формули, що характеризують загальний зв'язок проблеми їх розв'язності з факторизовністю елементів, що будуються за ядрами, коефіцієнтами.

Известно [1—4], что ряд проблем математической физики, в частности задача о вдавливании полубесконечного штампа в упругое полупространство, некоторые задачи дифракции и береговой рефракции волн приводят к интегральным уравнениям с ядрами, зависящими от разности аргументов. Уравнение, имеющее при надлежащем выборе обозначений вид

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\psi(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\psi(s)\,ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

возникает, например, при изучении хода плотности моноэнергетических нейтронов в двух полупространствах, разделенных плоской границей [2, 4]. В виде (1) можно также записать уравнения (1)—(3), приведенные в работе [5].

Будем рассматривать уравнение (1) относительно неизвестной функции $\psi(t)$ и порождаемый этим уравнением оператор, считая, что при некоторой постоянной $c > 0$ $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)\ (\equiv L)$, а также абстрактное линейное уравнение относительно неизвестных x^+, x_- в кольце с соответствующей парой подколец:

$$a_1x^+ + a_2x_- = b, \tag{2}$$

охватывающее много постановок для уравнений вида (1) и их систем, их дискретных аналогов [2], задачи типа Римана — Гильберта, задач и уравнений для матриц и др.

Отметим, что при введенных ниже обозначениях интегральное уравнение (1) допускает запись в виде

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} [k_1(s-t)\psi_-(s) + k_2(s-t)\psi_+(s)]\,ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{3}$$

или в более «общем»

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} [k_1(s-t)\psi^-(s) + k_2(s-t)\psi_+(s)]\,ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{4}$$

Здесь в (3) $\psi(t) = \psi_-(t) + \psi_+(t)$, а в (4) $\psi(t) = \psi^-(t) + \psi_+(t)$.

1. Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами. Так называется [6—10] уравнение, получающееся из (1) при замене $k_j(t)$ на $k_j(-t)$, $j = 1,2$. Это название сохраним и для (1). Операторная трактовка интегрального уравнения (1) как транспонированного к соответствующему парному интегральному уравнению с ядрами, зависящими от разности аргументов [2, 6—13], впервые появилась, по-видимому, в работе И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2]. Левые части (1) и указан-

ного парного уравнений определяют, как оказывается при этом, взаимно сопряженные операторы в соответствующих пространствах. В этой же работе содержится история вопроса до 1958 г. и наиболее полная теория указанных уравнений с ядрами $k_1(t), k_2(t) \in L_1(-\infty, \infty)$.

В постановке, близкой к рассматриваемой ниже, уравнения типа (1) изучали Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский [7—10] при дополнительных ограничениях типа требования гельдеровости функций. В цитированных работах исходные уравнения предварительно трансформировались по Фурье. В [6] изучались исключительные случаи и уравнения первого рода. В работе [11] имеются доказательства и формулировки результатов, приводимых нами для уравнения (1), для «более общего» уравнения (4). Доказательства, как и для парных уравнений из [12], проводятся без преобразований исходных уравнений по Фурье. Значительная часть результатов, впрочем, может быть получена как следствие из соответствующих теорем для уравнения (2), рассматриваемого в п. 2.

1.1. Обозначения и вспомогательные факты. 1. Для любой функции $k(t)$ положим [12] $k_{\mp}(t) := k(t)$ $(\mp t \geqslant 0)$, $k_{\mp} := 0$ $(\mp t < 0)$. Символом $L_{\langle c \rangle}$ обозначим банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций $k(t)$, $-\infty < t < \infty$ таких, что $k(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, где c — вещественное число.

Роль умножения в $L_{\langle c \rangle}$ играет свертка, обозначаемая символом $*$. Норма в $L_{\langle c \rangle}$ вводится по формуле $\|k\|_{L_{\langle c \rangle}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(t)| e^{ct} dt$, $k \in L_{\langle c \rangle}$. Символом $L_{a \cap b}$ обозначим пересечение алгебр $L_{\langle a \rangle}$ и $L_{\langle b \rangle}$ $(a, b \subset \mathbb{R}_1)$ [12]. Под $L^{\mp}$, $L^{\mp}_{\langle c \rangle}$, $L^{\mp}_{a \cap b}$ будем понимать подалгебры функций из L, $L_{\langle c \rangle}$, $L_{a \cap b}$ соответственно, которые обращаются в нуль при $\pm t > 0$. Пусть $\delta (= \delta(t))$ — формальный элемент такой, что $\delta * \delta := \delta$, $\delta(t) := \delta(-t)$ и $\delta(t) * k(t) = k(t) * \delta(t) := k(t)$ $(k \in L^{+}_{\langle -|c| \rangle} \oplus L^{-}_{\langle |c| \rangle})$, а A — любая из введенных выше алгебр; $\delta \,\bar{\in}\, A$. Символом $\tilde{A}$ обозначим алгебру, полученную формальным присоединением к A элемента δ, играющего в $\tilde{A}$ роль присоединенной мультипликативной единицы [13]. Операции сложения и умножения распространяются из A на $\tilde{A}$ естественным образом, а норма вводится по формуле

$$\|\alpha\delta(t) + k(t)\|_{\tilde{A}} = |\alpha| + \|k\|_A, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad k \in A.$$

Элементы вида $g = \alpha\delta + k_{\pm}(t)$, $k_{\pm}(t) \in A$ часто обозначаются через $g^{\pm}$, что подчеркивает их принадлежность алгебрам $\tilde{A}^{\pm}$.

Символами $L_{a \cup b}$, $\tilde{L}_{a \cup b}$, (a, b — вещественные числа) обозначим соответственно суммы пространств $L_{\langle a \rangle}$ и $L_{\langle b \rangle}$; $\tilde{L}_{\langle a \rangle}$ и $\tilde{L}_{\langle b \rangle}$. Банахова алгебра $L_{\langle c \rangle}$ не имеет радикала и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций [12]. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями.

Обратный для обратимого в $\tilde{A}$ элемента $g \in \tilde{A}$, будем обозначать g'. Может случиться так, что элемент $g \in \tilde{A}$, обратимый в $\tilde{A}$ или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда, чтобы уточнить, какой именно обратный для g рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этот обратный. Например, для элемента $g^{+} \in \tilde{L}^{+}_{0 \cap c}$ символ $[g^{+}]'_{0 \cap c}$ обозначает обратный для него элемент, принадлежащий $\tilde{L}_{0 \cap c}$, а символ $[g^{+}]'_{c+}$ — обратный элемент, принадлежащий $\tilde{L}^{+}_{\langle c \rangle}$.

2. Если $k(t)$ — некоторая функция из $L_{0 \cap c}$, то соответствующей прописной буквой $K(\zeta)$ будем обозначать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\zeta t} dt$, рассматриваемый при тех ζ, для которых он существует.

Из общих результатов о банаховых алгебрах интегрируемых функций с весом следуют утверждения, дающие условия обратимости элементов из $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ [12].

Вариант теоремы Н. Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. *Для обратимости в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ элемента* $\alpha\delta + k\,(\alpha\in\mathbb{C},\ k\in L_{\langle c\rangle})$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\alpha[\alpha + K(\zeta)] \neq 0 \quad (\mathrm{Im}\,\zeta = -c;\ -\infty < \mathrm{Re}\,\xi < \infty)$.

Вариант теоремы Н. Винера в $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. *Для обратимости в* $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$ *элемента* $\alpha\delta + k^{\mp}\,(\alpha\in\mathbb{C},\ k^{\mp}\in L^{\mp}_{\langle c\rangle})$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\alpha[\alpha + K^{\mp}(\zeta)] \neq 0 \ (\mp\,\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant \pm c;\ -\infty < \mathrm{Re}\,\zeta < \infty).$$

1.2. Факторизация в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. 1. Пусть $g = \alpha\delta + k\ (\alpha\in\mathbb{C},\ k\in L_{a\cap b})$ такова, что при некотором $c\in[a, b]$ выполняется условие $\alpha[\alpha + K(\lambda - ic)] \neq 0,\ -\infty < \lambda < \infty$.

Определение 1. *Индексом* g, *как элемента* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ (*кратко* $\varkappa[g, c]$ *либо* $\mathrm{ind}\,[g]_c$) *назовем число, равное индексу функции* $\alpha + K(\lambda - ic)$ *переменной* λ *вдоль сомкнутой, вещественной оси, получающейся из* $[-\infty, \infty]$ *отождествлением концов* [1, 2, 10—12, 14, 15].

2. Определение 2. *Под факторизацией функции* $g = \delta - k$, $k\in L_{\langle c\rangle}$, *в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *будем понимать представление ее в виде*

$$g = [\delta + \gamma_{+}] * [\delta + \gamma_{-}] \quad (\gamma_{\mp}\in L^{\mp}_{\langle c\rangle}). \tag{5}$$

Эту факторизацию назовем «правильной в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$», если хотя бы один из $\mp$-факторов $\delta + \gamma_{\mp}$ обратим в своей подалгебре $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Если оба фактора таковы, то (5) называется «канонической в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$» факторизацией. Из соответствующих факторизационных теорем М. Г. Крейна [1], установленных для функций вида

$$1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\lambda t} dt; \qquad -\infty < \lambda < \infty, \quad k\in L,$$

непосредственно следуют такие теоремы о факторизации в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ [12].

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $g = \delta - k$ *допускала каноническую в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизацию* (5), *необходимо и достаточно, чтобы* $1 - K(\zeta) \neq 0$ $(\mathrm{Im}\,\zeta = -c)$; $\varkappa[g, c] = 0$. *Если* g *допускает каноническую в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизацию* (5), *то последняя является для нее единственной правильной в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизацией.*

Теорема 2. *Пусть для* $g = \delta - k$, $k\in L_{\langle c\rangle}$, *выполнены условия* $1 - K(\zeta) \neq 0$ $(\mathrm{Im}\,\zeta = -c)$, $\varkappa[g, c] \neq 0$. *Если* $\varkappa[g, c] > 0$ $(\varkappa[g, c] < 0)$, *то, как бы ни были выбраны различные точки* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ $(m \leqslant |\varkappa[g, c]|)$ *внутри полуплоскости* $\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant -c$ $(\leqslant -c)$ *и натуральные числа* $p_1, \dots, p_m$ *такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = |\varkappa[g, c]|$, *всегда будет существовать единственная правильная в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизация* (5), *при которой функция* $1 + \Gamma_{+}(\zeta)$ (*функция* $1 + \Gamma_{-}(\zeta)$) *будет иметь внутри полуплоскости* $\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant -c$ $(\mathrm{Im}\,\zeta \leqslant -c)$ *своими нулями кратностей* $p_1, \dots, p_m$ *соответственно точки* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *и никаких других нулей иметь не будет. Указанными факторизациями исчерпываются все правильные в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизации функции* g.

1.3. Разрешимость уравнений. 1. Предполагая, что $k_1\in L$, $k_2\in L_{\langle c\rangle}$, $f\in L_{0\cup -c}$, $c > 0$ и выполнено условие

$$[1 - K_1(\lambda)]\,[1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{6}$$

будем искать решения уравнения (1) в $L_{0\cup -c}$.

Введенные обозначения позволяют записать уравнение (1) в виде

$$[\delta - k_1(-t)] * \psi_-(t) + [\delta - k_2(-t)] * \psi_+(t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Заметим, что всякое решение $\psi(t) \in L_{0 \cup -c}$ уравнения (1) порождает в $L_{0 \cup c}$ решение $\sigma(t) := \psi(-t)$ интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами:

$$\sigma(t) - \int_0^\infty k_1(t-s)\sigma(s)\,ds - \int_{-\infty}^0 k_2(t-s)\sigma(s)\,ds = g(t),$$

$$-\infty < t < \infty; \qquad g(t) = f(-t)$$

и наоборот. Последнее уравнение с неизвестной $\sigma(t)$ записывается в виде

$$[\delta(t) - k_1(t)] * \sigma_+(t) + [\delta(t) - k_2(t)] * \sigma_-(t) = g(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{7}$$

С помощью варианта теоремы Н. Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ при условии (6) устанавливаем существование обратных в соответствующих банаховых алгебрах элементов для $\delta - k_j$, $j = 1, 2$, и их представления в виде:

$$[\delta - k_1]' = \delta + k_1^1, \quad k_1^1 \in L, \tag{8}$$

$$[\delta - k_2]' = \delta + k_2^1, \quad k_2^1 \in L_{\langle c\rangle}. \tag{9}$$

Обозначим через $\varkappa_1$ индекс $\delta - k_1$, как элемента $\tilde{L}$, а через $\varkappa_2$ индекс $\delta - k_2$, как элемента $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$:

$$\varkappa_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg[1 - K_1(\lambda)],$$

$$\varkappa_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg[1 - K_2(\lambda - ic)]$$

и рассмотрим возможные случаи. Число

$$\varkappa^{\mp} := \varkappa_2 - \varkappa_1, \tag{10}$$

будем называть индексом каждого из уравнений (1), (4) и соответствующих им однородных уравнений. Не уменьшая общности [11], при сделанных допущениях считаем один из индексов, например, $\varkappa_2$ равным нулю:

$$\varkappa_2 = 0. \tag{11}$$

2. Если при условии (11) индекс уравнения (1) равен нулю, то в силу (10) $\varkappa_1 = 0$, а в силу теоремы 1 существуют канонические в соответствующих алгебрах факторизации обратных (8), (9):

$$\delta + k_1^1 = [\delta + \gamma_{1+}] * [\delta + \gamma_{1-}], \quad \gamma_{1\mp} \in L^{\mp}, \tag{12}$$

$$\delta + k_2^1 = [\delta + \gamma_{2+}] * [\delta + \gamma_{2-}], \quad \gamma_{2\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}. \tag{13}$$

Из множителей факторизаций (12), (13) образуем функции

$$\begin{gathered} \delta + x := [\delta + \gamma_{1-}] * [\delta + \gamma_{2+}], \\ \delta + \omega_+ := [\delta + \gamma_{1+}] * [\delta + \gamma_{2+}]', \quad \delta + \omega_- := [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{1-}]'. \end{gathered} \tag{14}$$

Если же при условии (11) индекс уравнения отличен от нуля, то в силу (10) $\varkappa_1 \neq 0$ и согласно теореме 2 существует бесконечно много правильных в $\tilde{L}$ факторизаций (12). Если $\varkappa^{\mp} > 0$, при любой из них правые части формул (14) сохраняют смысл.

3. Установлены такие утверждения.

Т е о р е м а 3. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняются условия* (6), (11), *а индекс уравнения равен нулю. Тогда при любой* *правой части $f \in L_{0\cup -c}$ уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение $\psi \in L_{0\cup -c}$. Оно может быть определено по формуле*

$$\psi(t) = ([\delta + \omega_+] * \{[\delta + x] * g\}_+ + [\delta + \omega_-] * \{[\delta + x] * g\}_-)(-t), \qquad (15)$$

где $g(t) := f(-t)$, а функции x, $\omega_\mp$ определяются формулами (14) *через множители канонических факторизаций* (12), (13).

Дополнительные исследования, в частности, формулы (15), показывают, что при выполнении условий теоремы 3 решение $\psi \in L_{0\cup -c}$ уравнения (1) с произвольной правой частью $f \in L_{0\cup -c}$ допускает представление

$$\psi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi^\tau(t, s) f(s)\, ds,$$

где

$$\gamma_\pi^\tau(t, s) = \gamma_\pi(s, t) = x(s - t) + \eta(-s)\,\omega_+(s - t) + \eta(s)\,\omega_-(s - t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} x(s - r)\,\omega_+(r - t)\, dr + \int_{0}^{\infty} x(s - r)\,\omega_-(r - t)\, dr, \quad -\infty < t,\ s < \infty;$$

$\eta(t) := 1$ при $t \geqslant 0$, $\eta(t) := 0$ при $t < 0$, а $\gamma_\pi(t, s)$ — резольвентное ядро [12] соответствующего (1) парного интегрального уравнения [2, 12]

$$\begin{aligned} &\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t - s)\,\varphi(s)\, ds = f(t), \quad -\infty < t < 0, \\ &\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t - s)\,\varphi(s)\, ds = f(t), \quad 0 < t < \infty. \end{aligned} \qquad (16)$$

Из теоремы 3 следует, что при выполнении условий этой теоремы и $\varkappa^\tau = 0$ однородное, соответствующее (1), уравнение имеет в пространстве $L_{0\cup -c}$ единственное нулевое решение. В рассматриваемых случаях, как и в случаях, изученных в [2], условие $\varkappa^\tau = 0$ выполняется, например, если $k_1(t)$, $k_2(t)$ — четные функции либо эрмитовы т. е. $k_j(-t) = \overline{k_j(t)}$, $j = 1, 2$.

4. Теорема 4. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t) \exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняются условия* (6), (11), *а индекс уравнения* (1) *положительный. Тогда, как бы ни была выбрана правильная в $\widetilde{L}$ факторизация* (12), *при любой правой части $f \in L_{0\cup -c}$ функция, определяемая формулой* (15), *принадлежит $L_{0\cup -c}$ и является одним из решений уравнения* (1) *в $L_{0\cup -c}$.*

Однородное соответствующее (1) уравнение изучается на основании связи с однородным уравнением Винера—Хопфа с ядром из $L_1(-\infty, \infty)$ [1]:

$$\theta(t) - \int_{0}^{\infty} v(t - s)\,\theta(s)\, ds = 0, \quad 0 < t < \infty, \qquad (17)$$

где $v(t) = k_1(t) - \gamma_{2+}(t) + k_1(t) * \gamma_{2+}(t)$.

Теорема 5. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t) \exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняются условия* (6), (11). *Тогда для нетривиальной разрешимости в $L_{0\cup -c}$ однородного соответствующего* (1) *уравнения необходимо и достаточно, чтобы индекс уравнения был положительный. При выполнении этого условия множество $Z(\psi)$ решений $\psi \in L_{0\cup -c}$ однородного уравнения* (1) *$|\varkappa_1|$-мерно и имеет базис $\{\psi_i\}^{|\varkappa_1|}$, который может быть получен из D-базиса М. Г. Крейна $\{\theta_{i+}\}_1^{|\varkappa_1|}$ решений $\theta_{i+} \in L^+$, $i = 1, \ldots, |\varkappa_1|$, уравнения* (17), *состоящего из функций, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, по формуле*:*

$$\psi_i(t) = (\theta_{i+} - [\delta + \gamma_{2-}] * \{\theta_{i+} * [\delta - v]\}_-)(-t), \quad -\infty < t < \infty,$$

$$i = 1, \ldots, |\varkappa_1|.$$

---

* О D-базисе см., например, [1, с. 51, 52], а также [2, 14].

Если при условиях теоремы 5 индекс уравнения (1) положительный, то $\varkappa_1 < 0$ и функция $1+\Gamma_{1+}(\zeta)$ $\left(\Gamma_{1+}(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_{1+}(t) e^{i\zeta t} dt\right)$, определяемая правильной факторизацией (12), имеет внутри полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ точно $|\varkappa_1| = \varkappa^\tau$ нулей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ с учетом их кратностей. Согласно теореме 2 эти нули α_k $(\operatorname{Im}\alpha_k > 0)$ и их кратности могут быть, соответственно, наперед заданы, а подстановкой в (1) можно убедиться в справедливости такой формулы для решений соответствующего ему однородного уравнения:

$$\psi_{\alpha_k}(t) = \{[e^{i\alpha_k t}]_+ * [\delta + \omega_-(-t)]\}_+ - \{[e^{i\alpha_k t}]_+ * [\delta + \omega_+(-t)]\}_- . \quad (18)$$

При сделанных предположениях формулу (18) можно преобразовать к виду

$$\psi_{\alpha_k}(t) = [e^{i\alpha_k t}]_+ * [\omega_-(-t) - \omega_+(-t)].$$

Полагая $\alpha_k = ik$; $k = 1, \ldots, \varkappa^\tau$, можно получить базис решений $\{\psi_k\}_1^{|\varkappa_1|}$ соответствующего (1) однородного уравнения в $L_{0\cup -c}$, минуя связь с уравнением (17):

$$\psi_k(t) = [e^{-kt}]_+ * [\omega_-(-t) - \omega_+(-t)]; \qquad k = 1, \ldots, \varkappa^\tau, \quad \varkappa^\tau > 0. \quad (19)$$

В рассматриваемом случае $\varkappa^\tau > 0$ формулу общего решения $\psi(t)$ уравнения (1) получаем в виде $\psi_0(t) = \psi(t) + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa^\tau} c_k \psi_k(t)$, где c_k — произвольные постоянные, а $\psi(t)$, $\psi_k(t)$ определяются формулами (15), (19).

5. Из теоремы 5 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняются условия* (6), (11), *а индекс уравнения* (1) *отрицательный. Тогда соответствующее* (1) *однородное уравнение не имеет в $L_{0\cup -c}$ решений, отличных от нулевого.*

При изучении неоднородного уравнения (1) с отрицательным индексом вместе с каждой фиксированной правильной в $\bar{L}$ факторизацией (12) и функцией $f \in L_{0\cup -c}$ будем далее рассматривать элемент $h_-^f \in L_{(c)}^-$, $h_-^f(t) := \{[\delta + x] * g\}_-(t)$ $(g(t) := f(-t))$ и соответствующую функцию

$$H_-^f(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{0} h_-^f(t) e^{i\zeta t} dt \quad (\operatorname{Im}\zeta \leqslant -c).$$

Теорема 7. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняются условия* (6), (11), *а индекс $\varkappa^\tau$ уравнения* (1) *отрицательный. Тогда для разрешимости в $L_{0\cup -c}$ неоднородного уравнения* (1) *с правой частью $f \in L_{0\cup -c}$ необходимо, чтобы при любой правильной в $\bar{L}$ факторизации* (12), *а достаточно — при какой-нибудь одной правильной в $\bar{L}$ факторизации* (12), *обладающей свойством*

$$1 + \Gamma_{1-}(\zeta) \neq 0 \quad \Big(\operatorname{Im}\xi \in [0, -c],$$

$$-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty; \qquad \Gamma_{1-}(\zeta) := \int\limits_{-\infty}^{0} \gamma_{1-}(t) e^{i\zeta t} dt\Big),$$

выполнялись $|\varkappa^\tau|$ дополнительных условий: если $1 + \Gamma_{1-}(\beta_k) = 0$ $(\operatorname{Im}\beta_k < -c)$, то $H_-^f(\beta_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, |\varkappa^\tau|)$. При этом каждый нуль β_k $(\operatorname{Im}\beta_k < -c)$ функции $1 + \Gamma_{1-}(\zeta)$ считается столько раз, какова его кратность.

Если уравнение (1) имеет при некотором $f \in L_{0\cup -c}$ решение $\psi \in L_{0\cup -c}$, то это решение единственное в $L_{0\cup -c}$ и может быть определено по формуле

$$\psi(t) = ([\delta + \omega_+] * \{[\delta + x] * g\}_+ + [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{1-}]'_{0\cap c} * h_-^f)(-t), \quad (20)$$

где $g(t) = f(-t)$, а функции $\delta + \omega_{+}$, $\delta + x$, $\delta + \gamma_{2-}$, $\delta + \gamma_{1-}$, h_{-}^{t} определены выше.

6. Из теорем 3 — 7 с учетом того, что условие $\varkappa_2 = 0$ введено без ограничения общности, вытекает следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ и выполняется условие* (6). *Тогда для того чтобы уравнение* (1) *при любом $f \in L_{0\cup -c}$ имело одно и только одно решение $\psi \in L_{0\cup -c}$, необходимо и достаточно, чтобы индекс уравнения был равен нулю: $\varkappa^{\tau} = 0$.*

7. Введем теперь проекторы $p^{\mp}$, p^{0}, $p_{\mp}: \tilde{L}_{-c\cup c} \to \tilde{L}^{\mp}_{\langle \pm |c| \rangle}$, действующие по формулам

$$p^{\mp}(\alpha\delta + k) = \alpha\delta + k_{\mp}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad k \in L_{-c\cup c},$$
$$p^{0} = p^{+}p^{-} (= p^{-}p^{+}), \quad p_{\mp} = p^{\mp} - p^{0}.$$

Ради краткости будем полагать $(\alpha\delta + k)^{\mp,0} = p^{\mp,0}(\alpha\delta + k)$, $(\alpha\delta + k)_{\mp} = p_{\mp}(\alpha\delta + k) = k_{\mp}$, что согласуется с ранее принятыми обозначениями.

Обратимся к уравнению (4). В нем k_1, k_2, f, ψ имеют прежний смысл, указанный для уравнения (1), однако допускаются к рассмотрению известные правые части f вида $f(t) = \alpha\delta(t) + h(t)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$; $h \in L_{0\cup -c}$. Иначе говоря, предполагается, что $f \in \tilde{L}_{0\cup -c}$. Решения $\psi = \psi^{-} + \psi_{+}$ будем искать в $\tilde{L}_{0\cup -c}$. Таким образом, ψ^{-} и ψ_{+} — части неизвестной функции, которая может иметь вид $\psi(t) = \beta\delta(t) + \theta(t)$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\theta \in L_{0\cup -c}$. Остальные предположения такие же, как при изучении уравнения (1).

Оказывается, что при такой постановке для уравнений вида (4) верны теоремы 3 — 7 с соответствующей заменой $L_{0\cup -c}$ на $\tilde{L}_{0\cup -c}$ и формул (15), (20) соответственно формулами

$$\begin{gathered}\psi(t) = ([\delta + \omega_{+}] * \{[\delta + x] * g\}^{+} + [\delta + \omega_{-}] * \{[\delta + x] * g\}_{-})(-t),\\ \psi(t) = ([\delta + \omega_{+}] * \{[\delta + x] * g\}^{+} + [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{1-}]^{\tau}_{0\cap c} * h_{-}^{t})(-t).\end{gathered} \tag{21}$$

Приведенные теоремы и формулы для уравнения (4) охватывают и соответствующие для уравнения (1). Для уравнения (4) они доказаны в [11]. Условие $f \in \tilde{L}_{0\cup -c}$ является необходимым условием разрешимости уравнения (4) в $\tilde{L}_{0\cup -c}$. Если при этом $f \in L_{0\cup -c}$, то при разрешимости уравнения (4) в $\tilde{L}_{0\cup -c}$ также $\psi \in L_{0\cup -c}$.

Отметим, что из формулы (21), применимой при $\varkappa^{\tau} \geqslant 0$, вытекает такая формула для одного (при $\varkappa^{\tau} = 0$ единственного) из решений $\psi_{\delta} \in \tilde{L}_{0\cup -c}$ уравнения (4) с правой частью равной $\delta(t)$ (по существу соответствующим образом введенной $\delta(t)$-функции Дирака):

$$\psi_{\delta}(t) = [\delta + x + \omega_{+} + \omega_{+} * x_{+} + \omega_{-} * x_{-}](-t).$$

Выясняется смысл функции $\delta + x$. Оказывается, что при сделанных предположениях и $\varkappa^{\tau} \geqslant 0$, $\varkappa_2 = 0$, эта функция представляет собой одно (единственное при $\varkappa^{\tau} = 0$) из решений в $\tilde{L}_{0\cap c}$ уравнения (16) с правой частью $\delta(t)$.

1.4. Нетеровость оператора $I - K^{\tau}_{л}$. Формулу ввода нормы в $L_{0\cup -c}$, $c > 0$ [11], можно представить в виде

$$\| k(t) \|_{L_{0\cup -c}} := \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| \rho(t)\, dt, \quad k \in L_{0\cup -c}; \quad \rho(t) := \min(1, e^{-ct}).$$

Это пространство можно представлять как банахово пространство всех комплекснозначных измеримых функций, для которых принимаемый за норму в $L_{0\cup -c}$ интеграл справа в последней формуле конечен. Определяемый левой частью уравнения (1) оператор $I - K^{\tau}_{л}: L_{0\cup -c} \to L_{0\cup -c}$, действующий по формуле

$$(I - K_\pi^\tau)\psi = \psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\psi(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\psi(s)\,ds,$$

$\psi \in L_{0\cup -c}$, оказывается при этом линейным ограниченным оператором, определенным во всем пространстве и, следовательно, замкнутым. Для нормы оператора K_π^τ в $L_{0\cup -c}$ справедлива оценка

$$\| K_\pi^\tau \|_{L_{0\cup -c}} \leqslant \| k_1 \|_L + \| k_2 \|_{L_{\langle c\rangle}}.$$

Для действующего в $L_{0\cup -c}$ оператора $I - K_\pi^\tau$ сопряженным является действующий в сопряженном пространстве $L_{0\cup -c}^*$ оператор $I - K_\pi$, определяемый в нем левой частью уравнения (16). Дополнительный анализ, учитывающий, в частности, теоремы 3—7 и теорему 2.1 из работы [16], связывающую корректную и нормальную разрешимость, позволяет прийти к заключению о том, что оператор $I - K_\pi^\tau : L_{0\cup -c} \to L_{0\cup -c}$ является нормально разрешимым, т. е. его область значений замкнута.

Действительно, при условии (11) и $\varkappa^\tau \geqslant 0$ область значений этого оператора совпадает со всем пространством $L_{0\cup -c}$. При $\varkappa^\tau < 0$ с помощью формулы (20) получаем оценку

$$\| \psi \|_{L_{0\cup -c}} \leqslant m^\tau \| (I - K_\pi^\tau)\psi \|_{L_{0\cup -c}}, \quad \psi \in L_{0\cup -c},$$

с вычисляемой постоянной $m^\tau > 0$, независящей от $\psi \in L_{0\cup -c}$ $(= D(I - K_\pi^\tau))$, показывающую корректную разрешимость уравнения (1), а с нею и его нормальную разрешимость [16]. Нетеровость оператора $I - K_\pi^\tau$ в $L_{0\cup -c}$ означает, что он нормально разрешим (что равносильно нормальной разрешимости уравнения (1) в $L_{0\cup -c}$) и его дефектные числа конечны. Нормальная разрешимость оператора $I - K_\pi^\tau$ имеет место в силу изложенного выше. Для установления конечности дефектных чисел доказывается, что решения однородного уравнения (16) в $L_{0\cap c}$, конечность числа которых показана в [12], совпадают с его решениями в $L_{0\cup -c}^*$, а решения в $L_{0\cup -c}$ однородного уравнения (1), конечность числа которых следует из теорем 3, 5, 6, —с его решениями в сопряженном к $L_{0\cap c}$ пространстве.

Следуя указанному пути и учитывая, что условие (11) не ограничивает общности, получаем такую теорему.

Теорема 9. *Пусть* $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c > 0$ *и выполняется условие* (6). *Тогда действующий в банаховом пространстве* $L_{0\cup -c}$ *линейный ограниченный оператор* $I - K_\pi^\tau$ *является нетеровым и имеет d-характеристику* (α, β) [1]:

$$\alpha = \frac{|\varkappa^\tau| + \varkappa^\tau}{2}, \qquad \beta = \frac{|\varkappa^\tau| - \varkappa^\tau}{2}.$$

Индекс $\varkappa_{I - K_\pi^\tau}$ *оператора* $I - K_\pi^\tau$ *в* $L_{0\cup -c}$, *вычисляемый по формуле,* $\varkappa_{I - K_\pi^\tau} = \alpha - \beta$, *где* $\alpha := \dim \operatorname{Ker}(I - K_\pi^\tau)$ *в* $L_{0\cup -c}$, $\beta := \dim \operatorname{Coker}(I - K_\pi^\tau)$ *в* $L_{0\cup -c}^*$, *совпадает с индексом уравнения* (1).

Из указанных формул и теорем очевидно, что в рассматриваемых случаях одно из дефектных чисел α, β всегда равно нулю. Укажем еще, что аналогичным путем установлена и нетеровость оператора $I - K_\pi$, определяемого левой частью уравнения (16), в банаховой алгебре $L_{0\cap c}$ с нормой

$$\| k \|_{L_{0\cap c}} := \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,(1 + \exp(ct))\,dt, \quad k \in L_{0\cap c}.$$

Указанный результат кратко отражен в [17]. Подробные доказательства к п. 1.4 опущены.

2. Линейное уравнение с двумя коэффициентами из различных колец с факторизационными парами. Будем рассматривать ниже уравнение (2), используемое, в частности, для выяснения общих единообразных подходов в исследовании родственных (1), (4) уравнений, вопросов, связанных с ними краевых задач, матричных и иных уравнений при различных предположениях относительно ядер, коэффициентов, а также для описания связей разрешимости уравнений с факторизуемостью коэффициентов, для получения формул представления решений, резольвентных ядер и других [18—24]. В виде (9), как можно заметить из (7), в частности, можно записать уравнение (1) в изучаемой в [2] постановке, связанную с ним задачу типа задачи Римана—Гильберта на сомкнутой вещественной оси и системы «подобных» (1) уравнений, а также уравнения (1), (4) в постановке, изложенной выше.

Для дальнейшего изложения потребуется часть определений и обозначений из [20, 22—24], существенно обобщающих введенные в п. 1 и рассматриваемых ниже, вообще говоря, от них независимо.

2.1. Обозначения и определения. Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные, вообще, некоммутативные кольца с операциями умножения $\tau_j : R_j \times R_j \to R_j$, $j = 1, 2$, и общей мультипликативной единицей $e\ (\in R_1 \cap R_2)$, а R — любое ассоциативное кольцо с единицей [22—24]. Положим

$$R_{1\cap 2} := R_1 \cap R_2, \quad R_{1\cup 2} := R_1 + R_2.$$

Будем называть R_1 и R_2 кольцами с общим умножением, если по сложению они являются подгруппами аддитивной абелевой группы $R_{1\cup 2}$ и

$$\tau_1 | R_{1\cap 2} \times R_{1\cap 2} = \tau_2 | R_{1\cap 2} \times R_{1\cap 2}.$$

Пусть p^+ и p^- — коммутирующие проекторы, т. е. аддитивные и идемпотентные отображения $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ (или $R \to R$). Положим $p^0 := p^+p^-$ $(= p^-p^+)$, $p_\pm = p^\pm - p^0$. Для любого подмножества $B \subseteq R_{1\cup 2}\ (B \subseteq R)$ обозначим

$$B^{\mp, 0} := p^{\mp, 0}B, \quad B_\mp := p_\mp B,$$

$$B^* := B^+ + B^-, \quad B_* := B_+ + B_-.$$

Для любого $x \in R_{1\cup 2}$ $(x \in R)$ положим $x^{\mp, 0} := p^{\mp, 0}x$, $x_\mp := p_\mp x$. Обратный в R для обратимого в R элемента $x \in R$ условимся обозначать x' [20]. В дальнейшем встретятся случаи, когда рассматриваемый элемент x, принадлежащий пересечению колец A, $B \subseteq R_{1\cup 2}$, может оказаться обратимым в некотором кольце $C \subseteq R_{1\cup 2}$. Всякий раз, когда целесообразно уточнить, какой именно обратный для x рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с кольцом, в котором этот обратный для элемента x рассматривается. Например, для обратимого в B элемента $x \in A \cap B$ символ x'_B означает обратный для x в B. Для произвольных подмножеств A, $B \subseteq R$ определим множество $inv(A, B) := \{x \in A : x'$ существует и принадлежит $B\}$. Положим $inv\,A := inv(A, A)$. Элемент u^+ $[v^0, w^-]$ назовем правильным [20], если

$$u^+ \in invR^+ \, [v^0 \in invR_0, \ w^- \in invR^-].$$

2.2. Факторизационные пары подколец и факторизация элементов. 1. Пару подколец (R^+, R^-) $[= (R^-, R^+)]$ кольца R с единицей e будем называть левой [правой] факторизационной парой (*ЛФП* [*ПФП*]), если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами p^+, p^-; $R^\mp := p^\mp(R)$ и выполняются следующие аксиомы (ср. с [20]):

A_1. $e \in R^0$;

A_2. $p^0 (= p^+p^-)$ — кольцевой гомоморфизм R^+ и R^- в R^0;

A_3. $R^+R^- \subseteq R^*$ $[R^-R^+ \subseteq R^*]$.

Когда пара (R^+, R^-) является одновременно *ЛФП* и *ПФП*, будем называть ее факторизационной парой (*ФП*) кольца R.

2. Будем говорить [1, 2, 11, 12, 18—24], что элемент $a \in R$ допускает в R левую [правую] факторизацию (*l. ф.* [*r. ф*]) по паре (R^+, R^-), если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие, что

$$a = r^+ s^0 t^- \quad [a = t^- s^0 r^+]. \tag{22}$$

3. Множители r^+, s^0, t^- в (22) называются «плюс»-, «диагональным»- и «минус»-факторами соответственно.

Если $a \in R$ допускает в R одновременно *l. ф.* и *r. ф.* (с, вообще говоря, различными одноименными «$\mp$, 0» -факторами), будем говорить, что a допускает в R двустороннюю факторизацию (*d. ф.*) в R [21].

Левая [правая] факторизация (21) называется: правильной левой [правой] факторизацией (*п. l. ф.* [*п. r. ф.*]), если r^+, s^0, t^- — правильные элементы;

нормированной левой [правой] факторизацией (*н. l. ф.* [*н. r. ф.*]), если $t^0 = r^0 = e$;

нормированной правильной левой [правой] факторизацией (*н. п. l. ф.* [*н. п. r. ф.*]), если она является *п. l. ф.* [*п. r. ф.*] и $t^0 = r^0 = e$;

«минус» правильной левой [правой] факторизацией ((—). *п. l. ф.* [(—). *п. r. ф.*]), если «минус»-фактор (22) является правильным элементом [22—24].

Аналогично вводятся иные типы факторизаций, использующиеся ниже, и соответствующие им сокращения.

2.3. Факторизация коэффициентов и разрешимость уравнения (2). Если задача о разрешимости уравнения (2) ставится в кольце R с факторизационной парой (R^+, R^-), то элементы a_1, a_2, называемые его коэффициентами, и правая часть $b \in R$ наперед заданы, а x $(= x^+ + x_-)$ — искомый элемент из R^*. Более сложная ситуация возникает, когда в уравнении (2) коэффициенты $a_j \in R_j$, $j = 1, 2$, причем R_1, R_2, — вообще говоря, различные кольца с общим умножением. В этой ситуации будем считать, что правая часть $b \in R^*_{1 \cup 2}$, и искать решения $x \in R^*_{1 \cup 2}$, предполагая выполненными условия

$$R_1^+ \supseteq R_2^+, \quad R_1^- \subseteq R_2^-. \tag{23}$$

Случай включений только противоположного (23) смысла даже для скалярных уравнений (1), (16) при $k_1 \in L, k_2 \in L_{\langle c \rangle}$ без дополнительных существенных ограничений пока не исследован [10—12].

Если R_j, $j = 1, 2$, — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей, а p^+, p^- — коммутирующие проекторы $R_{1 \cup 2} \to R_{1 \cup 2}$ и выполнено условие (23), то для разрешимости в $\overset{*}{R}_{1 \cup 2}$ уравнения (2) с коэффициентами $a_j \in R_j$, $j = 1, 2$, необходимо, чтобы $b \in R_{1 \cup 2}$.

Справедливы следующие утверждения, доказательства в [22].

1. Аналог случая нулевого индекса уравнения (1). Теорема 10. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1 \cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1 \cup 2} \to R_{1 \cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ЛФП R_1, а (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие (23). Если коэффициенты $a_j \in inv R_j$, $j = 1, 2$, причем элемент a_2' допускает в R_2 н. п. r. ф.:*

$$a_2' = t_2^- s_2^0 r_2^+, \tag{24}$$

а элемент $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ допускает в R_1 н. п. l. ф.:

$$a = r^+ s^0 t^-, \tag{25}$$

то при любой правой части $b \in \overset{*}{R}_{1 \cup 2}$, уравнение (2) имеет в $\overset{*}{R}_{1 \cup 2}$ одно и только одно решение. Оно может быть определено по формуле

$$x = r^+ s^0 [(t^- r_2^+) b]^+ + t_2^- s_2^0 t^{-\prime} [(t^- r_2^+) b]_- . \tag{26}$$

Следствие 1. *При условиях теоремы 10 единственным в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ решением уравнения (2) с правой частью $b = e$ будет элемент*

$$x_e = r^+ s^0 [t^- r_2^+]^+ + t_2^- s_2^0 t^{-'} [t^- r_2^+]_-.$$

Аналогично теореме 10 в [22] устанавливается следующая теорема.

Теорема 10′. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ПФП R_1, а (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие* (23).

Если коэффициенты $a_j \in inv R_j$, $j = 1, 2$, причем элемент a_1' допускает в R_1 н. п. l. ф. $a_1' = r_1^+ s_1^0 l_1^-$, а элемент $a := (l_1^- a_2)'_{R_2}$ допускает в R_2 н. п. r. ф. $a = t^- s^0 r^+$, то при любой правой части $b \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ уравнение (2) *имеет в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ одно и только одно решение. Оно может быть определено по формуле*

$$x = r_1^+ s^0 r^{+'} [(r^+ l_1^-) b]^+ + t^- s^0 [(r^+ l_1^-) b]_-.$$

Следствие 1′. *При условиях теоремы 10′ единственным в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ решением уравнения* (2) *с правой частью $b = e$ будет элемент*

$$x_e = r_1^+ s^0 r^{+'} [r^+ l_1^-]^+ + t^- s^0 [r^+ l_1^-]_-.$$

2. **Аналог случая положительного индекса скалярного уравнения типа свертки с двумя ядрами.**

Теорема 11. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ПФП R_1, а (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие* (23).

Если коэффициенты $a_j \in inv R_j$, $j = 1, 2$, причем элемент a_2' допускает в R_2 н. п. r. ф. (24), *а элемент $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ допускает в R_1 н. (—). п. l. ф.* (25), *то при любой правой части $b \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ уравнение* (2) *разрешимо в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$. Одно из его решений $x \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ может быть определено по формуле* (26).

Теорема 12. *Пусть при условиях теоремы 11, кроме указанной факторизации* (25), *элемент a допускает в R_1 другую н.(—).п.l.ф.:*

$$a = v^+ w^0 u^-,$$

причем выполнено хотя бы одно из условий:

$$p_-\{t^- u^{-'} [u^- r_2^+]^+\} \neq 0,$$

$$p_-\{u^- t^{-'} [t^- r_2^+]^+\} \neq 0.$$

Тогда элемент

$$x_0 := r^+ s^0 [t^- r_2^+]^+ - v^+ w^0 [u^- r_2^+]^+ + t_2^- s_2^0 \{t^{-'} [t^- r_2^+]_- - u^{-'} [u^- r_2^+]_-\}$$

является одним из нетривиальных решений в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ однородного уравнения (2) (*т. е. с правой частью $b = 0$*).

Обозначим через $Z(x)$ совокупность всех решений $x \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ однородного уравнения (2), а через $Z(x^+)$ совокупность всех решений $x^+ \in R_1^+$ однородного уравнения [22]

$$(a' x^+)^+ = 0 \quad (a' := r_2^+ a_1). \tag{27}$$

Легко видеть, что при условиях формулируемой ниже теоремы 13 $Z(x)$ и $Z(x^+)$ — аддитивные абелевы подгруппы $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$.

Оказывается, что условия разрешимости в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ абстрактного однородного уравнения (2) связаны с условиями разрешимости однородного уравнения (27) в R_1^+.

Теорема 13. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ЛФП R_1, а (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие* (23).

Если коэффициент $a_2 \in invR_2$ порождает н. п. r. ф. (24) *элемента a_2' в R_2, а произведение $r_2^+ a_1 \in inv(\overset{\circ}{R_1}, R_1)$ порождает н. (—). п. l. ф.* (25) *элемента $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ в R_1, то верны следующие утверждения.*

а). *Однородное уравнение* (2) *имеет в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ нетривиальное решение x тогда и только тогда, когда x^+ является нетривиальным решением в R_1^+ однородного уравнения* (27);

в). *Соответствие $A : Z(x^+) \to Z(x)$, устанавливаемое формулой*

$$(x =) Ax^+ := x^+ - t_2^- s_2^0 [a' x^+]_-,$$

является изоморфизмом аддитивных групп $Z(x^+)$, $Z(x)$.

Следствие 2. *Пусть при условиях теоремы 13 кольца R_j, $j = 1, 2$, являются алгебрами, а проекторы p^+ и p^- — однородными операторами. Тогда множества $Z(x)$ и $Z(x^+)$ являются алгебраически изоморфными линейными пространствами.*

Если при этом $Z(x^+)$ окажется n-мерным линейным пространством ($n = 1, 2, \ldots$) с базисом $\{x_i^+\}_1^n$, то $Z(x)$ — также n-мерное линейное пространство и имеет базис $\{x_i\}$

$$x_i = x_i^+ - t_2^- s_2^0 [a' x_i^+]_-, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Заметим, что при условиях следствия 2 формулу (28) можно переписать так:

$$x_i = x_i^+ - t_2^- s_2^0 [a' x_i^+], \quad i = 1, \ldots, n.$$

3. Аналог случая отрицательного индекса. Для однородного уравнения (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ПФП R_1, (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие* (23).

Если коэффициенты $a_j \in invR_j$, $j = 1, 2$, причем элемент a_2' допускает в R_2 н. п. r. ф. (24), *а элемент $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ — допускает в R_1 н.(+). п. l. ф.* (25), *то однородное уравнение* (2) *не имеет в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ решений отличных от нулевого.*

Отметим, что в доказательстве этой теоремы не использована аксиома A_3 определения *ЛФП (ПФП)* кольца R.

Для неоднородного уравнения (2) установлена следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца с общим умножением и единицей $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ и p^- — коммутирующие проекторы $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ такие, что (R_1^-, R_1^+) — ПФП R_1, (R_2^+, R_2^-) — ЛФП R_2 и выполняется условие* (23).

Если коэффициенты $a_j \in invR_j$, $j = 1, 2$, и таковы, что элемент a_2' допускает в R_2 н. п. r. ф. (24), *а элемент $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ допускает в R_1 н. (+, 0). п. l. ф.* (25), *при которой существует обратный $[t^-]'_{R_{1\cap 2}}$, то для разрешимости в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ неоднородного уравнения* (2) *с правой частью $b \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$[t^-]'_{R_{1\cap 2}} [(t^- r_2^+) b]_- \in R_{2-}. \tag{29}$$

Если уравнение (2) *имеет решение $x \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ при некотором $b \in \overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$, то это решение единственно в $\overset{\circ}{R}_{1\cup 2}$ и может быть определено по формуле*

$$x = r^+ s^0 [(t^- r_2^+) b]^+ + t_2^- s_2^0 \overline{[t^-]}'_{R_{1\cap 2}} [(t^- r_2^+) b]_-.$$

4. Дополнительный результат.

Теорема 16. *Пусть* R_1 *и* R_2 — *ассоциативные кольца с общим умножением и единицей* $e \in R_{1\cap 2}$; p^+ *и* p^- — *коммутирующие проекторы* $R_{1\cup 2} \to R_{1\cup 2}$ *такие, что* (R_1^-, R_1^+) — *ПФП* R_1, (R_2^+, R_2^-) — *ЛФП* R_2 *и выполняется условие* (23).

Если коэффициенты $a_j \in inv R_j$, $j = 1, 2$, *и таковы, что элемент* a_2' *допускает в* R_2 *н. п. г. ф.* (24), *а элемент* $a := (r_2^+ a_1)'_{R_1}$ *допускает в* R_1 *представление* $a = r^+ s^0 v^+ t^-$, *в котором* $r^0 = v^0 = t^0 = e$; *элементы* r^+, s^0 *правильные*; $t^- \in inv(R_1^-, R_{1\cap 2})$; $v^+ \in inv(R_1^+, R_1^-)$, *то для разрешимости в* $R_{1\cup 2}^*$ *неоднородного уравнения* (2) *с правой частью* $b \in R_{1\cup 2}^*$ *достаточно, чтобы выполнялось условие* (29).

При выполнении условия (29) *одно из решений в* $R_{1\cup 2}^*$ *уравнения* (2) *может быть определено по формуле*

$$x = r^+ s^0 v^+ [(t^- r_2^+) b]^+ + t_2^- s_2^0 [t^-]'_{R_{1\cap 2}} [(t^- r_2^+) b]_-.$$

Укажем, что аналогично доказательствам теорем 10—16 [22] можно доказать соответствующие теоремы и формулы для абстрактных аналогов уравнения (1), получающихся из (2) изменением порядка сомножителей. Таким же путем можно исследовать некоторые иные уравнения в кольцах с факторизационными парами [23, 24].

1. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— 13, вып. 5.— С. 3—120.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О парном интегральном уравнении и его транспонированном. I // Теорет. и прикл. математика.— 1958.— Вып. 1.— С. 58—81.
3. *Гринберг Г. А., Фок В. А.* К теории береговой рефракции электромагнитных волн // Исслед. по распространению радиоволн.— М. : Изд-во АН СССР, 1948.— С. 69—96.
4. *Бать Г. А., Зарецкий Д. Ф.* Решение обобщенной задачи Милна // Реакторостроение и теория реакторов.— 1955.— С. 294—306.
5. *Соболев В. В.* О некоторых задачах теории диффузии излучения // Докл. АН СССР.— 1959.— 129, № 6.— С. 1265—1268.
6. *Гахов Ф. Д., Смагина В. И.* Исключительные случаи интегральных уравнений типа свертки и уравнения первого рода // Там же.— 1961.— 136, № 6.— С. 1277—1280.
7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Особые интегральные уравнения типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— 20, № 1.— С. 33—52.
8. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Интегральные уравнения типа свертки // Докл. АН СССР.— 1954.— 99, № 2.— С. 197—199.
9. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана // Уч. зап. Казан. ун-та.— 1954.— 114, кн. 8.—С. 21—33.
10. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 295 с.
11. *Полетаев Г. С.* Об уравнении транспонированном к парному с ядрами из различных банаховых алгебр функций.— М., 1974.— 22 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1895-74.
12. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами из различных банаховых алгебр. I // Функцион. анализ.— 1974.— Вып. 3.— С. 134—145.
13. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М. : Физматгиз, 1960.— 316 с.
14. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М. : Наука, 1971.— 352 с.
15. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1963.— 640 с.
16. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 104 с.
17. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами, зависящими от разности аргументов // IV шк. по теории операторов в функцион. пространствах: Тез. докл.— Минск, 1978.— С. 117.
18. *Подлозный Э. Д., Полетаев Г. С.* К уравнениям в кольцах с факторизационными парами и уравнениям векторной алгебры // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 99—102.
19. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
20. *McNabb A., Schumitzky A.* Factorization of Operators — I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal.— 1972.— 9, N 3.— P. 262—295.
21. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев : Наук. думка, 1973.— 182 с.
22. *Полетаев Г. С.* Абстрактные аналоги интегральных уравнений типа свертки с двумя ядрами.— М., 1980.— 24 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3323-79.

23. *Полетаев Г. С.* К теории абстрактных аналогов некоторых уравнений типа свертки // Мат. физика.— 1978.— Вып. 24.— С. 104—106.
24. *Полетаев Г. С.* Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами.— Киев, 1988.— 20 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.31).

Получено 23.05.90