УДК 514.765.1+512.813.4

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБЪЕКТЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Лесечко Е. Е. Чепурная

Аннотация Для моделирования использованы конформные и геодезические отображения псевдоримановых пространств. Предложен метод построения объектов инвариантных относительно конформных и геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна. Полученные результаты применены для получения классов пространств замкнутых относительно указанных отображений.

Ключевые слова моделирование, псевдоримановые пространства, конформные отображения, геодезические отображения, сохранение тензора Эйнштейна

Введение

Изучение диффеоморфизмов обобщенно геометрических пространств является одним из актуальных направлений дифференциальной геометрии. Большое число исследований посвящено конформным, геодезическим и голоморфно-проективным отображениям.

Интерес к указанным диффеоморфизмам обусловлен, прежде всего, широкими возможностями для приложений в механике, теории относительности и других научных дисциплинах при моделировании динамических процессов.

Существенную роль при моделировании с помощью диффеоморфизмов играют инвариантные (не изменяемые) при заданном диффеоморфизме геометрические объекты.

В работе исследуются конформные и геодезические отображения псевдоримановых пространств, при которых сохраняется тензор Эйнштейна. Строятся объекты инвариантные относительно указанных отображений.

1. Конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна

1.1 Основные уравнения теории конформных отображений римановых пространств с сохранением тензора Эйнштейна

Пусть V_n $(n > 2)$ псевдориманово пространство с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и $\bar{V}_n$ также псевдориманово пространство с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. Конформным отображением называют взаимнооднозначное соответствие между точками пространств V_n и $\bar{V}_n$ такое, что

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x); \tag{1}$$

здесь σ - некоторая функция на V_n. Если σ - постоянная, то отображение называют гомотетией. В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы огранимся рассмотрением отображений отличных от гомотетических.

Из (1) получим

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}; \tag{2}$$

где g^{ij} и $\bar{g}^{ij}$ элементы обратной матрицы метрического тензора V_n и $\bar{V}_n$, соответственно.

Имеют место формулы:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \\ - \quad \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}); \end{aligned} \tag{4}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \tag{5}$$

$$\bar{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем Γ^h_{ij} - символы Кристоффеля второго рода, R^h_{ijk} - тензор Римана, R_{ij} - тензор Риччи, определяемый следующим образом -

$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R^\alpha_{ij\alpha}; \tag{7}$$

$R \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ - скалярная кривизна, δ^j_i - символы Кронекера,
$\sigma_i \equiv \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}, \qquad \sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h}.$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,\,j}, \tag{8}$$

$\Delta_1\sigma$ и $\Delta_2\sigma$ - первый и второй символ Бельтрами, определяемые как

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}; \qquad \Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha\beta}, \tag{9}$$

запятая – знак ковариантной производной по связности V_n [5].

Объекты конформно соответствующего V_n пространства $\bar{V}_n$ будем обозначать чертой.

Тензором Эйнштейна называют тензор

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}. \tag{10}$$

Определение 1. *Конформное отображение $f : V_n \to \bar{V}_n$, при котором*

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij} \tag{11}$$

называют конформным отображением с сохранением тензора Эйнштейна.

Изучим конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна $f : V_n \to \bar{V}_n$.

Из уравнений (5) получим

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n-2}(\bar{R}_{ij} - R_{ij}) + \alpha g_{ij}, \tag{12}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -(\frac{1}{(n-2)}\Delta_2\sigma + \Delta_1\sigma)$.

С другой стороны, из (10) и (11) будем иметь

$$\bar{R}_{ij} - R_{ij} = \frac{\bar{R}}{n}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}. \tag{13}$$

С учетом (1) и (13), уравнение (12) примет вид

$$\sigma_{ij} = \beta g_{ij}, \tag{14}$$

здесь $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma)$.

Обозначив $\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} -e^{-\sigma}$ и учитывая определение (8) тензора σ_{ij}, уравнения (14) можно записать

$$\vartheta_{i,\,j} = \rho g_{ij}, \tag{15}$$

где $\vartheta_i = \vartheta_{,i}, \qquad \rho \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\sigma} \cdot \beta$.

Вектор ϑ_i, удовлетворяющий условиям (15), называют конциркулярным, а пространства, допускающие такие поля – эквидистантными [8].

Таким образом, нами доказана теорема:

Теорема 1. *Если псевдориманово пространство V_n допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то V_n является эквидистантным пространством.*

При $\rho \neq 0$ эквидистантное пространство будем считать принадлежащим основному типу, а при $\rho \equiv 0$ - особому. Если вектор ϑ_i изотропен, то есть $\vartheta_\alpha \vartheta_\beta g^{\alpha\beta} = 0$, то эквидистантное пространство принадлежит по необходимости к особому типу. Эквидистантные пространства основного типа характеризуются тем, что в них существует специальная система координат, в которой метрический тензор эквидистантного пространства может быть представлен в виде

$$ds_n^2 = dx^{12} + f(x_1) ds_{n-1}^2(x_2, ..., x_n). \tag{16}$$

Здесь $f(x^1) \neq 0$ - некоторая функция, а ds_{n-1}^2 - метрика $(n-1)$- мерного псевдориманова пространства.

Учитывая теорему 1, можно сформулировать

Теорема 2. *Если псевдориманво пространство $V_n (n > 2)$ допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то в некоторой системе коорди нат его метрический тензор представим в виде (16).*

С другой стороны, если в $V_n (n > 2)$ метрический тензор имеет вид (16), то в нем существует конциркулярное векторное поле $\vartheta_i \equiv \vartheta_{,i}$, удовлетворяющее (15). Полагая $\sigma = -ln(-\vartheta(x))$, из (5) получим

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \alpha g_{ij}, \tag{17}$$

где α — некоторая функция.

С учетом (1), последняя формула примет вид

$$\bar{E}_{ij} \equiv \bar{R}_{ij} - \frac{\bar{R}}{n} \bar{g}_{ij} = R_{ij} + \alpha^{`} g_{ij}, \tag{18}$$

здесь $\alpha^{`}$ — некоторая функция.

Сворачивая (18) с g^{ij} и принимая во внимание (1) и (2), убедимся, что $\bar{E}_{ij} = E_{ij}$, то есть конформное отображение сохраняет тензор Эйнштейна.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Для того, чтобы псевдориманово пространство $V_n (n > 2)$ допускало конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна на некоторое псевдориманово пространство $\bar{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы V_n было эквидистантным пространством.*

Специальные конформные отображения, при которых вектор σ_i удовлетворяет условиям (14) называют конциркулярными отображениями [39]. Конциркулярные отображения характеризуются тем, что при них каждой геодезической окружности V_n соответствует геодезическая окружность $\bar{V}_n$. Геодезической окружностью называют кривую, первая кривизна которой постоянна, а вторая - тождественно равна нулю.

Из теоремы 3 можно сформулировать

Следствие 1. *Для того, чтобы при конформном отображении V_n сохранялись геодезические окружности необходимо и достаточно, чтобы при нем сохранялся тензор Эйнштейна.*

Если вектор σ_i удовлетворяет уравнению

$$\sigma_{i,j} = \alpha\sigma_i\sigma_j + \beta g_{ij}, \tag{19}$$

где $\alpha = \alpha(\sigma)$; $\beta = \beta(\sigma)$ - некоторые инварианты, то такое отображение называют [34] квазиконциркулярным.

Рассмотрим вопрос о квазиконциркулярных отображениях с сохранением тензора Эйнштейна. Учитывая теорему 3, из уравнений (14) получим, что по необходимости

$$\alpha = 1, \qquad a \qquad \beta = \frac{1}{n}(\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma) \tag{20}$$

и, таким образом, доказана теорема.

Теорема 4. *Не существует псевдоримановых пространств V_n, допускающих квази-конциркулярные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, отличных от конциркулярных.*

Указанная теорема обобщает и усиливает результаты С.Г. Лейко. А именно, в качестве следствия можно сформулировать

Следствие 2. *Если пространство Эйнштейна допускает квазиконциркулярное отображение на пространство Эйнштейна, то такое отображение конциркулярное.*

1.2 Объекты инвариантные относительно конциркулярных отображений

Как известно [5], тензор конформной кривизны инвариантен относительно конформных отображений, другими словами:

$$C^h_{ijk} = \bar{C}^h_{ij}, \tag{21}$$

где C^h_{ijk} - тензор конформной кривизны определяемый как

$$C^h_{ijk} = R^h_{ij} - P^h_k g_{ij} + P^h_j g_{ik} - \delta^h_k P_{ij} + \delta^h_j P_{ik}, \tag{22}$$

Здесь

$$P^h_k = P_{\alpha k} g^{\alpha h},$$

а

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}), \tag{23}$$

Тензор деформации тензора P_{ij} имеет вид:

$$\bar{P}_{ij} - P_{ij} = \frac{1}{n-2}(\bar{R}_{ij} - R_{ij} - \frac{\bar{R}}{2(n-1)}\bar{g}_{ij} + \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}), \tag{24}$$

Если при конформных отображениях сохраняется тензор Эйнштейна, то с учетом (11), (24) можно записать как

$$\bar{P}_{ij} - P_{ij} = \frac{\bar{R}}{2n(n-1)}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{2n(n-1)}g_{ij}, \tag{25}$$

Тогда, учитывая (1) и (2)

$$\begin{aligned}\bar{P}^h_k\bar{g}_{ij} - P^h_k g_{ij} = \bar{P}_{\alpha k}\bar{g}^{\alpha h}\bar{g}_{ij} - P_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = \bar{P}_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij}e^{-2\sigma}e^{2\sigma} - P_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = (\bar{P}_{\alpha k} - P_{\alpha k})g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = (\frac{\bar{R}}{2n(n-1)}\bar{g}_{\alpha k} - \frac{R}{2n(n-1)}g_{\alpha k})g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = \frac{\bar{R}}{2n(n-1)}\bar{g}_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij}e^{-2\sigma}e^{2\sigma} - \frac{R}{2n(n-1)}g_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = \frac{\bar{R}}{2n(n-1)}\bar{g}_{\alpha k}\bar{g}^{\alpha h}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{2n(n-1)}g_{\alpha k}g^{\alpha h}g_{ij} = \\ = \frac{\bar{R}}{2n(n-1)}\delta^h_k\bar{g}_{ij} - \frac{R}{2n(n-1)}\delta^h_k g_{ij}\end{aligned} \tag{26}$$

Принимая во внимание (25), (26), условие (21) примет вид:

$$\bar{Y}^h_{ijk} = Y^h_{ijk}, \tag{27}$$

где Y^h_{ijk} - тензор конциркулярной кривизны -

$$Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}), \tag{28}$$

Таким образом, если риманово пространство V_n, допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то тензор конциркулярной кривизны определяемый условиями (28) по необходимости инвариантен относительно указанных отображений. С другой стороны, если риманово пространство V_n допускает конформные отображения на $\bar{V}_n$ и при этом выполняются условия (27), то сворачивая их по индексам h и k убедимся, что имеют место (9), то есть сохраняется тензор Эйнштейна. Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 5. *Для того чтобы риманово пространство допускало конформное отображение на риманово пространство с сохранением тензора Эйнштейна необходимо и достаточно, чтобы при этом отображении сохранялся тензор конциркулярной кривизны.*

Таким образом, инвариантными объектами относительно конформных отображений с сохранением тензора Эйнштейна являются: тензор Эйнштейна, тензор конциркулярной кривизны и тензор конформной кривизны. Используя это, построим следующие алгебраические инвариантные относительно конформных отображений с сохранением тензора Эйнштейна объекты:

$$E_{\alpha i}Y^{\alpha}_{jkl} = \underset{1}{K}{}_{ijkl} \tag{29}$$

$$E_{\alpha i}C^{\alpha}_{jkl} = \underset{2}{K}{}_{ijkl} \tag{30}$$

$$Y^{h}_{\alpha ij}Y^{\alpha}_{klm} = \underset{3}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{31}$$

$$Y^{h}_{i\alpha j}Y^{\alpha}_{klm} = \underset{4}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{32}$$

$$Y^{h}_{\alpha ij}C^{\alpha}_{klm} = \underset{5}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{33}$$

$$Y^{h}_{i\alpha j}C^{\alpha}_{klm} = \underset{6}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{34}$$

$$Y^{\alpha}_{ijk}C^{h}_{\alpha lm} = \underset{7}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{35}$$

$$Y^{\alpha}_{ijk}C^{h}_{l\alpha m} = \underset{8}{K}{}^{h}_{ijklm} \tag{36}$$

Если инвариантный объект $\underset{i}{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ равен нулю, то пространство V_n будем называть $\underset{i}{K}$ - плоским $(i = 1, 2, \ldots, 8)$. Классы $\underset{i}{K}$ - плоских пространств замкнуты относительно конформных отображений с сохранением тензора Эйнштейна. Другими словами, $\underset{i}{K}$ - плоское пространство допускает конформное отображение на $\underset{i}{K}$ - плоское пространство.

Рассмотрим приведенные инвариантные объекты:

$$\begin{gathered}\underset{1}{K}: \quad E_{\alpha i}Y^{\alpha}_{jkl} = R_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} - \frac{R}{n}R_{ijkl} - \\ - \frac{R}{n(n-1)}(R_{il}g_{jk} - R_{ik}g_{jl}) + \frac{R^2}{n^2(n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})\end{gathered} \tag{37}$$

Тогда $\underset{1}{K}$ - плоское риманово пространство характеризуется условиями

$$\begin{gathered}R_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} - \frac{R}{n}R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(R_{il}g_{jk} - R_{ik}g_{jl}) + \\ + \frac{R^2}{n^2(n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) = 0\end{gathered} \tag{38}$$

Учитывая (31) и (32), убедимся, что условию (38) удовлетворяют также $\underset{2}{K}$ и $\underset{3}{K}$ плоские пространства. Сворачивая (38), получим

$$R_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} = \frac{2R}{n}R_{il} - \frac{R^2}{n^2}g_{il} \tag{39}$$

$$R^\alpha_\beta R^\beta_\alpha = \frac{R^2}{n} \tag{40}$$

Подставляя (13) в (39) и (40), убедимся, что тогда выполняются

$$\bar{R}_{\alpha i}\bar{R}^\alpha_l = \frac{2\bar{R}}{n}\bar{R}_{il} - \frac{\bar{R}^2}{n^2}\bar{g}_{il} \tag{41}$$

и

$$\bar{R}^\alpha_\beta \bar{R}^\beta_\alpha = \frac{\bar{R}^2}{n} \tag{42}$$

Следовательно, имеет место теорема:

Теорема 6. *Псевдоримановы пространства, удовлетворяющие условиям (38), (39), (40), замкнуты относительно конформных отображений с сохранением тензора Эйнштейна.*

Таким образом, нами получены основные уравнения, позволяющие определить допускает или не допускает данное псевдориманово пространство конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна.

Доказано, что данные отображения являются конциркулярными, то есть при них сохраняются геодезические окружности. Это позволяет в некоторой специальной системе координат указать вид метрического тензора пространств, допускающих конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна.

Введенная Яно Кентаро [39], теория конциркулярных отображений, конформных отображений, сохраняющих геодезические окружности, получили новую характеристику — сохранение тензора Эйнштейна.

2. Геодезические отображения с сохранением тензора Эйнштейна

2.1 Основные уравнения теории геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна

Взаимно однозначное соответствие между точками псевдоримановых пространств V_n с метрическим тензором g_{ij} и $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$ называют геодезическим отображением, если при нем каждая геодезическая линия V_n переходит в геодезическую линию $\bar{V}_n$.

Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы заданные псевдоримановы пространства V_n и $\bar{V}_n$ находились в геодезическом соответствии является выполнение в них условий:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \varphi_i\delta^h_j + \varphi_j\delta^h_i, \tag{43}$$

$$\bar{g}_{ij},_k = 2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}, \tag{44}$$

где Γ^h_{ij} ($\bar{\Gamma}^h_{ij}$) — объекты связности V_n и $\bar{V}_n$ соответственно (объекты $\bar{V}_n$ геодезически соответствующего данному будем обозначать чертой), δ^h_i — символы Кронекера, запятая „,“ —

знак ковариантной производной по связности V_n, φ_i — некоторый, градиентный по необходимости вектор.

Если вектор $\varphi_i \neq 0$, то отображение называется нетривиальным геодезическим отображением. Необходимым условием для геодезического отображения будут уравнения:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \varphi_{ij}\delta^h_k - \varphi_{ik}\delta^h_j, \tag{45}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\varphi_{ij}. \tag{46}$$

Здесь R^h_{ijk} — тензор Римана, R_{ij} — тензор Риччи, $\varphi_{ij} = \varphi_{i,\,j} - \varphi_i\varphi_j$.

С другой стороны, необходимым и достаточным условием того, чтобы псевдориманово пространство V_n допускало нетривиальные геодезические отображения, является существование в нем решений системы уравнений —

$$a_{ij},_k = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \tag{47}$$

$$n\lambda_{i},_j = \mu g_{ij} + a_{\alpha i}R^{\alpha}_j - a_{\alpha\beta}R^{\alpha\ \beta}_{.\,ij\,.}, \tag{48}$$

$$(n-1)\mu,_k = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_k + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha}_{.\,k},^{\beta} - R^{\alpha\beta}_{.\,.},_k) \tag{49}$$

относительно тензора $a_{ij} = a_{ji} \neq cg_{ij}$, вектора $\lambda_i \neq 0$ и инварианта μ, где

$$R^i_j = R_{\alpha j}g^{\alpha i}; \qquad R^{k\ h}_{.ij.} = R_{\alpha ij\beta}g^{\alpha k}g^{\beta h};$$
$$R^{ij}_{..},_k = R_{\alpha\beta},_k\, g^{\alpha i}g^{\beta j}; \qquad R^i_j,^k = R_{\alpha j},_\beta\, g^{\alpha i}g^{\beta k};$$

g^{ij} — элементы обратной матрицы к g_{ij}.

По известным решениям приведенной выше системы дифференциальных уравнений метрики геодезически соответствующих пространств могут быть определены из уравнений [7]:

$$a_{ij} = e^{2\varphi}\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}; \tag{50}$$

$$\lambda_i = -e^{2\varphi}\varphi_\alpha\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i}. \tag{51}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 7. *Если псевдориманово пространство V_n допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то оно допускает нетривиальные геодезические отображения.*

Доказательство. Пусть псевдориманово пространство V_n допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, тогда в нем выполняется условие (15). Учитывая это, построим тензор a_{ij} следующим образом

$$a_{ij} = \mathbf{c}a_{ij} + \vartheta_i\vartheta_j, \tag{52}$$

здесь $\mathbf{c}$ — некоторая постоянная.

Дифференцируя последнее уравнение, убедимся, что выполняются уравнения (47), причем

$$\lambda_i = \beta\vartheta_i.$$

Таким образом, теорема доказана.

Условия интегрируемости уравнений (47) имеют вид

$$a_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)kl} = \lambda_{l(i}g_{j)k} - \lambda_{k(i}g_{j)l}, \tag{53}$$

а уравнений (15) —

$$\vartheta_\alpha R^{\alpha}_{ijk} = \rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik}, \tag{54}$$

Домножая (53) на σ^l и сворачивая по l с учетом (54), получим:

$$\begin{gathered}(Ba_{\alpha i}\sigma^\alpha - \lambda_{\alpha i}\sigma^\alpha)g_{jk} + (Ba_{\alpha j}\sigma^\alpha - \lambda_{\alpha j}\sigma^\alpha)g_{ik} + \\ +\sigma_j(\lambda_{ki} - Ba_{ki}) + \sigma_i(\lambda_{kj} - Ba_{kj}) = 0.\end{gathered} \tag{55}$$

Альтернируя последнее по j,k, переобозначая в полученном индексы $i \leftrightarrow k$, а затем складывая с (55), будем иметь

$$(B\sigma^\alpha a_{\alpha i} - \lambda_{\alpha i}\sigma^\alpha)g_{jk} = (Ba_{kj} - \lambda_{kj})\sigma_i. \tag{56}$$

Сворачивая с g^{jk} —

$$n(B\sigma^\alpha a_{\alpha i} - \lambda_{\alpha i}\sigma^\alpha) = (Ba - \lambda)\sigma_i, \tag{57}$$

здесь $a = a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, $\lambda = \lambda_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$.

Учитывая (57), (56), можно записать в виде

$$\sigma_i(\frac{\lambda - Ba}{n}g_{jk} + Ba_{jk} - \lambda_{jk}) = 0. \tag{58}$$

Так как $\sigma_i \neq 0$, то

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + Ba_{ij}, \tag{59}$$

здесь $\mu = \dfrac{\lambda - Ba}{n}$.

Псевдоримановы пространства, допускающие нет ривиальные геодезические отображения, при которых вектор λ_i удовлетворяет условиям (59), называют $V_n(B)$.

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 8. *Если псевдориманово пространство V_n допускает конформные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то оно принадлежит к классу пространств $V_n(B)$.*

Геодезическое отображение псевдориманового пространства V_n называют геодезическим отображением с сохранением тензора Эйнштейна, если при нем выполняются условия:

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij}, \tag{60}$$

где

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} \tag{61}$$

тензор Эйнштейна.

Тогда для тензора деформации тензоров Риччи выполняются условия:

$$T_{ij} = \bar{R}_{ij} - R_{ij} = \frac{\bar{R}}{n}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}. \tag{62}$$

Но, с другой стороны, учитывая (46) —

$$T_{ij} = \bar{R}_{ij} - R_{ij} = (n-1)\varphi_{ij}. \tag{63}$$

Приравнивая, получим:

$$\varphi_{ij} = \frac{\bar{R}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{n(n-1)} g_{ij}. \tag{64}$$

Ковариантно продифференцируем (51)

$$\begin{gathered} \lambda_{i,j} = -e^{2\varphi}\varphi_{\alpha,j}\,\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i} + e^{2\varphi}\varphi_\alpha\varphi_\beta\bar{g}^{\alpha\beta}g_{ji} + \\ + e^{2\varphi}\varphi_j\varphi_\alpha\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i}. \end{gathered} \tag{65}$$

Учитывая (50) и (58), получим —

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + \frac{R}{n(n-1)} a_{ij}, \tag{66}$$

где

$$\mu = e^{2\varphi}(\varphi_\alpha\varphi_\beta\bar{g}^{\alpha\beta} - \frac{\bar{R}}{n(n-1)}). \tag{67}$$

Очевидно, что используя (60), из (59) с учетом (50) и (51), мы получим (58) и, следовательно, (53), таким образом, нами доказана теорема:

Теорема 9. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы псевдориманово пространство V_n допускало геодезические отображения с сохранением тензора Эйнштейна является выполнение в нем условий (47), (60) и (61).*

Таким образом, нами доказано, что псевдоримановы пространства V_n, допускающие геодезические отображения с сохранением тензора Эйнштейна, принадлежат к классу пространств $V_n(B)$, причем $B = \dfrac{R}{n(n-1)}$.

Условия интегрируемости уравнений (47), с учетом тождеств Риччи, имеют вид —

$$a_{i\alpha}R^{\alpha}_{jkl} + a_{j\alpha}R^{\alpha}_{ikl} = \lambda_{i,l}\, g_{jk} + \lambda_{j,l}\, g_{ik} - \lambda_{i,k}\, g_{jl} - \lambda_{j,k}\, g_{il}. \tag{68}$$

Подставляя в последнее (62) и принимая во внимание (60), будем иметь:

$$a_{i\alpha}Y^{\alpha}_{jkl} + a_{j\alpha}Y^{\alpha}_{ikl} = 0. \tag{69}$$

2.2 Объекты инвариантные относительно геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна

Инвариантными относительно геодезических отображений являются параметры Томаса

$$\bar{T}^h_{ij} = T^h_{ij};$$
$$T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \tfrac{1}{n-1}(\delta^h_i \Gamma^{\alpha}_{j\alpha} + \delta^h_j \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}), \tag{70}$$

и тензор Вейля проективной кривизны

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk};$$
$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \tfrac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}). \tag{71}$$

Подставляя последнее в (62) и группируя, будем иметь

$$\bar{Y}^h_{ijk} = Y^h_{ijk}. \tag{72}$$

Здесь

$$Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) \tag{73}$$

тензор концикулярной кривизны.

Таким образом, нами доказана теорема:

Теорема 10. *Тензор концикулярной кривизны инвариантен относительно геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна.*

Последняя теорема позволяет сделать вывод об инвариантности относительно геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна тензоров $\underset{1}{K}_{ijkl}$, $\underset{3}{K}_{ijkl}$ и $\underset{4}{K}_{ijkl}$, определенных во втором параграфе и, таким образом, учитывая инвариантность тензора проективной кривизны:

$$\underset{1}{G}_{ijkl} = \underset{1}{K}_{ijkl} = E_{\alpha i}Y^{\alpha}_{jkl} \tag{74}$$

$$\underset{2}{G}{}_{ijkl} = E_{\alpha i} W^{\alpha}_{jkl} \tag{75}$$

$$\underset{3}{G}{}^{h}_{ijklm} = \underset{3}{K}{}^{h}_{ijklm} = Y^{h}_{\alpha ij} Y^{\alpha}_{klm} \tag{76}$$

$$\underset{4}{G}{}^{h}_{ijklm} = \underset{4}{K}{}^{h}_{ijklm} = Y^{h}_{i\alpha j} Y^{\alpha}_{klm} \tag{77}$$

$$\underset{5}{G}{}^{h}_{ijklm} = Y^{h}_{\alpha ij} W^{\alpha}_{klm} \tag{78}$$

$$\underset{6}{G}{}^{h}_{ijklm} = Y^{\alpha}_{i\alpha j} W^{\alpha}_{klm} \tag{79}$$

$$\underset{7}{G}{}^{h}_{ijklm} = Y^{\alpha}_{ijk} W^{\alpha}_{\alpha lm} \tag{80}$$

$$\underset{8}{G}{}^{h}_{ijklm} = Y^{\alpha}_{ijk} W^{\alpha}_{l\alpha m} \tag{81}$$

Рассмотрим объект $\underset{2}{G}{}_{ijkl}$:

$$\begin{gathered}\underset{2}{G} : E_{\alpha i} W^{\alpha}_{jkl} = R_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} - \frac{R}{n} R_{ijkl} - \frac{1}{n-1}(R_{il}R_{jk} - \\ -R_{ik}R_{jl}) + \frac{R}{n(n-1)}(g_{il}R_{jk} - g_{ik}R_{jl})\end{gathered} \tag{82}$$

Тогда $\underset{2}{G}$ — плоские пространства характеризуются условиями

$$\begin{gathered}R_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} - \frac{R}{n} R_{ijkl} - \frac{1}{n-1}(R_{il}R_{jk} - \\ -R_{ik}R_{jl}) + \frac{R}{n(n-1)}(g_{il}R_{jk} - g_{ik}R_{jl}) = 0\end{gathered} \tag{83}$$

Сворачивая последнее, получим

$$R_{\alpha i} R^{\alpha}_{l} = \frac{2R}{n} R_{il} - \frac{R^2}{n^2} g_{il} \tag{84}$$

Формула (84) совпадает с уравнениями (39) и, таким образом, условия (84) характеризуют K_1, K_2, K_3 и $\underset{2}{G}$ плоские пространства.

Рассмотрим вопрос о существовании эквидистантных векторных полей в псевдоримановых пространствах, удовлетворяющих (84). Учитывая (59), домножим (84) на φ^l и, сворачивая по l, убедимся, что $B = \dfrac{R}{n(n-1)}$.

Таким образом, доказана теорема

Теорема 11. *Если в псевдоримановом пространстве выполняются условия (84) и оно допускает эквидистантное векторное поле, то*

$$B = \frac{R}{n(n-1)}$$

Рассмотрим еще один способ построения инвариантных относительно диффеоморфизмов объектов с использованием ковариантной производной. В случае произвольного тензорного поля S типа $\binom{p}{q}$ ковариантная производная по связности V_n , которую мы, как и раньше, обозначаем запятой, в каждой системе координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q\,,\,k}(x) \quad &= \quad \partial_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\ +\Gamma^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots &+ \Gamma^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \\ -\Gamma^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_2 j_3 \ldots j_q}(x) - \ldots &- \Gamma^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x) \end{aligned} \tag{85}$$

Тогда в случае векторного поля, получим

$$\Phi_{i\,\bar{;}\,j} = \partial_j \Phi_i - \Phi_\alpha \bar{\Gamma}^{\alpha}_{ij} \tag{86}$$

где $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ — объекты связности геодезически соответствующего данному псевдоримановому пространству V_n , а "$\bar{;}$" — ковариантная производная по этой связности.

Используя (43), будем иметь

$$\Phi_{i\,\bar{;}\,j} = \Phi_{i\,,\,j} - \Phi_i \varphi_j - \Phi_j \varphi_i \tag{87}$$

Альтернируя последнее, получим

$$K_{ij} = \bar{K}_{ij} \tag{88}$$

Здесь

$$K_{ij} \overset{def}{=} \Phi_{i\,,\,j} - \Phi_{j\,,\,i} \tag{89}$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 12. *Тензор K_{ij} инвариантен относительно геодезических отображений.*

Рассмотрим тензорное поле F_{ij}, на основании (85), можем записать

$$A_{ij\,,\,k} = \partial_k A_{ij} - A_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{k\,i} - A_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{kj} \tag{90}$$

Пусть при геодезическом отображении сохраняется тензор Эйнштейна, тогда

$$\bar{E}_{ij\,\bar{;}\,k} = E_{ij\,\bar{;}\,k}.$$

Учитывая (90) и (43), —

$$\bar{E}_{ij\,\bar{;}\,k} = E_{ij\,,\,k} - 2\varphi_k E_{ij} - \varphi_i E_{jk} - \varphi_j E_{ik}. \tag{91}$$

Сворачивая (43) по h, j, получаем

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} + (n+1)\varphi_i \tag{92}$$

Выразив из последнего φ_i, подставляя в (91), а затем группируя, убедимся, что

$$\bar{E}_{ijk} = E_{ijk} \tag{93}$$

где

$$E_{ijk} \stackrel{def}{=} E_{ij\,,\,k} + \frac{1}{n+1}(2\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}E_{ij} + \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}E_{jk} + \Gamma^{\alpha}_{j\alpha}E_{ik})$$

Теорема 13. *Объект E_{ijk} инвариантен при геодезических отображениях псевдоримановых пространств с сохранением тензора Эйнштейна.*

Заметим, что из определения символов Кристоффеля и правил дифференцирования определителя, следует, что в каждом псевдоримановом пространстве V_n

$$\Gamma^{\alpha}_{i\alpha} = \frac{1}{2}\partial_i ln\,|g|\,.$$

Здесь $g = det\,\|g_{ij}\|$. А, потому $\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}$ — градиентный вектор.

Псевдоримановы пространства, в которых тензор Эйнштейна E_{ij} удовлетворяет условиям

$$E_{ij\,,\,k} = 2u_k E_{ij} + u_i E_{jk} + u_j E_{ik},$$

называют слабосимметрическими относительно тензора E_{ij}. Таким образом, свойство слабосимметричности сохраняется при геодезических отображениях с сохранением тензора Эйнштейна, если

$$u_i = -\frac{1}{n+1}\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}. \tag{94}$$

Теорема 14. *Слабо симметрические отнисительно тензора Эйнштейна псевдоримановы пространства инвариантны отнисительно геодезических отображений, если вектор рекуррентности удовлетворяет условиям (94).*

С точки зрения моделирования динамических процессов в механике, геодезические отображения изучал Т. Леви-Чивита, заложивший основы этой теории в тензорной форме.

Вторая часть работы посвящена изучению геодезических отображений псевдоримановых пространств. Сначала изучены геодезические отображения пространств, допускающих конциркулярные отображения. Показано, что такие пространства допускают нетривиальные геодезические отображения. Затем объектом изучения стают пространства, допускающие геодезические отображения с сохранением тензора Эйнштейна.

Получены основные уравнения указанной теории. Указаны способы построения инвариантных объектов и выделены классы пространств замкнутых относительно геодезических отображений с сохранением тензора Эйнштейна.

Список литературы

1. Аминова А. В. Псевдоримановы мнообразия с общими геодезическими// Успехи математических наук. 1993. 48, 2. - С. 107-164
2. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой// Итоги науки и техн. Геометрия. 1963, - М.: ВИНИТИ, 1965. - С. 165-212
3. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. М.: Физматгиз, 1961. 220с.
4. Киосак В. А., Микеш Й. О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений// Геометрия погруженных многообразий. М., 1986. С. 35–39.
5. Петров А. 3. Новые методы в общей теории относительности. - М.: Наука, 1966. - 495 с.

6. Розенфельд Д. И., Горбатый Е. 3. О геодезических отображениях римановых пространств на конформно-плоские римановы пространства// Укр. геометр, сб. - 1972. - 12. - С. 115-124
7. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. - М.: Наука. — 1979. —- 255 с.
8. Синюкова Е. Н. О геодезических отображениях "в целом"некоторых специальных римановых пространств/ Одесск. ун-т. - Одесса, 1982. - 15 с. - Деп. в ВИНИТИ 20.07.82, 3892-82Деп
9. Собчук В. С. О геодезическом отображении Риччи 4-симметрических римановых пространств// Изв. вузов. Мат. - 1991. - 4. - С. 69-70
10. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966. - 432 с.
11. Ферапонтов Е. В. Автопреобразования по решению и гидродинамические симметрии// Диффер. уравн. - 1991. - 27, 7. - С. 1250-1263
12. Фомин В. Е. О геодезическом отображении бесконечномерных римановых пространств на симметрические пространства аффинной связности// Тр. геом. семин. - Казань: Казанск. ун-т, 1979. - 11. - С. 93-99
13. Фомин В. Е. Пара бесконечных пространств Леви-Чивита может не иметь общих геодезических// Тр. геом. семин. - Казань: Казанск. ун-т, 1986. - 17. - С. 79-83
14. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants// Ann. Mat. Pura Appl. - 1980. - 123, 4. - P. 35-58
15. Defever F., Deszcz R. A note on geodesic mappings of pseudosymmetric Riemannian manifolds// Colloq. Math. - 1991. - 62. - P. 313-319
16. Deszcz R., Hotlos M. On geodesic mappings in pseudo-symmetric manifolds// Bull. Inst. Math. Sinica. - 1988. - 16, 3. - P. 251-262
17. Dini U. Sobre un problema che is presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra//Ann. Mat.- 1869
18. Kahler E. Uber eine bemerkenswerte Hermitische Metrik// Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. - 1933. - 9. - P. 173-186
19. Katzin G. N., Levine J. Applications of Lie derivatives to symmetries, geodesic mappings and .first integrals in Riemannian spaces// Colloq. Math. - 1972. - 26. - P. 21-38
20. Kiosak V. A. Geodesic mapping of the special Riemannian spaces//Colloq. on Differ. Geom., Eger (Hungaria). - 1989
21. Kiosak V., Mikes J., Chepurna O. Conformal mappings of riemannian spaces which preserve the Einstein tensor//Journal of Applied Math., vol.III, №1, 2010, P. 253–258
22. Kobayashi S. Transformations groups in differential geometry. - Berlin: Springer-Verlag, 1972. - 182 c. (Пер. на рус. яз.: Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1986. - 224 р.)
23. Kobayashi S., Nomizu K. Foundation of differential geometry. Vol 1. - N.Y.-L.: Interscience, 1963; Vol 2. - N.Y.–L.: Interscience, 1969. (Пер на рус. яз.: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1981. - 1. – 344 с; 2. -. 416 р.)
24. Couty R. Transformations projectives des varietes presque kahleriennes// C. R. Acad. Sci. - 1962. - 254, 24. - P. 4132-4134
25. Levi-Civita T. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche//Ann. Mat. Milano, Ser. 2. - 1896. - 24. - P. 255–300
26. Lichnerowicz A. Courbure, nombres de Betti et espaces symmetriques// Am. Math. Soc. - 1952. - 2. - P. 216–223
27. Lie Jian-cheng, Du Li. A note on the 2-harmonic submanifolds of quasi constant curvature spaces.// J. Northw. Norm. Univ. Natur. Sci. 2008. T. 44. №2. P. 18–21.
28. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection. Olomouc.:UP, 2008. 220p.
29. Mikes J. O geodetickych transformacich polosymmetrickych nemannovych variet// Zb. anotacii, Kosice (Czech.). - 1977
30. Mikes J. Geodesic mappings of special Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai/ Top. in diff. geom. Debrecen, 1984 - Amsterdam, 1988. - 46, 2. - P. 793–813
31. Mikes J. On an order of special transformation of Riemannian spaces// Proc. Conf. Diff. Geom. Appl. Dubrovnik, 1988. - P. 199-208
32. Mikes J. On existence of nontrivial global geodesic mappings of n-dimensional compact surfaces of revolution// Diff. Geom. and Its Appl./ Proc. conf. Brno, 1989. - Singapore: World Scientific, 1990. - P. 129-137
33. Venzi P. The geodesic mappings in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds// Stochastic processes in classical and quantum system/ Proc. Inst. Int. Ascona, Switz. 1985. Lect. Notes Phys. - 1986. - 262. - P. 512-516
34. Venzi P. On concircular mapping in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds with symmetry conditions// Tensor. - 1979. - 33. - P. 109-113
35. Vranceanu G. Proprietati globale ale spatiilor bui Riemann cu conexiune abina constanta// Stud. si cerc. mat. Acad. RPR. - 1963. - 14, 1. - P. 7-22
36. Vries H. L. Uber Riemannsche Raume die infinitesimale konforme Transformationen gestatten// Math. Z. - 1954. - 60, 3. - P. 328-347
37. Westlake W. J. Hermitian spaces in geodesic correspondence//Proc. Am. Math. Soc. - 1954. - 5, 2. - P. 301-303
38. Weyl H. Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung// Gottinger Nachtr. - 1921. - P. 99-112
39. Yano K. Concircular geometry, I-IV// info Proc. Imp. Acad. Tokyo. - 1940. - 16. - P. 195-200; 354-360; 442-448; 505-511

А. В. Лесечко
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
E-mail: lesechko@ukr.net

Е. Е. Чепурная
Одесский государственный экономический университет, Одесса, Украина
E-mail: kuleshova@ukr.net

О. В. Лесечко *О. Є. Чепурна*

ІНВАРІАНТНІ ОБЄКТИ ТА МОДЕЛЮВАННЯ З ЗАСТОСУВАННЯМ СПЕЦІАЛЬНИХ ДИФЕОМОРФІЗМІВ ПСЕВДОРИМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Для моделювання використані конформні й геодезичні відображення псевдоріманових просторів. Запропоновано метод побудови об'єктів інваріантних відносно конформних й геодезичних відображень із збереженням тензора Ейнштейна. Отримані результати застосовані для отримання класів просторів замкнутих відносно вказаних відображень
Ключові слова: Моделювання, псевдоримановi простори, конформні відображення, геодезичні відображення, збереження тензора Ейнштейна

A. Lesechko *E. Chepurna*

INVARIANT OBJECTS AND MODELING BY APPLICATION OF SPECIAL DIFFEOMORPHISMS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES

Conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces were applied for modeling. We suggest method of design for objects that are invariant relative to conformal mappings. Obtained results were used for developing classes of spaces that are closed to the above-mentioned mappings.
Keywords: modeling, invariance, closed spaces, geodesic mappings