УДК 514.765.1

Лесечко Александр Васильевич
канд.физ-мат наук, доцент ОГАСА,
г. Одесса, Украина
E-mail:*alesechko@mail.ua*

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЧТИ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Почти эйнштейновы пространства привлекают внимание исследователей, прежде всего, из-за приложений в механике и теории относительности [1, с.47]. В работе исследуются геометрические свойства указанных пространств при различных условиях, которые накладываются на тензор Риччи.

Изучение почти эйнштейновых пространств ведется локально, методами тензорного анализа, без ограничений на сигнатуру и знакоопределенность метрики.

Псевдоримановые пространства $V_n (n > 2)$ называют почти эйншейновыми, если для них выполняются условия [2, с.299], [3, с.375], [4, с.18]

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij} + U_i U_j, \tag{1}$$

где U_i − по определению ненулевой градиентный вектор, то есть

$$U_i = U_{,i} = \partial_i U, \tag{2}$$

g_{ij} − метрический тензор V_n, R_{ij} − тензор Риччи V_n, определенный как

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}, \tag{3}$$

R − скалярная кривизна, R^h_{ijk} − тензор Римана V_n. Запятая означает ковариантную производную.

Из определения следует, что вектор U_i, по необходимости, изотропный вектор, то есть

$$U_\alpha U^\alpha = 0. \tag{4}$$

Здесь $U^i = g^{\alpha i} U_\alpha$, g^{ij} − элементы обратной матрицы к g_{ij}.

Существует четыре основных класса Ω-представлений, которые и станут объектом нашего дальнейшего изучения, они задаются условиями [5, с.335], [6, с.420]:

$$\Omega: \quad R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}. \tag{5}$$

$$\underset{0}{\Omega}: \quad \begin{cases} R_{ij,k} = 0 \\ R_{ij} \neq \frac{R}{n} g_{ij} \end{cases} \tag{6}$$

$$\underset{1}{\Omega}: \quad R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0. \tag{7}$$

$$\underset{2}{\Omega}: \qquad R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0. \qquad (8)$$

Принадлежность почти эйнштейновых пространств к классу Ω невозможно из-за того, что вектор U_i – ненулевой. Для других классов имеют место следующие теоремы

Теорема 1. *Для того, чтобы почти эйнштейново пространство V_n принадлежало к классу $\underset{0}{\Omega}$ необходимо и достаточно, чтобы вектор U_i был ковариантно постоянным.*

Доказательство. Если векторное поле U_i ковариантно постоянно, то дифференцируя (1) убедимся, что тензор Риччи ковариантно постоянен.

Пусть теперь, почти эйнштейново пространство имеет ковариантно постоянный тензор Риччи, тогда из (1), получим

$$U_{i,k}U_j + U_iU_{j,k} = 0 \qquad (9)$$

Альтернируя последнее по j,k

$$U_{i,k}U_j - U_kU_{i,j} = 0 \qquad (10)$$

Переобозначим $i \leftrightarrow k$

$$U_{k,i}U_j - U_iU_{k,j} = 0 \qquad (11)$$

Складывая (9) и (11), будем иметь

$$U_jU_{k,i} = 0 \qquad (12)$$

Так как, U_i − ненулевой вектор, то

$$U_{k,i} = 0 \qquad (13)$$

и, следовательно, теорема доказана.

Теорема 2. *Почти эйнштейновы пространства V_n, принадлежащие к классу $\underset{1}{\Omega}$ принадлежат к классу $\underset{0}{\Omega}$.*

Доказательство. Дифференцируя (1), с учетом постоянства скалярной кривизны для пространств класса $\underset{1}{\Omega}$, получим

$$R_{ij,k} = U_{i,k}U_j + U_iU_{j,k} \qquad (14)$$

Циклируя по индексам i, j, k, будем иметь

$$U_{i,k}U_j + U_{j,i}U_k + U_{k,j}U_i = 0 \qquad (15)$$

Из последнего получим

$$U_{i,k} = U_k\tau_i + \tau_kU_i \qquad (16)$$

где $\tau_i = -U_{\alpha,i}\xi^\alpha$, а ξ^i − некоторый вектор такой, что $\xi^\alpha U_\alpha = 1$.

Уравнение (17) приводит к

$$\tau_i = -\frac{1}{2}\xi^\alpha\tau_\alpha U_i \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16), а затем в (15), убедимся, что $\xi^\alpha\tau_\alpha = 0$. И тогда из (17) следует $\tau_i = 0$ и из (16) $U_{i,k} = 0$.

С учетом теоремы 1, теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если почти эйнштейновы пространства принадлежат к классу $\underset{2}{\Omega}$, то в них выполняются условия*

$$R_{ij,k} = MU_i U_j U_k. \tag{18}$$

Здесь M – некоторый инвариант.

Доказательство. Альтернируя выражение (15) с учетом (8), получим (10). Сворачивая с ξ^k, будем иметь

$$U_{i,k} = -U_k \tau_i \tag{19}$$

Из последнего следует $\tau_i = \xi^\alpha \tau_\alpha U_i$, а формула (14) приобретает вид (18), где $M = -2\xi^\alpha \tau_\alpha$. Таким образом, теорема доказана.

Список использованной литературы:

1. Bejan C., Binh T. Q. Generalized Einstein manifolds, WSPC-Proceeding Trim Size, dga 2007, 2007, 47-54.
2. Chaki M. C., Maity R. K. On quasi Einstein manifolds. Publ. Math. Debrecen 57 (2000), 297-306.
3. Deszcz R., Hotlos M., Senturk Z. On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean spaces. Soochow J. Math. 27 (2001), 375-389.
4. Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів. Математичні методи та фізико-механічні поля, 54 (2011), No. 2, 17-22.
5. Hinterleitner I., Kiosak V. Special Einstein's equations on Kähler manifolds. Archivum Mathematicum, 46 (2010), No. 5, 333-337.
6. Stepanov S.E. On a group approach to studying the Einstein and Maxwell equations, Theoret.and Math. Phys. 111(1997), No.1, 419-427.