УДК 624.138

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ В ОДНОМЕРНЫХ УСЛОВИЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ*)

Рабочая Т.В., Кириллов Я. В.
Одесская Государственная Академия строительства и архитектуры

В данной работе предлагается численное решение уравнения нелинейной фильтрационной консолидации в одномерных условиях деформирования. Полученные результаты могут быть использованы при расчете оснований из слабых водонасыщенных грунтов.

В работе [3] предложен вариант нелинейной теории фильтрационной консолидации, где функция избыточного давления связана линейной зависимостью с коэффициентом консолидации. Ниже рассматривается одномерная модель консолидации слоя водонасыщенного грунта мощностью h со степенной зависимостью функции избыточного давления с коэффициентом консолидации. Избыточное давление поровой воды в процессе уплотнения с течением времени меняется в каждой точке по высоте слоя водонасыщенного грунта. За основную предпосылку принимаем соотношение:

$$\nu \frac{\partial H^{\sigma}(z,t)}{\partial z} dz = \frac{\partial C(z,t)}{\partial z} dz, \quad (1.1)$$

*) Работа выполнена под руководством проф. Школа А. В.

где $\nu \equiv const$ – функция времени, $H^{\sigma}(z,t)$ – функция избыточного давления в поровой воде, $C(z,t)$ – коэффициент консолидации, σ – степень порового давления, пределы изменения которого опре деляются путем лабораторных испытаний.

Проинтегрировав выражение (1.1) для любого момента времени, имеем:

$$C(z,t) = \eta + \nu \frac{H^{\sigma+1}(z,t)}{\sigma+1}, \quad (1.2)$$

где η – постоянная интегрирования.

Сформулируем начальные и краевые условия в виде:

$$H(z,0)=H_0\equiv const;\ H(0,t)=0; \quad \frac{\partial H}{\partial z}(h,t)=0; \quad (1.3)$$

В начальный момент времени при t=0 получаем из уравнения (1.2):

$$C^{H} = \eta + \nu \frac{H^{\sigma}(z,0)}{\sigma} \quad \text{или} \quad C^{H} = C^{K} + \nu \frac{H^{\sigma}(z,0)}{\sigma}, \quad (1.3)$$

где C^H и C^K – соответственно начальный и конечный коэффициенты консолидации.

При $t \to \infty$ $C^K = \eta$, откуда

$$\nu = \frac{(C^{H} - C^{K})\sigma}{H^{\sigma}(z,0) + H^{\sigma}(0,t)}. \quad (1.4)$$

Перепишем уравнение (1.2) с учетом (1.4):

$$C(H^{\sigma}) = \eta + \frac{C^{H} - C^{K}}{H^{\sigma}(h0) + H^{\sigma}(0,t)} H^{\sigma}(z,t). \quad (1.5)$$

Запишем дифференциальное уравнение уплотнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[C(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right], \\ &H(z,0) = H_0 \equiv const, \\ &H(0,t) = \frac{\partial H}{\partial z}(h,t) = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $C(H)$ – коэффициент консолидации.

Уравнение (1.6) – квазилинейное уравнение теплопроводности с краевыми условиями второго рода [1]. Для решения квазилинейного уравнения теплопроводности (1.6) воспользуемся методами, описанными в [2].

Рассмотрим чисто неявную разностную схему для квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{\Delta z}\left[a_{i+1}(\hat{y})\frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{\Delta z} - a_i(\hat{y})\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{\Delta z}\right], \quad (2.1)$$

где $\hat{y}_i = y_i^{j+1}$ – значение $H(z_i, t_j)$, $y_i = y_i^j$, a – коэффициент консолидации:

$$a_i(v) = 0.5[C(v_{i-1}) + C(v_i)]. \quad (2.2)$$

Погрешность аппроксимации схемы (2.1) есть $O(\tau + \Delta z^2)$. Схема (2.1) является абсолютно устойчивой к ошибкам округления. Поскольку схема (2.1) является абсолютно устойчивой, шаг τ выбирается только из соображений точности. Схема (2.1) нелинейна относительно функции y^{i+1} и для нахождения ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{\Delta z}\left[a_{i+1}(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{\Delta z} - a_i(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{\Delta z}\right], \quad (2.3)$$

Относительно $\overset{(S)}{y}$ разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция y предыдущего шага по времени: $\overset{(0)}{y} = y^i$. При счете по схеме (2.1), (2.3) достаточно сделать две-три итерации. Значения функции $\overset{(S+1)}{y}$ находятся по значению функции $\overset{(S)}{y}$ методом прогонки.

Для того, чтобы воспользоваться методом прогонки, перепишем схему (2.1) в виде:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1,N}, \quad (2.4)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad (2.5)$$

где $A_i = \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\overset{(S)}{y}_i + \overset{(S)}{y}_{i-1}}{2}$, $\quad B_i = \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\overset{(S)}{y}_{i+1} + \overset{(S)}{y}_i}{2}$,

$$C_i = 2\alpha_1 + \alpha_2\left(\overset{(S)}{y}_{i+1} + 2\overset{(S)}{y}_i + \overset{(S)}{y}_{i-1}\right),$$

$$F_i = y_i, \quad \alpha_1 = \frac{\tau \cdot \eta}{\Delta z^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\tau \cdot \nu}{\Delta z^2}$$

Для определения y_i решаем задачу Коши (2.4), (2.5) при помощи следующих формул обратной прогонки:

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1,$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = \overline{1, N-1}, \qquad y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2},$$

$$\overset{(\leftarrow)}{y}_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0},$$

стрелки наверху указывают направление счета: $(\rightarrow)$ – от i к i+1, $(\leftarrow)$ – от i+1 к i.

Укажем достаточные условия, при которых метод прогонки является устойчивым:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.6)$$

$$|\chi_\alpha| \leq 1, \alpha = 1,2, \quad |\chi_1| + |\chi_2| < 2. \quad (2.7)$$

Путем математических преобразований убеждаемся, что условие (2.6) выполнено для всех точек $i = \overline{1, N}$, поэтому условие (2.7) является лишним [2]. Точность метода прогонки $\varepsilon = \varepsilon_0 N^2$, где ε_0 – ошибка округления, N^2 – число узлов.

Полученное численное решение можно использовать для прогнозирования уплотнения слабых водонасыщенных грунтов и их прослоек в процессе возведения сооружений и эксплуатации портовых гидротехнических и других сооружений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.

2. Самарский А. А., Теория разностных схем. М., Наука, 1989.

3. Школа А. В., Деформирование территорий портов и оснований портовых гидротехнических сооружений в сложных инженерно-геологических условиях. М., ПРИА ММФ, 1983.

4. Отчёт о НИР., Развитие теории уплотнения береговых гидроотвалов из бросовых грунтов дноуглубления с целью их утилизации в искусственные территории. ОГАСА, Одесса, 1994-96.