

4. Summary

The irradiation of hexagonal BN by nanosecond ion beams accelerates in near-surface layer the phase transition and formation of nanoblocks characterized to wurtz-like BN. It was shown that a phase transition is reached on the distance far from the irradiation area and accompanied with formation of nanotubes with escaping of five order symmetry axis on the surface. The appearance of nanotubes is associated with collective shift deformations of nanoblocks and it occurs in the self-organization of spiral-cyclic structure.

References:

1. Kiang, Ch.-H., Goddard, W.A., Beyers, R. et.al.,1996, J. Phys. Chem., Vol.100, No.9, 3749-3752.
2. Golberg, D., Bando, Y., 1996, Appl. Phys. Lett., Vol. 69, No.14, 2043-20047.
3. Borodin, Y. Proceedings of the 6th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2011 1 PP. 218 – 221.
4. Horiuchi, S., 1995, Jap. J. Appl. Phys. Pt.2, Vol. 34, No 12 A, L.1612-1615.

*Krutiy Yuri, Odessa State Academy of Civil
Engineering and Architecture,
Professor, Candidate of Physical and Mathematical
Sciences, the Faculty of Economics and
Management in Construction*

Frequency spectrum and main forms free transverse oscillation of cantilevered wedge with taking account of resistance

*Крутий Юрий Сергеевич, Одесская государственная
академия строительства и архитектуры,
профессор, кандидат физико-математических наук,
факультет экономики и управления в строительстве*

Спектр частот и главные формы свободных поперечных колебаний консольного клина с учетом сопротивлений

1. Постановка научной проблемы и ее значение. Задача отыскания частот свободных поперечных колебаний с учетом сопротивлений для стержней с переменной поперечной жесткостью является одной из актуальных проблем строительной механики.

Когда материал стержня однородный, закон изменения жесткости определяется законом изменения сечения стержня. Благодаря широкому распространению различного рода композитных материалов возможны также ситуации, когда переменным является модуль упругости материала стержня.

Особого внимания заслуживают стержни с непрерывно изменяющейся жесткостью. Такие стержни часто применяются в самолетостроении, мостостроении, при строительстве телевизионных башен, дымовых труб, опор линий электропередач и т.п. Поэтому исследование колебаний подобного рода объектов имеет важное практическое значение. Однако в процессе исследований часто возникают проблемы, обусловленные сложностью построения решений соответствующих дифференциальных уравнений с непрерывными переменными коэффициентами.

На рис. 1 представлена схема поперечных колебаний стержня. При этом изображенный там вариант опирания концов стержня выбран ради определенности.

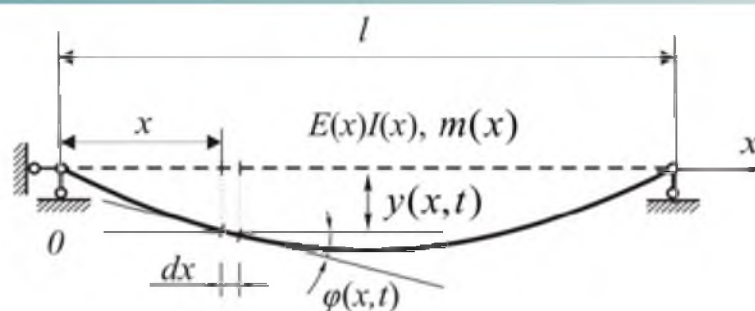


Рис. 1

В общем виде дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня с учетом сопротивлений записывается так [1-4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p(x,t) + r(x,t) = 0, \quad (1)$$

где $E(x)I(x)$ – переменная поперечная жесткость стержня в точке x ;

$E(x)$ – модуль упругости материала стержня;

$I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня;

$m(x)$ – интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня в точке x ;

$p(x,t)$ – интенсивность сил внешнего сопротивления движению;

$r(x,t)$ – интенсивность сил внутреннего сопротивления движению;

$y(x,t)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) точки оси стержня с координатой x в момент времени t (рис. 1).

Существует множество гипотез для учета сил сопротивления при колебаниях. Для внешнего трения чаще всего принимают гипотезу, согласно которой сопротивление пропорционально массе стержня и скорости [2]

$$p(x,t) = \alpha m(x) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Одним из распространенных способов учета внутреннего трения является гипотеза Кельвина – Фойхта [3, 4], согласно которой сила внутреннего сопротивления принимается пропорциональной скорости изменения упругой восстанавливающей силы

$$r(x,t) = \beta \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right].$$

Здесь α, β – коэффициенты внешнего и внутреннего трения.

С учетом указанных гипотез уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha m(x) \frac{\partial y}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

Ранее автором в работе [5] было построено точное решение уравнения (2) для случая произвольной непрерывной поперечной жесткости и произвольной непрерывной погонной массы с учетом сил внешнего сопротивления. На основе этого решения в работе [6] сформулирован новый метод исследования поперечных колебаний стержней.

В данной статье указанным методом исследуются колебания консольного стержня в форме усеченного клина с учетом как внешних, так и внутренних сил сопротивления. Определение спектра частот и других параметров колебаний такого стержня является актуальной научной и практической проблемой.

2. Анализ исследований по данной проблеме. Фундаментальные исследования проблемы колебания стержней выполнены многими известными учеными, среди которых отметим работы Д. Бернулли, Л. Эйлера, Дж. У. Рэлея, А.Н. Крылова, С.П. Тимошенко, К. Гогенемзера, В. Прагера, П. Пфейффера, П.Ф. Папковича, А.Ф. Смирнова, И.М. Рабиновича, Н.И. Безухова, А.П. Филиппова, Е.С. Сорокина, В.А. Киселева и др.

Множество работ посвящено колебаниям стержней переменной жесткости. Решения в большинстве этих публикаций основаны на различных приближенных методах, что объясняется трудностями, возникающими при попытке интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Большой практической значимостью объясняется актуальность данной проблемы и в наши дни, что подтверждается большим количеством современных публикаций, среди которых выделим работы [4, 7-15].

Несмотря на то, что точное решение всегда обладает несомненным преимуществом, исследования проблемы колебаний стержней, основанные на точных решениях соответствующих дифференциальных уравнений, в научной литературе встречаются крайне редко.

3. Цель и задачи статьи. Главная задача данной работы – определить спектр частот и собственные формы свободных поперечных колебаний консольного клина с учетом внешних и внутренних сопротивлений. Преследуются также следующие цели:

- апробация ранее разработанного автором нового метода исследования колебаний стержней на данном примере;
- оценка точности метода путем сравнения полученных здесь результатов с их ранее известными значениями.

4. Результаты исследования. Применяя к уравнению (2) метод разделения переменных Фурье $y(x,t) = v(x)T(t)$, после стандартной процедуры приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$\ddot{T}(t) + 2h\dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \quad (3)$$

$$(E(x)I(x)v''(x))'' - \omega^2 m(x)v(x) = 0, \quad (4)$$

где $2h = \alpha + \beta\omega^2$, ω – неизвестная постоянная величина.

Так как коэффициенты в уравнении для функции времени (3) постоянные, выписать для него общее решение не составляет труда. Это решение, выраженное через параметры начальных условий движения $T(0)$, $\dot{T}(0)$, имеет вид

$$T(t) = Ae^{-ht} \sin(\tilde{\omega}t + \delta),$$

где

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2}, \quad (5)$$

$$A = \sqrt{T^2(0) + \left(\frac{\dot{T}(0) + hT(0)}{\tilde{\omega}}\right)^2}, \quad \delta = \arctg\left(\frac{T(0)\tilde{\omega}}{\dot{T}(0) + hT(0)}\right).$$

Данное решение говорит о том, что свободные поперечные колебания стержня с учетом сил сопротивления совершаются во времени по затухающему гармоническому закону с частотой $\tilde{\omega}$, и что введенная постоянная величина ω представляет собою частоту свободных колебаний без учета сопротивлений (случай $\alpha = \beta = 0$).

Главная форма колебаний определяется посредством решения уравнения (4). Помимо прогиба $v(x)$, состояние стержня при поперечных колебаниях характеризуется еще такими параметрами, как угол поворота $\varphi(x) = v'(x)$, изгибающий момент $M(x) = -E(x)I(x)v''(x)$ и поперечная сила $Q(x) = -(E(x)I(x)v''(x))'$.

Прежде чем выписать необходимые формулы, укажем на принятые ради удобства представления:

$$E(x)I(x) = E_0I_0A(x); \quad m(x) = m_0B(x),$$

где E_0I_0 , m_0 – постоянные, соответственно поперечная жесткость и погонная масса в какой-либо характерной точке стержня, а $A(x)$, $B(x)$ – безразмерные положительные функции. Фактически этими функциями определяется закон изменения поперечной жесткости и закон изменения погонной массы вдоль длины стержня.

Формулы, определяющие параметры состояния стержня для произвольной непрерывной поперечной жесткости и произвольной непрерывной погонной массы, получены в статье [6]. Эти формулы выражены через начальные параметры $v(0)$, $\varphi(0)$, $M(0)$, $Q(0)$. Здесь выпишем только формулы, необходимые для исследования консольного стержня, которому соответствуют следующие граничные условия $M(0) = 0$; $Q(0) = 0$; $v(l) = 0$; $\varphi(l) = 0$.

В результате с учетом условий на конце $x = 0$, будем иметь:

$$v(x) = v(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x); \quad (6)$$

$$\varphi(x) = v(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x), \quad (7)$$

где $X_n(x)$ ($n=1,2$) – два из четырех фундаментальных безразмерных решения уравнения (4), которые представлены следующими равномерно и абсолютно сходящимися рядами

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) + K^2\beta_{n,1}(x) + K^4\beta_{n,2}(x) + K^6\beta_{n,3}(x) + \dots, \quad (8)$$

$$K = \omega l^2 \sqrt{\frac{m_0}{EI_0}}. \quad (9)$$

Здесь $\beta_{n,0}(x), \beta_{n,k}(x)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) – соответственно начальные и образующие безразмерные функции, которые определяются формулами:

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n=1,2);$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (k=1,2,3,\dots); \quad (10)$$

K – неизвестный безразмерный параметр, называемый коэффициентом колебаний.

Функции $\tilde{X}_n(x)$ ($n=1,2$) также являются безразмерными и представляются равномерно и абсолютно сходящимися рядами:

$$\tilde{X}_n(x) = \tilde{\beta}_{n,0}(x) + K^2\tilde{\beta}_{n,1}(x) + K^4\tilde{\beta}_{n,2}(x) + K^6\tilde{\beta}_{n,3}(x) + \dots;$$

$$\tilde{\beta}_{n,k}(x) = l\beta'_{n,k}(x) \quad (n=1,2) \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Реализация условий на конце $x=l$ с помощью (6), (7) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} v(0)X_1(l) + \varphi(0)lX_2(l) = 0; \\ v(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(l) + \varphi(0)\tilde{X}_2(l) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Записывая условие совместности уравнений системы, получаем частотное уравнение для консольного стержня

$$X_1(l)\tilde{X}_2(l) - \tilde{X}_1(l)X_2(l) = 0. \quad (12)$$

Исходя из факта абсолютной сходимости числовых рядов $X_1(l), \tilde{X}_1(l), X_2(l), \tilde{X}_2(l)$, на основании известных теорем математического анализа заключаем, что левая часть частотного уравнения (12) также представляет собою сходящийся ряд. Выполняя операции умножения и вычитания рядов, получим

$$1 + \eta_1 K^2 + \eta_2 K^4 + \eta_3 K^6 + \dots = 0, \quad (13)$$

где $\eta_k (k=1, 2, 3, \dots)$ – безразмерные числовые коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$\eta_k = \sum_{j=0}^k (\beta_{1,j}(l) \tilde{\beta}_{2,k-j}(l) - \tilde{\beta}_{1,j}(l) \beta_{2,k-j}(l)). \quad (14)$$

Уравнения вида (13) часто встречаются в строительной механике. Как известно [16], в таких случаях удерживают некоторое конечное число членов ряда, а остальными пренебрегают в силу их малости. Оценка погрешности решения проводится путем сравнения результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда. Поступая таким образом, можно добиться сколь угодно малой погрешности при вычислении коэффициентов колебаний K_1, K_2, K_3, \dots . После этого по формуле (9) находим спектр частот свободных колебаний без учета сопротивлений

$$\omega_j = \frac{K_j}{l^2} \sqrt{\frac{E_0 I_0}{m_0}} (j=1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

Частоты колебаний с учетом сопротивлений получим по формуле (5)

$$\tilde{\omega}_j = \sqrt{\omega_j^2 - h_j^2}, \quad h_j = \frac{\alpha + \beta \omega_j^2}{2} (j=1, 2, 3, \dots).$$

При решении конкретных задач возникает необходимость в вычислении интегралов (10). Случаи, когда их можно вычислить в явном виде встречаются редко. Для возможности численной реализации формул (10) в работе [6] предложена идея аппроксимации подынтегральных функций $\frac{1}{A(x)}$, $B(x)$ многочленами:

$$\frac{1}{A(x)} = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{l}\right) + A_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_s \left(\frac{x}{l}\right)^s;$$

$$B(x) = B_0 + B_1 \left(\frac{x}{l}\right) + B_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_p \left(\frac{x}{l}\right)^p,$$

где $A_0, A_1, \dots, A_s; B_1, B_2, \dots, B_p$ – безразмерные коэффициенты. При этом степени многочленов в каждом конкретном случае выбираются из условия адекватного приближения.

После аппроксимации, для образующих функций удастся построить квадратуры

$$\beta_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-1} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-n+1} c_{k,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=1,2) \quad (k=1,2,3,\dots), \quad (16)$$

где $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, а коэффициенты $c_{k,j}^{(n)}$ вычисляются посредством следующей совокупности рекуррентных равенств:

$$c_{0,0}^{(n)} = 1;$$

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{(4k+j+n-2)(4k+j+n-1)} \quad (j=0,1,2,\dots,k(p+s)+\lambda_n-n+1);$$

$$e_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} d_{k-1,i}^{(n)}}{(4k+i+n-4)(4k+i+n-3)}; \quad (17)$$

$$d_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{r=0}^j B_{j-r} c_{k-1,r}^{(n)}, \quad (18)$$

причем в формуле (17) $A_{j-i} = 0$, если $j-i > s$ и $d_{k-1,i}^{(n)} = 0$, если $i > k(p+s) + \lambda_n - s - n + 1$, а в формуле (18) $B_{j-r} = 0$, если $j-r > p$ и $c_{k-1,r}^{(n)} = 0$, если $r > (k-1)(p+s) + \lambda_n - n + 1$.

Перейдем к конечной цели исследования. Рассмотрим однородный консольный стержень в форме клина с постоянной толщиной d и длиной l (рис. 2). Высоты его оснований обозначим a, b ($0 \leq a \leq b$).

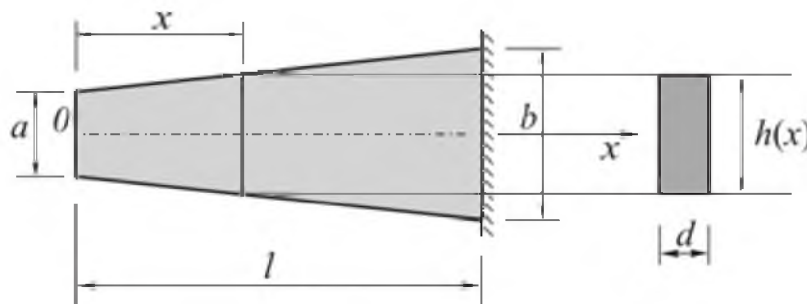


Рис. 2

В силу однородности клина $E(x) \equiv E = E_0 = const$. Формулу для высоты поперечного сечения клина в точке x запишем в виде $h(x) = bu$, где $u = \gamma + (1-\gamma)\frac{x}{l}$, $\gamma = \frac{a}{b}$ ($0 \leq \gamma \leq 1$). Тогда для момента инерции и погонной массы кли-

на в точке x можно записать $I(x) = I_0 u^3$, $m(x) = m_0 u$, где $I_0 = \frac{db^3}{12}$, $m_0 = \rho db$, ρ – плотность материала стержня. Следовательно, в данном случае $A(x) = u^3$, $B(x) = u$.

Очевидно, когда $\gamma = 0$ клин будет остроконечным, когда $0 < \gamma < 1$ получим усеченный клин, а когда $\gamma = 1$ клин вырождается в стержень с постоянным поперечным сечением.

В частном случае, когда клин остроконечный, образующие функции (10) вычисляются в явном виде

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{n}{(2k+n-1)!(2k+n)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{2k+n-1} \quad (n=1,2) \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (19)$$

Тогда

$$\tilde{\beta}_{n,k}(x) = \frac{n}{(2k+n-2)!(2k+n)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{2k+n-2} \quad (n=1,2) \quad (k=1,2,3,\dots).$$

После этого по формуле (14) находим

$$\eta_k = 2 \sum_{j=0}^k \frac{2k-4j+1}{(2j)!(2(k-j)+1)!(2j+1)!(2(k-j)+2)!} \quad (k=1,2,3,\dots).$$

Когда стержень представляет собой усеченный клин, получить для образующих функций формулы в явном виде не представляется возможным. В таком случае, коэффициенты частотного уравнения, соответствующие заданному значению параметра γ ($0 < \gamma < 1$), вычисляем по формулам (14), (16) в программном режиме. Заметим только, что в данном примере функция $B(x)$ уже изначально представлена многочленом, где $p=1$, $B_0 = \gamma$, $B_1 = 1 - \gamma$.

Проще всего обстоит дело в случае $\gamma = 1$. Тогда $I(x) \equiv I = I_0 = const$, $m(x) \equiv m = m_0 = const$ и, как показано в [5], фундаментальные решения $X_n(x)$ ($n=1,2$) вырождаются в известные функции А.Н. Крылова [3]. При этом (12) преобразуется к частотному уравнению $\operatorname{ch} \sqrt{K} \cos \sqrt{K} + 1 = 0$, корни которого известны [3].

Результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний для возможных значений параметра γ с шагом 0,1 содержатся в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты колебаний консольного клина

γ	По предлагаемому методу			По Смирнову А.Ф.
	K_1	K_2	K_3	K_1
0	5,3151	15,2071	30,0198	5,23
0,1	4,5918	15,5137	33,8452	4,60
0,2	4,3548	15,9603	37,5906	4,29
0,3	4,0733	16,5897	40,8816	-
0,4	3,9367	17,4365	44,0117	3,94
0,5	3,8225	18,3087	47,2656	-
0,6	3,7381	19,1197	50,3536	3,74
0,7	3,6669	19,8815	53,3222	-
0,8	3,6081	20,6218	56,1913	3,61
0,9	3,5589	21,3372	58,9772	-
1	3,5156	22,0336	61,7010	3,52

Значения первого коэффициента колебаний клина, соответствующие некоторым значениям γ , встречаются в монографии А.Ф. Смирнова [1]. Для сравнения эти значения также приведены в таблице 1. Заметим также, что для остrokонечного клина в изданиях [1, 3] фигурирует точное значение $K_1 = 5,315$. Впервые оно было получено Г. Кирхгоффом [17]. Как видно, найденное здесь значение $K_1 = 5,3151$ фактически совпадает с точным значением, что свидетельствует о высокой точности предлагаемого метода.

Результаты вычислений позволяют констатировать, что с увеличением γ первая частота колебаний уменьшается, а две последующие увеличиваются.

Вполне понятно, что и для любых других значений γ можно отыскать коэффициенты колебаний. Чтобы в будущем можно было обходиться без решения частотного уравнения, возникает идея выразить найденную табличную зависимость между параметрами K и γ аналитически. Рассматривая коэффициент колебаний K как функцию переменной γ , а также имея множество значений этой функции, соответствующих значениям независимой переменной $0 \leq \gamma \leq 1$, аппроксимируем функцию K многочленом. Степень многочлена будем выбирать из условия, чтобы коэффициент детерминации был не меньше, чем 0,99.

В результате согласно (15) для первых трех частот свободных колебаний консольного клина без учета сопротивлений будем иметь:

$$\omega_1 = \frac{5,2393 - 5,9177\gamma + 7,8956\gamma^2 - 3,7359\gamma^3}{l^2} \frac{b}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}},$$

$$\omega_2 = \frac{15,1799 + 2,2671\gamma + 10,7403\gamma^2 - 6,2112\gamma^3}{l^2} \frac{b}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}};$$

$$\omega_3 = \frac{30,1737 + 37,0688\gamma - 5,6179\gamma^2}{l^2} \frac{b}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Выпишем формулы для главных форм колебаний клина. С этой целью формулу (6) преобразуем к виду

$$v(x) = v(0)V\left(\frac{x}{l}\right),$$

где $V\left(\frac{x}{l}\right) = (X_1(x) - \mu X_2(x))$ – безразмерная функция, определяющая закон главной

формы колебаний, $\mu = -\frac{\varphi(0)l}{v(0)}$ – безразмерный параметр, для которого из системы (11)

находим
$$\mu = \frac{X_1(l)}{X_2(l)} = \frac{\tilde{X}_1(l)}{\tilde{X}_2(l)}.$$

В случае $\gamma = 0$, учитывая (8), (19), получим

$$V_j\left(\frac{x}{l}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_j^{2k}}{(2k)!(2k+1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{2k} - \mu_j \left(\frac{x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2K_j^{2k}}{(2k+1)!(2k+2)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{2k+1} \right),$$

$$\mu_j = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_j^{2k}}{(2k)!(2k+1)!} \right) / \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2K_j^{2k}}{(2k+1)!(2k+2)!} \right) \quad (j=1,2,3,\dots).$$

В основном случае $0 < \gamma < 1$ с учетом (8), (16) будем иметь

$$V_j\left(\frac{x}{l}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} K_j^{2k} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k} \sum_{j=0}^{k(p+s)} c_{k,j}^{(1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j - \mu_j \left(\frac{x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} K_j^{2k} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+1} \sum_{j=0}^{k(p+s)} c_{k,j}^{(2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \right),$$

$$\mu_j = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} K_j^{2k} \sum_{j=0}^{k(p+s)} c_{k,j}^{(1)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} K_j^{2k} \sum_{j=0}^{k(p+s)} c_{k,j}^{(2)}} \quad (j=1,2,3,\dots).$$

Наконец в случае $\gamma = 1$ приходим к формуле

$$V_j\left(\frac{x}{l}\right) = Y_1\left(\sqrt{K_j} \frac{x}{l}\right) - \mu_j Y_2\left(\sqrt{K_j} \frac{x}{l}\right), \quad \mu_j = \frac{Y_1(\sqrt{K_j})}{Y_2(\sqrt{K_j})} \quad (j=1,2,3,\dots),$$

где Y_1, Y_2 – первые две из функций А.Н. Крылова

$$Y_1(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \xi + \cos \xi), \quad Y_2(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \xi + \sin \xi).$$

Для примера на рис. 3 изображены графики законов первых трех форм главных колебаний для случая $\alpha = 0,4$.

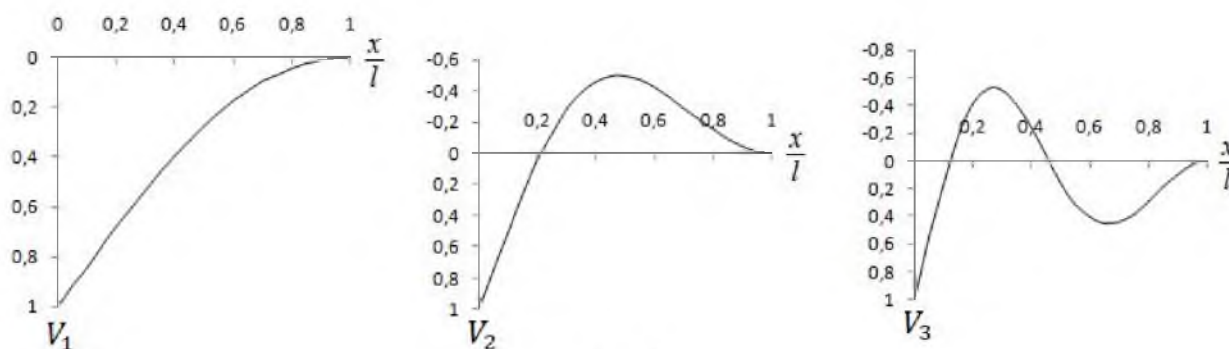


Рис. 3

5. Выводы и перспективы дальнейшего исследования. Основываясь на ранее полученных автором представлениях для параметров поперечных колебаний стержня с произвольной непрерывной поперечной жесткостью и произвольной непрерывной погонной массой, исследованы колебания консольного усеченного клина с учетом внешних и внутренних сопротивлений. Определен спектр частот и выписаны формулы для главных форм свободных колебаний усеченного клина. На данном примере апробирован новый метод исследования поперечных колебаний стержней. Сравнение полученных результатов с ранее известными значениями указывает на высокую точность метода.

Представляются перспективными такие направления деятельности:

- внедрение результатов статьи в практику проектирования реальных объектов;
- применение нового метода к исследованию стержней с другими встречающимися на практике непрерывными переменными законами изменения поперечной жесткости и погонной массы.

Список литературы:

1. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
4. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.: іл.
5. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой // Строительная механика и расчет сооружений. №5, 2011. с. 47-53.