ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Крутий Ю.С. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина, yuriy240862@rambler.ru)*

Рассмотрим двучленное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) - A(x)y(x) = 0,\ x\epsilon I \tag{1}$$

где $A(x) -$ непрерывная функция на вещественном множестве I изменения аргумента x. Здесь и далее в качестве I может выступать как открытый интервал (a, b), так и замкнутый отрезок $[a, b]$ вещественной оси x. В случае интервала, его концы (или один конец) в частности могут быть бесконечными. Построим общее решение такого однородного уравнения.

По заданной функции $A(x)$ определим две бесконечных системы функций следующими рекуррентными соотношениями:

$$\alpha_0(x) = 1,\ \alpha_i(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x)\,\alpha_{i-1}(x)dxdx; \tag{2}$$

$$\beta_0(x) = x - x_0,\ \beta_i(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x)\,\beta_{i-1}(x)dxdx\ , \tag{3}$$

$(i = 1,2,3, \dots)$, где $x_0 -$ фиксированное число из множества I. Функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ можно представить еще в явном виде:

$$\alpha_i(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x) \dots \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x) \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x)\, dxdxdxdx \dots dxdx, \tag{4}$$

$$\beta_i(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x) \dots \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x) \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} A(x)(x - x_0)\, dxdxdxdx \dots dxdx.$$

Здесь каждая из двух последних формул содержит всего $2i$ интегралов. Кроме того, будем рассматривать еще две бесконечных системы функций из производных:

$$\alpha_0'(x) = 0,\ \alpha_i'(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\alpha_{i-1}(x)\, dx; \tag{5}$$

$$\beta_0'(x) = 1,\ \beta_i'(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\beta_{i-1}(x)\, dx\ (i = 1,2,3, \dots). \tag{6}$$

Образуем из этих систем четыре функциональных ряда:

$$\Omega_1(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + \cdots\ , \tag{7}$$

$$\Omega_2(x) = \beta_0(x) + \beta_1(x) + \beta_2(x) + \beta_3(x) + \cdots\ , \tag{8}$$

$$\Omega_1'(x) = \alpha_1'(x) + \alpha_2'(x) + \alpha_3'(x) + \cdots \qquad (9)$$

$$\Omega_2'(x) = \beta_0'(x) + \beta_1'(x) + \beta_2'(x) + \beta_3'(x) + \cdots . \qquad (10)$$

Суммы рядов (9), (10) обозначены $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ пока только формально. Такие обозначения будут законны, если доказать, что все четыре ряда сходятся абсолютно и равномерно на множестве I. Ради краткости приведем доказательство этого факта только для ряда (7). Для этого построим соответствующий мажорантный ряд.

Определим неотрицательную постоянную g равенством $g = \max_{x\in I}|A(x)|$. Тогда для функций $\alpha_i(x)$ на основании формулы (4), будут справедливы оценки:

$$|\alpha_i(x)| \le g^i \left|\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} dxdxdxdx\dots dxdx\right| = g^i\frac{|x-x_0|^{2i}}{(2i)!}\,(i = 1,2,3,\dots),$$

Следовательно, для ряда из модулей, получаем:

$$|\alpha_0(x)| + |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| + \cdots \le$$

$$\le 1 + g\frac{|x-x_0|^2}{2!} + g^2\frac{|x-x_0|^4}{4!} + \cdots = ch\sqrt{g}|x - x_0|.$$

Поскольку мажорантой здесь выступает элементарная функция $ch\sqrt{g}|x - x_0|$, то ряд из модулей сходится, причем сходится равномерно. Тем самым доказано, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно на множестве I. Доказательство абсолютной и равномерной сходимости остальных трех рядов аналогично. Следовательно, ряды (7), (8) можно почленно дифференцировать и обозначения $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ для рядов (9), (10) законны.

Из формул (2), (3) находим:

$$\alpha_i''(x) = A(x)\alpha_{i-1}(x)\,,\ \beta_i''(x) = A(x)\beta_{i-1}(x)\ (i = 1,2,3,\dots). \qquad (11)$$

Дифференцируя теперь почленно (9), (10) с учетом формул (11), получим:

$$\Omega_1''(x) = \alpha_1''(x) + \alpha_2''(x) + \alpha_3''(x) + \cdots =$$

$$= A(x)\alpha_0(x) + A(x)\alpha_1(x) + A(x)\alpha_2(x) + \cdots = A(x)\Omega_1(x);$$

$$\Omega_2''(x) = \beta_1''(x) + \beta_2''(x) + \beta_3''(x) + \cdots =$$

$$= A(x)\beta_0(x) + A(x)\beta_1(x) + A(x)\beta_2(x) + \cdots = A(x)\Omega_2(x).$$

Следовательно, функции $\Omega_1(x), \Omega_2(x)$ – решения однородного уравнения (1). Заметим при этом, что ряды $\Omega_1''(x), \Omega_2''(x)$ являются абсолютно и равномерно сходящимися, поскольку отличаются соответственно от рядов $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ только множителем. Очевидно, функции $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ являются линейно независимыми, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = C_1\Omega_1(x) + C_2\Omega_2(x),$$

где C_1, C_2 −постоянные интегрирования.

Рассмотрим соответствующее двучленное неоднородное уравнение второго порядка

$$y''(x) - A(x)y(x) = R(x),\ x\epsilon I \tag{12}$$

где функция $R(x)$ также предполагается непрерывной на множестве I. Наряду с уравнением (12), рассмотрим также равносильную ему систему двух дифференциальных уравнений. В векторно-матричном виде наша система запишется так

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + f(x), \tag{13}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}, P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A(x) & 0 \end{pmatrix}$$

- соответственно вектор неизвестных, вектор правой части и матрица коэффициентов системы.

Непосредственной проверкой легко убедится в том, что матрица

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ \Omega_1'(x) & \Omega_2'(x) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет однородной системе, соответствующей (13), то есть $\frac{d\Omega}{dx} = P(x)\Omega$. Далее из формул (2), (3), (5), (6) получаем

$$\alpha_i(x_0) = \alpha_i'(x_0) = \beta_i(x_0) = \beta_i'(x_0) = 0\ (i = 1,2,3,\dots).$$

Тогда, на основании формул (7) - (10) заключаем, что

$$\Omega(x_0) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x_0) & \Omega_2(x_0) \\ \Omega_1'(x_0) & \Omega_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Следовательно, $\Omega(x)$ является нормированным решением однородной системы, соответствующей (13). Такое решение системы дифференциальных уравнений принято называть матрицантом [1]. Определитель матрицанта (вронскиан) найдем по формуле Якоби [1]

$$|\Omega(x)| = |\Omega(x_0)|e^{\int_{x_0}^{x} Sp\, P(x)dx} = 1, \tag{15}$$

где $Sp\, P(x)-$ след матрицы $P(x)$. Известно [2], что из неравенства нулю вронскиана вытекает факт линейной независимости функций $\Omega_1(x), \Omega_2(x)$. Выше этот факт мы посчитали очевидным.

Знание матриканта системы (13) позволяет найти ее общее решение по известной формуле [1]

$$Y(x) = \Omega(x)C + \Omega(x)\int_{x_0}^{x} \Omega^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}-$ произвольный постоянный вектор. Выполняя здесь необходимые матричные умножения, найдем первую компоненту вектора $Y(x)$. В итоге для неоднородного дифференциального уравнения (12) получим следующее общее решение

$$y(x) = C_1\Omega_1(x) + C_2\Omega_2(x) + \int_{x_0}^{x}\big(\Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x)\big)R(\tau)d\tau. \qquad (16)$$

Как следует из формулы (16), частное решение неоднородного уравнения (12) имеет вид

$$y_*(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\tau)R(\tau)d\tau,$$

где

$$K(x,\tau) = \Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x). \qquad (17)$$

Подвергнем этот факт проверке. Дифференцируя ядро $K(x,\tau)$ дважды по переменной x, получим:

$$\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x} = \Omega_1(\tau)\Omega_2'(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1'(x); \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 K(x,\tau)}{\partial x^2} = \Omega_1(\tau)\Omega_2''(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1''(x) = A(x)K(x,\tau).$$

Таким образом, $K(x,\tau)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (1). Кроме того, на основании формул (17), (18) заключаем, что ядро обладает свойствами:

$$K(x,x) = 0, \quad \left.\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x}\right|_{\tau=x} = |\Omega(x)| = 1.$$

Применяя теперь формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и учитывая свойства ядра, находим:

$$y_*'(x) = K(x,x)R(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x}R(\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x}R(\tau)d\tau;$$

$$y_*''(x) = \left.\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial x}\right|_{\tau=x}R(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 K(x,\tau)}{\partial x^2}R(\tau)d\tau = R(x) + A(x)y_*(x),$$

то есть $y_*(x)$ − действительно частное решение неоднородного уравнения (12).

Рассмотрим теперь трехчленное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$z''(x) - A_1(x)z'(x) - A_2(x)z(x) = Q(x),\ x\epsilon I, \qquad (19)$$

где функция $A_1(x)$ непрерывно дифференцируема, а функции $A_2(x), Q(x)$ непрерывны на множестве I. Известно [2], что такое уравнение с помощью подстановки

$$z(x) = e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} A_1(x)dx} y(x) \qquad (20)$$

приводится к двучленному виду

$$y''(x) - A(x)y(x) = R(x)\,,$$

где $A(x) = \frac{A_1^2(x)}{4} - \frac{A_1'(x)}{2} + A_2(x)$, $R(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} A_1(x)dx} Q(x)$. Однако двучленное уравнение решено выше. Поэтому общее решение $y(x)$ двучленного уравнения для данных $A(x)$ и $R(x)$, выражаемое формулой (16), можно считать известным. Тогда общее решение уравнения (19) получим по формуле (20).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.