УДК 539.3

ГАУССОВА ХАРАКТЕРИСТИКА СТЕРЖНЕЙ

Кобринец В. М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Инвариантные характеристики стержней определяют вид напряженного состояния и могут быть использованы в расчетах на продольный изгиб и поперечный изгиб.

В работе [1], по аналогии с гауссовой кривизной для оболочек, предлагаются определять вид напряженного состояния, через произведение радиусов оси стержня и нейтральной оси. Но возможен другой подход. Рассмотрим шарнирно опертую балку по действием сосредоточенной силы. Если силу вращать относительно оси стержня то нейтральная ось опишет некоторую поверхность. Здесь без всякой аналогии видно, что это поверхность положительной гауссовой кривизны, где R_1 – это прогиб балки, а R_2 – это радиус кривизны нейтральной оси.

Гауссова и характеристика для этого случая

$$K_{И}^{-1} = \frac{1}{24}(3\ell^2 - 4x^2) \tag{1}$$

На опорах эта характеристика равна $\ell^2/8$, в середине пролета балки $\ell^2/12$.

Для равномерно распределенной нагрузки

$$K_{И}^{-1} = \frac{1}{12}(\ell^2 + \ell x - x^2), \tag{2}$$

а её значение соответственно на опорах и в середине $\ell^2/12$ и $5\ell^2/48$.

При чистом изгибе

$$K_{И}^{-1} = \ell x - x^2, \tag{3}$$

Которая при $x = \ell/2$ равняется $\ell/4$.

Интегральная гауссова характеристика

$$I_И = \int_0^\ell K_И^{-1} dx \qquad (4)$$

для трех вариантов загружений составляет: $\frac{8}{72}\ell^3, \frac{7}{72}\ell^3, \frac{12}{76}\ell^3$. Самая большая величина $I_И$ для чистого изгиба. Это говорит о том, что в этом случае наиболее полно и рационально используется материал балки по её длине. Она характеризует полноту эпюры по всему пролету. Если известна величина $K_И^{-1}$, то можно определить прогиб

$$y(x) = \frac{M(x) \cdot K_И^{-1}(x)}{EI} \qquad (5)$$

Конечно условие (5) следует рассмотреть для $y_{\max}$. Величина $K_И^{-1}$ инвариантна по отношению к нагрузке, физическим и геометрическим характеристикам балки и зависит только от пролета. Поэтому её можно применять для определения сечения балки и допустимой нагрузки. Например, задаваясь допускаемым значениям $y_{\max} \le [f]$

$$I_{треб} \ge \frac{M(x_0) K_И^{-1}(x_0)}{E[f]} \qquad (6)$$

x_0 – координата, где $M\ (x_0)$ достигает максимального значения. Если задать $\sigma_{\max} \le [R]$, то из условия (6) можно попытаться объединить расчет по двум предельным состояниям

$$\left(\frac{I}{W}\right)_{треб} \ge \frac{[K] \cdot K_И^{-1}(x_0)}{E[f]} \qquad (7)$$

При центральном сжатии ось стержня остается прямолинейной, а нейтральная устремляется в бесконечность, оставаясь прямолинейной. В этом случае получается цилиндрическая поверхность нулевой гауссовой кривизны.

$$K_{ц.сж} = 0 \qquad (8)$$

При продольном изгибе, если имеются начальные несовершенства, нейтральная ось искривляется в другую сторону по отношению к оси стержня, образуя поверхность отрицательной гауссовой кривизны. Расстояние от оси стержня до нейтральной оси $C\ (x)$, определяется через начальные несовершенства и прогиб. Для колонны прямоугольного сечения b/h

$$C(x)=\frac{h^2}{12\left[\ell_0+y_0(x)+y_1(x)\right]}\,. \tag{9}$$

Учитывая только начальную погибь

$$y_0(x)=f_0\sin\frac{\pi x}{\ell}\,, \tag{10}$$

при шарнирном опирании получим

$$C(x)=\frac{h^2\cdot(1-P/P_{кр})}{12\cdot f_0\cdot\sin\dfrac{\pi x}{\ell}}\,. \tag{11}$$

Из (11) видно, что при $x=\ell/2$ когда P стремится к $P_{кр}$ расстояние между осями уменьшается. При $P = P_{кр}$ нейтральная ось коснется оси стержня.

Если P намного меньше $P_{кр}$ гауссова характеристика

$$K^{-1}_{пр.И}=-\frac{\ell^2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{\pi x}{\ell}}{1+\cos^2\dfrac{\pi x}{\ell}}\,. \tag{12}$$

При $x=\ell/2$ она достигает максимума, если $K^{-1}_{пр.И}$ взять на абсолютной величине

$$K^{-1}_{пр.И}(x=\ell/2)=\frac{\ell}{\pi^2} \tag{13}$$

Из (12) и(13) следует, что эта характеристика также является инвариантом при продольном изгибе.

Если записать $K_{пр.И}$ в двух вариантах и приравнять их при $x=\ell/2$

$\dfrac{\pi^2\cdot P(c+y)}{\ell^2 EI_{н.о.}}\cdot\dfrac{f_0}{1-\zeta}=\dfrac{P^2\cdot f_0(y+c)}{(1-\zeta)\cdot EI_{но}\cdot EI_{ос}}$, то после сокращения получим

$$P = P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \qquad (14)$$

Выводы:

1. Инвариантные характеристики стержней при сжатии, поперечном и продольном изгибе определяют вид напряженно-деформированного состояния и могут быть использованы для расчетов по 1-ому и 2-ому предельных состояний.

Литература

1. В. М. Кобринец. Геометрический критерий напряженно-деформированного состояния. Сб. «Строительные конструкции. Строительные материалы. Инженерные системы. Экологические проблемы». С. 101 – 103. ОГАСА, Одесса 1998.