МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Присвячується 85- річчю ОДАБА

Третенков В. М

Математичне оброблення геодезичних вимірів

Частина 2

Основи застосування методу найменших квадратів

Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки «Геодезія і землеустрій»

Одеса –2016

УДК528.1(075.8) .
ББК 26. 1я73 «Рекомендовано»:
Вченою радою Одеської державної академії будівництва і архітектури. Протокол № 2 від 29. 09.2016 р.

Третенков В.М. Математичне оброблення геодезичних вимірів. ***Частина2. Основи застосування методу найменших квадратів***. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки «Геодезія і землеустрій. – ОДЕСА: ОДАБА, 2016 . – 332 с.

Рецензенти: І.І. Гладкіх, доктор технічних наук, професор,
В.В. Стадников, кандидат технічних наук, доцент, .
І.Р. Александровський, кандидат технічних наук, доцент.

В навчальному посібнику представлені основи застосування методу найменших квадратів при вирівнюванні планових і висотних геодезичних мереж параметричним, корелатним і комбінованим способами . Наведені відомості з теорії параметричного і корелатного способів вирівнювання геодезичних вимірювань, методи складання і розв'язання систем умовних і нормальних рівнянь, обчислення вирівняних величин. Розглянуті приклади вирівнювання і оцінки точності отриманих результатів, питання апроксимації функцій виміряних величин, зміст індивідуальних завдань для студентів, запитання для самостійної перевірки знань.

Призначено для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів напряму «Геодезія і землеустрій» денної і заочної форм навчання при вивченні теоретичного матеріалу і виконанні індивідуальних завдань. Іл.45. Табл.102. Бібліогр. 10 назв.

ЗМІСТ. **Стор.**

Вступ.……...7
Глава1.Способи вирівнювання геодезичних мереж на основі методу найменших квадратів……8
1.1. Суть і задачи сумісного вирівнювання кількох виміряних величин……8
1.2. Суть методу найменших квадратів……..12
1.3. Основні шляхи розв'язання задачи вирівнювання……15
1.4. Основні дії з матрицями в при вирівнюванні…….....18
1.4.1. Загальні відомості про матриці…….....18
1.4.2. Складання матриць……..19
1.4.3. Множення матриць……19
1.4.4. Транспонування матриць……20
1.4.5. Обчислення обернених матриць……20
1.4.6. Матрична форма системи лінійних рівнянь……..21
1.4.7. Диференціювання матричних виразів……23

Глава 2. Параметричний спосіб вирівнювання…….....24
2.1. Суть способу. Параметричні рівняння поправок……24
2.2. Види параметричних рівнянь поправок……27
2.3. Нормальні рівняння …….....33
2.4.Послідовність вирівнювання параметричним способом … ……40
2.5. Приклади вирівнювання геодезичного трикутника параметричним способом ……43

Глава 3. Спосіб Гаусса розв'язання нормальних рівнянь……52
3.1. Суть способу Гаусса ……..52
3.2.Правило розкриття алгоритмів Гаусса……. ……..53
3.3. Контролі складання і розв'язання умовних та нормальних рівнянь……56
3.4. Формули визначення суми $[pv^2]$ …… 65
3.5. Приклад вирівнювання параметричним способом горизонтальних кутів, виміряних на геодезичному пункті……66

Глава 4. Оцінка точності результатів вирівнювання……69
4.1. Про оцінку точності за матеріалами вирівнювання……69

4.2. Спосіб додаткових граф…….....73
4.3. Спосіб діагоналей…….....76
4.4. Спосіб Ганзена обчислення вагових коефіцієнтів……...78
4.5. Про оцінку точності функцій вирівняних невідомих……..82
4.6. Спосіб матриці вагових коефіцієнтів функції……..83
4.7. Спосіб додаткових стовпці……... 84

Глава5.Розв'язання задач з вирівнювання параметричним способом.87
5.1.Задача вирівнювання дирекційних кутів в мережі тріангуляції параметричним способом……87
5.2. Задача вирівнювання мережі тріангуляції параметричним способом…… …. 94
5.3. Задача вирівнювання мережі трилатерації параметричним способом …… 98
5.4. Вирівнювання нерівноточних вимірів параметричним способом……109
5.5. Вирівнювання нівелірної мережі параметричним способом 112
5.6. Спосіб вузлів проф. В.В. Попова складання нормальних рівнянь при вирівнюванні геодезичних мереж…….....128

Глава6. Додаткові способи розв'язання нормальних рівнянь……130
6.1. Спосіб Краков'янів (квадратних коренів)…….. ……..130
6.2. Методи наближень розв'язання нормальних рівнянь……...138
6.2.1. Метод простої ітерації……139
6.2.2. Метод ітерацій Зейделя……142

Глава 7. Застосування параметричного способу при обробці експериментальних залежностей……143
7.1. Необхідність застосування параметричного способу….. …....143
7.2. Визначення параметрів прямолінійної функції……..144
7.3. Визначення параметрів параболічної функції ……..147
7.4. Визначення параметрів періодичної функції ……150
7.5. Визначення параметрів логарифмічної функції ……153
7.6. Визначення параметрів степеневої функції ……...157
7.7.Оброблення ряду геодезичних вимірів, перекручених систематичними похибками……163

7.8. Розрахункове – графічна робота №1……165
7.9. Запитання для самоперевірки знань ……..171

Глава 8. Корелатний спосіб вирівнювання……..174
8.1. Суть корелатного способу…… …….174
8.2. Порядок вирівнювання корелатним способом…….180
8.3.Приклади вирівнювання трикутника корелатним способом ……..182
8.4. Розв'язання умовних і нормальних рівнянь корелат. ……188
8.5. Підрахунок допустимих нев'язок умовних рівнянь……..193
8.6. Оцінка точності функцій, вирівняних корелатним способом 196
8.6.1. Приклад вирівнювання виміряних кутів, при вставці пункту в жорсткий кут тріангуляції……...198

Глава9. Деякі види умовних рівнянь в геодезичних мережах ….202
9.1. Висотні (нівелірні) мережі…….....202
9.2.Метод полігонів проф. В.В. Попова при вирівнюванні нівелірних і полігонометричних мереж……203
9.3. Мережі тріангуляції……..208
9.3.1. Лінійні умовні рівняння……208
9.3.2. Нелінійні (синусні) умовні рівняння……212
9.4. Полігонометричні мережі……222
9.5. Мережі трилатерації……..226

Глава 10. Розв'язання задач вирівнювання корелатним способом.. 230
10.1.Задача вирівнювання корелатним способом горизонтальних кутів, виміряних на геодезичному пункті……230
10.2. Задача вирівнювання корелатним способом виміряних кутів мережі тріангуляції…….....233
10.3. Задача вирівнювання корелатним способом кутів центральної системи……239
10.4. Задача вирівнювання корелатним способом виміряних кутів геодезичного чотирикутника……245

Глава 11. Вирівнювання корелатним способом трилатерації і ……. полігонометричних ходів……250
11.1. Загальні відомості про трилатерацію……249

11.2. Кількість умовних рівнянь при вирівнюванні трилатерації корелатним способом …….250
11.3. Вид умовних рівнянь в мережі трилатерації……..250
11.4. Задача вирівнювання корелатним способом мережі трилатерації…….....257
11.5. Суть вирівнювання полігонометричних ходів…….....265
11.6 Вирівнювання полігонометричного ходу довільної форми корелатним способом……..266
11.7. Задача вирівнювання полігонометричного ходу корелатним способом……..273
11.8.Загальні відомості про вирівнювання лінійно - кутових мереж 279

Глава 12. Комбіновані способи вирівнювання на ЕОМ……....281
12.1. Параметричний спосіб із залежними параметрами……282
12.2. Задача вирівнювання параметричним способом із залежними параметрами……..287
12.3. Корелатний спосіб з додатковими невідомими……..293
12.4 Задача вирівнювання з додатковими невідомими ……..298
12.5. Вирівнювання з врахуванням похибок вихідних даних.....301
12.5.1. Параметричний спосіб вирівнювання з врахуванням похибок вихідних даних …….....301
12.5.2. Задача вирівнювання параметричним способом з врахуванням похибок вихідних даних ……....307
12.5.3. Корелатний спосіб вирівнювання з врахуванням похибок вихідних даних ……..309
12.5.4.Задача вирівнювання корелатним способом з врахуванням похибок вихідних даних …….....312
12.6 Вирівнювання з врахуванням залежних вимірів……..313
12.6.1. Параметричний спосіб вирівнювання залежних вимірів.....314
12.6.2. Корелатний спосіб вирівнюванні залежних вимірів 315
12.6.3. Задача остаточного вирівнювання дирекційних кутів в мережах тріангуляції з врахуванням залежних вимірів ……...317
12.7. Розрахункове – графічна робота №2……..319
12.8. Запитання для самоперевірки знань……325

Список рекомендованої літератури……..330

ВСТУП.

Важливим етапом другої частині курсу математичної обробки геодезичних вимірів є знаходження найбільш достовірних значень виміряних величин, які застосовуються при будуванні і реконструкції геодезичних мереж [2] . Справа у тому, що при обробці багатократних вимірювань правилами теорії похибок не враховуються математичні співвідношення, що існують між ними в геодезичних мережах. Через те приходиться додатково виправляти виміряні величини за умову впливу математичних співвідношень між ними і це являє собою основну задачу другої частини курсу. Зауважимо, що відшукування значень виміряних величин за правилами другої частини курсу названо **вирівнюванням**. .

З досвіду геодезичних робіт відомо, що навіть при самій ретельній методиці багатократні вимірювання однієї і тієї же величини супроводжуються похибками. При цьому у процесі вимірювання математично пов'язаних величин виникають нев'язки, які приводять до неоднозначності визначення дійсних елементів в геодезичних мережах. Результати вирівнювання дозволяють усувати нев'язки в геодезичних побудуваннях, визначати імовірніші значення елементів геодезичної мережі і виконувати оцінку їх точності. .

Математичною основою вирівнювання є метод найменших квадратів, який був застосований з початку XIX століття для математичної обробки результатів геодезичних вимірювань. Математична ставність і практична досконалість прийомів обчислень за методом найменших квадратів є результатом сумісних зусиль вчених різних галузей: геодезистів, астрономів, математиків, тощо. Завдяки цьому в роботах А. Лежандра і К. Гаусса цей метод став теоретичною основою математичної обробки геодезичних вимірів. Наукові традиції

К. Ф. Гаусса продовжили відомі вчені А.П. Болотов, А.Н. Савіч, І.І. Померанців, В.В. Вітковський та інші в Росії, Ф. Бессель. Ф. Гельмерт, О. Шрейбер, Л. Крюгер – в Німеччині.

Великий внесок у встановленні та розв'язуванні цих проблем зробили видатні радянські вчені Ф. Н. Красовський, Н. А.Урмаєв. Запропоновані ними прості і в тій же час достатньо суворі методи дозволили розв'язувати задачи створення єдиної державної геодезичної мережі. В розвитку теорії математичної обробки геодезичних вимірів значний внесок зробили радянські вчені А.С.Чеботарьов, Н.І.Ідельсон, Н.Г.Кель, А.А. Ізотов, М.М.Машимов, В.В.Попов, В.Д.Большаков, П.А.Гайдаєв, А.І.Мазмішвілі, Ю.І.Маркузе та українські вчені М.Г. Папазов, С.Г. Могильний, М.Г. Відуєв, А.Г.Григоренко, П.Т.Бугай,Г.С. Кондра,С.П.Войтенко, П.М. Зазуляк, В.І.Гавриш, Е.М.Євсєєва, М.Д. Йосипчук та інші. В сучасних умовах вирівнювання виконуються на основі методу найменших квадратів з використанням електронних засобів та обчислювальної техніки , які суттєво скорочують строки і зусилля виконуючих, підвищують якість математичної обробки геодезичних мереж.

Автор висловлює подяку за цінні зауваження, які враховані в роботі.

ГЛАВА 1. СПОСОБИ ВИРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ НА ОСНОВІ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.

1.1. СУТЬ І ЗАДАЧИ СУМІСНОГО ВИРІВНЮВАННЯ КІЛЬКОХ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН.

Теорія похибок вимірів дає правила математичної обробки багатократних вимірів однієї і тієї самої величини. За цими правилами задача обробки вимірів розв'язувалася би повністю, якщо для досягнення цілі були би виміряні тільки необхідні величини (наприклад, в трикутнику з однією відомою стороною були би виміряні тільки два кути). Однак, в геодезичній практиці,

крім необхідних, вимірюють завжди надлишкові величини, які пов'язані математичними співвідношеннями з необхідними (наприклад, в трикутнику вимірюють три кути, тобто вимір третього кута є надлишковим). Надлишкові виміри підвищують точність виміряних величин і дозволяють виконувати найбільш надійні оцінки їх точності на основі математичних зв'язків між виміряними величинами. .

Крім того нев'язки , що отримуються в геометричних фігурах, забезпечують надійний контроль вимірів та їх відбракування.

Найбільш важливим для математичної обробки вимірів є те, що в результаті вирівнювання повинні бути задовільнені існуючі між виміряними величинами математичні співвідношення. У протилежному випадку надлишкові виміри опиняться некорисними.

Таким чином, з математичної точки зору задача сумісного вирівнювання кількох виміряних величин заключна у наступному. Нехай для розв'язання деякої задачи виміряне **-n** величин, істинні значення яких позначимо через $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Результати вимірів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цих величин отримані відповідно з вагами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. За умовою задачі відомо, що виміряні величини пов'язані між собою рівняннями через істинні значення $\varphi_j(X_i) = 0$, де (i= 1,2,…..,n; j= 1,2,….,r), або

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0; \\ \varphi_2\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

Математичні співвідношення між виміряними величинами, рахуючи також і вихідні дані, можна виразити різними рівняннями, які залежать між собою. З таких рівнянь можна утворити декілька систем, які складатимуться із незалежних рівнянь.

Після вибору однієї із цих систем, інші рівняння будуть з'являтися наслідком рівнянь обраної системи і тому не повинні прийматися до уваги. .

В системі рівнянь (1.1) припускаються тільки незалежні між собою рівняння, число яких дорівнює числу надлишкове виміряних величин – **r**. .

Зауважимо, що ці рівняння називаються " умовними рівняннями ". Так як число надлишкове виміряних величин є тільки частина числа всіх виміряних величин - **n**, то завжди

$$\mathbf{r < n}\,. \qquad .$$

Отже, система умовних рівнянь (1.1) є невизначеною, тобто містить рівнянь менше, ніж невідомих і тому допускає без кінцеву безліч розв'язань. При отриманні результатів вимірів, поперед всього слід перевірити, наскільки вони задовольняють умовним рівнянням (1.1). Після із значень виміряних величин складають умовні рівняння виду $\boldsymbol{\varphi_j\,(x_i\,) = W_j}$, або

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi_1(x_1, x_2,\ldots,x_n) = W_1}; \\ \boldsymbol{\varphi_2(x_1, x_2,\ldots, x_n) = W_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{\varphi_r(x_1, x_2,\ldots, x_n) = W_r}. \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

Виміряні величини в системі (1.2) містять випадкові помилки і через те, отримані у правих частинах величини , які називають нев'язки W_1, W_2,….. W_r, будуть відрізнятися від нуля. Для усування нев'язок в системі шляхом вирівнювання необхідно розв'язати три основні задачі. .

Перша основна задача вирівнювання заключна в остаточному відбракуванні вимірів і для цього виконують перевірку допустимості всіх нев'язок їх граничним значенням.

Результати, які обтяжені грубими помилками, виявляють шляхом зіставлення з недопустимими нев'язкими, їх бракують і ***пере спостерігають***.

Друга основна задача вирівнювання *являє собою усування всіх нев'язок шляхом виправлення застосованих результатів вимірів.* .

Третя основна задача *включає оцінку точності результатів вирівнювання.* .

Для розв'язання перелічених задач позначимо виправлені результати вимірів через ($x_i + v_i$), (i = 1,…..., n), .
де $v_i -$ шукані поправки і тоді отримаємо $\boldsymbol{\varphi_j\ (x_i + v_i) = 0}$, або

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi_1(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n) = 0}; \\ \boldsymbol{\varphi_2(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n) = 0}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{\varphi_r(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n) = 0}. \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

Зауважимо, що значення $(\boldsymbol{x_i + v_i})$ називають **вирівняними значеннями** виміряних величин. .

Система рівностей (1.3) також, як система (1.1) містить **n -** невідомих і **r-** рівнянь і , оскільки **r < n ,** то вона являє собою невизначену систему рівнянь, яка допускає безліч розв'язань. Очевидно, що задачу ліквідування нев'язок можна розв'язувати багатьма шляхами. Ідеальним способом є отримання поправок v_i, які би дорівнювали за абсолютною величиною похибкам вимірів і були би протилежні їм за позначкою. Однак таке постановлення задачі немає розв'язання. .

Практичний спосіб розв'язання – це коли поправки v_i повинні, **по перше** усунути нев'язки і **по друге**, за абсолютною величиною повинні бути можливо ближче до істинних похибок вимірів. Нескладно зрозуміти, що при виконанні другої вимоги перша вимога забезпечує тенденцію визначення поправок і мати позначки, у більшості протилежні позначкам похибок. При кінці зробимо ще деякі додаткові зауваження. .

. **Умовою і причиною виникнення задачі вирівнювання є наявність надлишкове виміряних величин і неми-**

нучість малих похибок вимірів. .

При відсутності надлишкове виміряних величин не було би потреби в цієї задачі, бо кожна шукана величина знаходилась би однократно. Через те не можна було би скласти умовні рівняння (1.1) і не виникала би тоді мова про нев'язки. Однак без надлишкове виміряних величин не має надійного контролю спостережень і обчислень, а також одного з ефективних шляхів підвищення точності виконаних вимірів.

Тому **мета вирівнювання** – знайти такі поправки v_i до виміряних значень x_i, які би дозволяли ліквідувати нев'язки W_j в рівняннях (1.2). Наслідком усунення нев'язок є однозначність, тобто рівність між собою значень кожної шуканої величини, яка безпомилково обчислена різними шляхами. Цим і пояснюється сама назва задачі. .

Крім ліквідації нев'язок, метою вирівнювання є підвищення точності значень всіх шуканих величин, які визначаються. .

1.2. СУТЬ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.

Для розв'язання задачі вирівнювання з'ясуємо деякі ймовірні властивості випадкових похибок вимірів, які можна використовувати при находженні системи шуканих поправок.

Знайдемо ймовірність деякої сукупності випадкових похибок $\delta_1, \dots \delta_n$. Згідно теореми множення ймовірностей, шукана ймовірність дорівнює .

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\delta_1}, \dots \boldsymbol{\delta_n}) = \frac{\mathbf{1}}{\left(\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\right)^{\boldsymbol{n}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\{\frac{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}} + \dots + \frac{\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{2}}}\right\}} \cdot \frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{1}}}{\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}} \cdot \dots \cdot \frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{n}}}. \quad (1.4)$$

Запитаємо себе, яка із всього безлічі можливих сукупностей випадкових похибок, яка утворює дану систему поправок,

буде найбільш ймовірною? Із рівності (1.4) отримуємо відповідь на поставлене питання: найбільшому значенню величини $P(\delta_1, \dots \delta_n)$ відповідає найменше абсолютне значення показника степені у правій частині рівності (1.4), тобто відповідає додержанню умови

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i^2}{m_i^2} = \mathbf{min.} \qquad (1.5)$$

Рахуючи отриману умову (1.5) приходимо до аналогічного висновку: якщо для поправок $\boldsymbol{v_i}$ поставити таку ж умову, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{m_i^2} = \mathbf{min}, \qquad (1.6)$$

то можна очікувати, що сукупність значень поправок v_i в імовірному відношенні буде найкращим чином наближатись до сукупності значень похибок. А так, як за умовою (1.3) поправки повинні ліквідувати нев'язки, які є випадковими похибками функції $\boldsymbol{\varphi_i}$, то можна очікувати, що і за позначкою поправки у більшості повинні бути протилежними випадковим похибкам відповідних результатів вимірів. .

Умову (1.6) зручніше уявити шляхом помноження на величину $\boldsymbol{\mu^2}$, тобто

$$\left[\frac{\mu^2}{m^2}\, v^2\right] = \left[p\, v^2\right] = \min. \qquad (1.7)$$

Помноження функції на постійну величину не змінює координат точки мінімуму. Як відомо, отримана величина .

. $$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$$.

називається вагою виміряних величин, а умова (1.7) **- математичним виразом методу найменших квадратів.**

Отже із всій безлічі можливих розв'язань системи рівнянь (1.3) ми обрали розв'язання, яке задовольняє умові (1.7), тобто задовольняє методу найменших квадратів. Цей метод дає

однозначне розв'язання рівнянь (1.3) і володіє рядом наступних переваг. .

До переваг методу найменших квадратів відносять: .

1) наявність в умові мінімуму другої степені поправок v_i дозволяє обмежувати їх найбільші значення і тому при рівноточно виміряних величинах поправки більш чи менш рівномірно розподіляються між результатами вимірів;

2) наявність при нерівноточних результатах вимірів ваги $\boldsymbol{p_i}$ при $\boldsymbol{v_i^2}$ дозволяє зменшувати поправки до більш точних і, навпаки, збільшувати поправки до менш точних результатів.

Названі переваги цілком узгоджуються з доказами користі методу найменших квадратів. .

Простішою ілюстрацією того, що пошук вирівняних значень невідомих за методом найменших квадратів приводить до найкращих результатів, може служити наступне доведення формули вагового середнього, отриманого у перший частині цього курсу на підставі інших міркувань.

Нехай деяка величина X виміряна **n-** разів і отримані результати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з вагами відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Знайдемо найбільш надійне значення $\boldsymbol{x}$ за методом найменших квадратів, тобто за умовою $\boldsymbol{[p\,v^2]} = \mathbf{min}$.

Так, як $v_i = \boldsymbol{x} - x_i$, то умову (1.7) можна уявити як: .

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})^2 = \min. \quad .$$

Як відомо, для виконання цієї умови необхідно, щоб $\frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x} = 0$.

або $\sum_{i=1}^{n} 2p_i(\boldsymbol{x} - x_i) = 0.$.

і тоді отримаємо $2\,\boldsymbol{x}\sum_{i=1}^{n} p_i - 2\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = 0$ або формулу вагового середнього $\boldsymbol{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{[\boldsymbol{px}]}{[\boldsymbol{p}]} = \overline{\boldsymbol{X}}.$.

Важливою перевагою методу найменших квадратів є також і те, що задача вирівнювання, яка розв'язується на його підставі, має бути найбільш простою у порівнянні з іншими методами.

1.3. ОСНОВНІ ШЛЯХІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВИРІВНЮВАННЯ.

Сумісне вирівнювання геодезичних вимірів кількох величин за методом найменших квадратів є задачею на умовний екстремум. Вимагається знайти мінімум функції за умовою . $[p\,v^2] = \min,$. коли перемінні v_i пов'язані незалежними умовними рівняннями (1.3). Для розв'язання цієї задачі застосовують основні наступні способи: **- абсолютного екстремуму,** . **- з невизначеними множниками**, . і **комбіновані**. .

Перший спосіб вирівнювання називають **параметричним,** а другій спосіб – називають **корелатним**. Ці два способи вирівнювання є еквівалентними двома обчислювальними прийомами розв'язання однієї і тієї самої задачі. .

Суть параметричного способу полягає у тому, що вибирають такі незалежні невідомі параметри $T_1,..,T_к$, які не пов'язані між собою ні якими математичними співвідношеннями і функціями яких можуть бути виражені всі виміряні вели - чини X_i (i =1,…, n), тобто $X_i = \boldsymbol{f}_i\,(\boldsymbol{T_1,..,T_к})$, (i =1,…, n). (1.8)

Тому рівності (1.8) повинні виражати існуючі між виміряними величинами X_i залежності (1.1). Покажемо, що для цього по

винна задовольняти рівність $n - k = r$, .
де n – кількість виміряних величин X_i; k – число необхідних невідомих $T_к$; r – число надлишкове виміряних величин (1.1).
. Запишемо систему (1.8) у вигляді двох груп: .

1–а група .

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = f_1\ (T_1, T_2, \ldots\ldots, T_к)\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_к = f_к\ (T_1, T_2, \ldots\ldots, T_к). \end{array}\right\}$$

2 – а група .

$$\left.\begin{array}{l} X_{к+1} = f_{к+1}\ (T_1, T_2, \ldots T_к); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = f_n\ (T_1, T_2, \ldots\ldots, T_к). \end{array}\right\} \qquad (1.9)$$

Всі невідомі T_j із 1 – й групи рівнянь (1.9) можна виразити у вигляді функцій невідомих $X_1, X_2, \ldots X_к$, тобто

$$T_j = F_j\ (X_1, X_2, \ldots, X_к) \qquad (j = 1,2,\ldots,k). \qquad (1.10)$$

Підставляючи у другу групу рівностей (1.9) замість $T_1, T_2, .., T_к$, які знайдені в (1.10), їх вирази F_j, отримаємо (n – k) рівнянь, які зв'язують між собою невідомі X_i. Але в темі (1.1) установлено, що число невідомих умовних рівнянь, яке включимо в систему (1.1), повинно дорівнювати числу надлишкове виміряних величин, тобто - r. Тому отримаємо вираз $n - k = r$, якій і вимагалося довести. .

Висновок, який отриманий в рівності (1.8), можна сформулювати і таким чином**:** число необхідних невідомих T, що незалежно від того, вибирають їх з числа виміряних або невиміряних величин, повинно дорівнювати числу величин X, яке необхідно виміряти, щоб однократно знайти значення всіх шуканих величин. .

Нехай, наприклад, вимагається визначити на площині положення пункту відносно двох інших пунктів, які задані пло-

скими прямокутними координатами x_1, y_1, x_2, y_2. В цьому випадку можуть бути виміряні п'ять елементів трикутника – три кути і дві сторони, з яких необхідно виміряти тільки будь – які два елементи. Але в якості необхідних невідомих **T** можна обрати також і шукані абсцису x_3 і ординату y_3 вершини трикутника, яку визначать теж дві величини. Відомо, що в геодезичній практиці ніколи не обмежуються вимірами необхідних величин, а завжди вимірюють також і надлишкові[2] . .

Так, у вимірювальних роботах змагаються в трикутнику виміряти три кути, хоча для його розв'язання при наявності однієї відомої сторони достатньо двох; теодолітні, висотні і нівелірні ходи завжди опираються не менш ніж на два опорних пункти; пряму засічку здійснюють не менш ніж на три напрямки, хоча достатньо двох; обернену засічку виконують не менш ніж на чотири напрямки, в той же час як достатньо трьох; в суцільних мережах тріангуляції виконують вдвічі більше необхідних вимірів, тощо. Зрозуміло, число необхідних і число надлишкових величин залежать від умов поставленої задачі, від того, що вимагається отримати в результаті вирівнювання. .

. Багатократні виміри окремих величин, як відомо, підвищують їх точність лише до відомої степені, після цього ці виміри будуть вже малоефективні через те, що вплив де – яких джерел систематичних похибок повністю виключити чи компенсувати неможливо. Виміри же надлишкових величин є наступним істотним кроком у підвищенні точності величин. Вони дозволяють використовувати для визначення шуканих величин результати вимірів, виконаних в інших умовах. .

Наприклад, вимір третього кута у трикутнику істотно підвищує точність всіх кутів, якщо рахувати, що для кожного кута можна отримати два значення: безпосередньо виміряне і обчислене як додаток до 180°, тобто до суми інших двох кутів плоского трикутника. Далі розглянемо основні дії з матри-

цями, які будемо у подальшому використовувати в процесі вирівнювання. .

1.4. ОСНОВНІ ДІЇ З МАТРИЦЯМИ, ПРИ ВИРІВНЮВАННІ.

1.4.1. Загальні відомості про матриці. .

Наступні відомості з теорії матриць наведені у обсязі, який необхідний для наступного викладання матеріалу з курсу.

Таблиця чисел, яка містить m – рядків та n – стовпців, називається матрицею розміру m × n. .

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1} a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}. \qquad (1.11)$$

Числа a_{ij} - елементи матриці; i – номер рядку (i = 1,2,.., m), j – номер стовпця (j = 1,2,…., n). Якщо m ≠ n – матриця прямокутна. Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців (m = n), називається квадратною. Матриця розміру (1 × n) називається вектор – рядок, а розміру (m ×1) – вектор стовпець. Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулеві ($a_{ij} = 0$), називається нульовою. Елементи a_{ij} квадратичної матриці утворюють її головну діагональ. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$ (i ≠ j), квадратична матриця симетрична. Якщо в квадратичній матриці a_{ij} = 0 (i ≠ j), матриця називається діагональною. Діагональна матриця з елементами a_{ij} = 1 називається одиничною і має вид

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.12)$$

Слід квадратичної матриці - це сума її діагональних елементів:

$$\mathrm{Sp}(A_{nn}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}. \qquad .$$

1.4.2. Складання матриць. .

Матриці однакового розміру можна складати, тобто $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$ або $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. (1.13)

Властивості суми: A + B = B + A; .

A + B +C = (A +B) +C = A + (B +C).

1.4.3. Множення матриць. .

Матриці можна множити, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої.

$C_{mk} = A_{mn} \times B_{nk}$; (i = 1,2,.., m) (j = 1,2,…., k);

$C_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots + a_{in} \times b_{nj}$. (1.14)

Приклад. $C_{23} = A_{22} \cdot B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 11 & 10 & 17 \end{pmatrix}$.

$C_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$; $C_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$; $C_{13} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$; $C_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$; $C_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$; $C_{23} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$.

Властивості добутку:

A×B×C = (A×B) ×C = A× (B×C); A×B ≠ B×A;

A× (B×C) = A×B + A×C – це множення зліва;

(B×C) ×A = B×A + C×A – це множення справа;

0×A = A×0 = 0; E×A = A× E = A;

$\lambda \times A = A \cdot \lambda = \{a_{ij} \cdot \lambda\}$, де λ - число. (1.15)

1.4.4. Транспонування матриць. .

Якщо у матриці A_{mn} замінити місцями рядки і стовпці, то отримаємо транспоновану матрицю $A_{mn}{}^{T}$. .

Приклад. $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{32}{}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (1.16)

Властивості транспонування $\left(A^{T}\right)^{T} = A$;

$(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$; $(A \times B \times C) = C^{T} \times B^{T} \times A^{T}$. (1.17)

Транспонування добутку матриць дорівнює добутку транспонованих матриць, що записані у зворотній послідовності.

Якщо $A = A^{T}$ - матриця симетрична. .

1.4.5. Обчислення обернених матриць.

Квадратна матриця називається неособливою, якщо її визначник не дорівнює нулеві, тобто визначник |A| або det(A) можна побудувати тільки для квадратних матриць. [4] .

Будь – яка неособлива матриця має обернену. Це така матриця A^{-1}, яка будучи помножена на вихідну – A зліва або справа, дає одиничну $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. (1.18)

Для матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, $|A| = 1(+1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2(1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3(+1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 1(50 - 48) - 2(40 - 42) + 3(32 - 35) = -3$. .

Тут det(A) обчислено при i = 1 шляхом розкладення по першому рядку. Те же значення визначника можна отримати по будь-якому іншому рядку або стовпцю матриці. Для нашого прикладу матриці A маємо .

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці:

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(A \times B \times C)^{-1} = C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}$. (1.19)

Обернена матриця добутку дорівнює добутку обернених, які взяті у зворотній послідовності; $(A^{-1})^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$. (1.20)

Приклад. $(A \times B \times C)^{-1}\left(C^{T} \times B^{T} \times A^{T}\right)^{T} =$
$= C^{-1} \times A^{-1} \times A \times B \times C = C^{-1} \times B^{-1} \times E \times B \times C = C^{-1} \times E \times C = E$.

1.4.6. Матрична форма системи лінійних рівнянь.

Запишемо систему лінійних рівнянь виду .

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n + b_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n + b_m = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.21)$$

Матриці коефіцієнтів системи A_{mn} і векторів невідомих X_{n1} та вільних членів B_{m1} дорівнюють .

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1} a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B_{m1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (1.22)$$

Матричний запис системи рівнянь (1.21) .

$$\boldsymbol{A_{mn}\, X_{n1} + B_{m1} = 0.} \qquad (1.23)$$

Приклад розв'язання методом оберненої матриці [8]. .

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$A_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $X_{n1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B_{m1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Визначник матриці A_{mn} дорівнює $|A_{mn}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$=1\cdot1\cdot3 - 2\cdot2\cdot1 - 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot3 - 2\cdot2\cdot1 = 3 - 4 - 4 - 1 - 12 - 4 = -22$

і алгебраїчні доповнення до елементів цієї матриці: .

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$.

Оскільки вихідна матриця є симетричною, то відповідна їй обернена матриця ${A_{mn}}^{-1}$ буде також симетричною і тому обчислення значень A_{21}, A_{31}, A_{32} опущено. Обернена матриця дорівнює ${A_{mn}}^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ -8 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язок матричного рівняння дорівнює $\boldsymbol{X_{n1} = -{A_{mn}}^{-1} B_{m1}} =$

$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ -8 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -1\cdot3 & -8\cdot-1 & 5\cdot2 \\ -8\cdot3 & 2\cdot-1 & -4\cdot2 \\ 5\cdot3 & -4\cdot-1 & -3\cdot2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 15 \\ -34 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}682 \\ -1{,}545 \\ 0{,}591 \end{pmatrix}$. Для контролю розв'язання результати обчислень підставимо у вихідну систему

$$\left.\begin{aligned} 0{,}682 + 2(-1{,}545) - 0{,}591 + 3 &= 0{,}001 \\ 2\cdot0{,}682 - 1{,}545 + 2\cdot0591 - 1 &= 0{,}001 \end{aligned}\right\}$$

-0,682+ 2(-1,545)+3·059 + 2= 0,001.

Розходження 0,001 знаходяться в межах точності обчислень і тому вважаємо, що розв'язання системи виконано правильно.

1.4.7. Диференціювання матричних виразів.

Якщо вектор – функція і вектор – аргументів

$$F_m(X_{n1}) = \begin{bmatrix} f_1(X_{n1}) \\ f_2(X_{n1}) \\ \vdots \\ f_m(X_{n1}) \end{bmatrix} \qquad X_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (1.24)$$

то

$$\frac{\partial F_m(X_{n1})}{\partial X_{n1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \frac{\partial f_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}. \qquad (1.25)$$

Приклад.

$$F_2(X_{31}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & x_3 \\ 3x_1 & +3x_2 & -4x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F_2(X_{31})}{\partial X_{31}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & +3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Якщо $F_m(X_{n1}) = A_{mn} X_{n1}$, то $\frac{\partial (A_{mn} X_{n1})}{\partial X_{n1}} = A_{mn}$.

Якщо $F_m(X_{n1}) = X_{1n}{}^T A_{nn} X_{n1}$ і A_{nn}- симетрична матриця,

то $$\frac{\partial (X_{1n}{}^T A_{nn} X_{n1})}{\partial X_{n1}} = 2X_{n1}{}^T A_{nn}. \qquad (1.26)$$

Якщо A_{nn}= E, то $$\frac{\partial (X_{1n}{}^T X_{n1})}{\partial X_{n1}} = 2X_{1n}{}^T. \qquad (1.27)$$

$X_{1n}{}^T A_{nn} X_{n1} = x_1^2 a_{11} + 2x_1 x_2 a_{12} + \ldots + 2x_1 x_n a_{1n} + x_2^2 a_{22} + \ldots +$

$2x_2x_na_{2n}$ + ….+ $x_n^2a_{nn}$ - квадратична форма. (1.28)

ГЛАВА 2. ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ.

2.1. СУТЬ СПОСОБУ. ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПОПРАВОК.

Якщо маємо необхідні невідомі $T_1, T_2,\ldots T_к$, через які уявляють виміряні величини $X_1, X_2,\ldots, X_n$ у вигляді системи функцій

$$\boldsymbol{X_i = f_i\,(T_1, T_2,\ldots\ldots,T_к)} \quad (i = 1,\ldots, n), \qquad (2.1)$$

то рівності такого виду називають **параметричними рівняннями зв'язку**. Вибір необхідних невідомих - важливий момент у цьому способі вирівнювання, від нього залежить обсяг обчислень і міра складності рівнянь, які розв'язуються. Позначимо вирівняні значення виміряних величин через $x_i' = x_i + v_i$, де v_i - поправки до виміряних значень x_i, які отримані із вирівнювання. Вирівняні значення необхідних невідомих позначимо через **t** і запишемо $x_i + v_i = f_i\,(t_1,\ldots,t_к)$ (2.2)

або $\boldsymbol{v_i = f_i\,(t_1,\ldots,t_к) - x_i}$ (i = 1,…..,n). (2.3)

Тепер умову $[p\,v^2]$ = min можна подати у вигляді .

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i}\,(\boldsymbol{f_i\,(t_1,\ldots,t_к)} - \boldsymbol{x_i})^2 = \text{min}. \qquad (2.4)$$

У лівій частині виразу (2.4) невідомі тільки величини **t**, тому його можна уявити у вигляді деякої функції . $F(t_1,\ldots,t_к)$, тобто $F\,(t_1\ldots t_к) = \text{min}$. (2.5)

Таким чином, **розв'язання задачі вирівнювання за способом умовного екстремуму виконується через впровадження до задачі на абсолютний екстремум**

необхідних невідомих Т. Для цього потрібно скласти визначену систему рівнянь $\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0$ (j = 1, 2,….., k), (2.6)

з якої можна отримати невідомі t_1,…..,$t_к$. Однак, якщо рівняння (2.6) мають не лінійний вид, то розв'язання їх майже завжди опиняється неможливим. Тому цю задачу розв'язують наступним чином. Для параметрів t_j знаходять приблизні значення t_j^0, причому із такою точністю, щоб можна було привести функції .

$$f_i\,(t_1,\ldots,t_к) = x_i + v_i$$

до лінійного виду шляхом розкладення в ряд Тейлора, в якому знехтують членами розкладення другого і більш високих порядків. Це дає змогу розв'язати задачу вирівнювання, тобто привести до визначеного, завжди однакового порядку обчислень. Запишемо невідомі t_1,…..,$t_к$ у виді $t_j = t_j^0 + \tau_j$ (j = 1, 2,….., k), (2.7)

де t_j^0 - наближені значення; τ_j - невідомі поправки до них. Підставимо ці значення t_j в рівності (2.3) і отримаємо

$$v_i = f_i\,(t_1^0 + \tau_1,\ldots, t_к^0 + \tau_к) - x_i \qquad (i = 1,\ldots,n). \quad (2.8)$$

Далі розкладемо функцію f_i в ряд Тейлора і знайдемо

$$v_i = f_i\,(t_1^0,\ldots, t_к^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)\tau_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_к}\right)\tau_к + C - x_i, \qquad (2.9)$$

де С – сума всіх членів розкладання, які не лінійні.

Приблизні значення t_1^0,…, $t_к^0$ повинні бути знайдені з такою точністю, щоб можна було знехтувати величиною суми - С. Іншими словами, всі поправки τ_j повинні бути

настільки малі, щоб можна було знехтувати всіма нелінійними членами розкладення. Зауважимо, що отримати достатньо точні значення t_j^0 іноді буває дуже складно, наприклад, при вирівнюванні великих мереж тріангуляції. Знехтуємо в рівності (2.9) величиною С, одержимо .

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)\tau_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_к}\right)\tau_к + \{ f_i\,(t_1^0, \ldots, t_к^0) - x_i \}. \qquad (2.10)$$

Введемо позначення $\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right) = a_{i1}$, $\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_2}\right) = a_{i2}$,……,$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_к}\right) = a_{iк}$,

$$f_i\,(t_1^0, \ldots, t_к^0) - x_i = x_1^0 - x_i = l_i. \qquad (2.11)$$

Тепер запишемо систему рівнянь поправок .

$$\boldsymbol{v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \ldots\ldots + a_{iк}\tau_к + l_i} \quad (i = 1,\ldots..,n). \qquad (2.12)$$

Лінійні рівняння (2.12) - **це параметричні рівняння поправок, або просто рівняння поправок**. .

Якщо функції $f_i\,(t_1,\ldots..,t_к)$ мають лінійний вид, то приблизні значення t_j^0 можна не обчислювати. Нехай рівняння

$$x_i + v_i = f_i\,(t_1,\ldots..,t_к) = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots\ldots + a_{iк}t_к + L_i.$$

Тоді $l_i = L_i - x_i$ і рівняння поправок приймуть вид

$$\boldsymbol{v_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots\ldots + a_{iк}t_к + l_i} \quad \textbf{(i =1,…..,n)}. \qquad (2.13)$$

Однак в практиці вирівнювання приблизні значення t_j^0 часто обчислюють і в тих випадках, коли параметричні рівняння мають лінійний вид. Тоді .

$$v_i = a_{i1}t_1^0 + a_{i2}t_2^0 + \ldots\ldots + a_{iк}t_к^0 + L_i - x_i$$

і рівняння поправок приймають вид (2.12). Це полегшує подальші вирівнювання, через те, що простіше обчислювати малі поправки τ_j замість t_j.

В матричній формі система рівнянь (2.12) має вигляд

$$\mathbf{V}\,(n\times 1) = \mathbf{A}\,(n\times k)\cdot\boldsymbol{\tau}\,(k\times 1) + \mathbf{L}\,(n\times 1), \qquad (2.14)$$ де

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{iк} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nк} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix},\quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

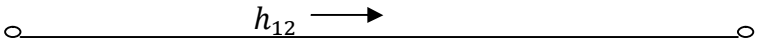
У загальному вигляді параметричні рівняння поправок мають вид

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 + \ldots + a_{1к}\tau_к + l_1, \\ v_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + \ldots + a_{2к}\tau_к + l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_{n1}\tau_1 + a_{n2}\tau_2 + \ldots + a_{nк}\tau_к + l_n. \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

2.2. ВИДИ ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ПОПРАВОК.

Параметричні рівняння мають наступні види.

Вид 1.Скласти рівняння поправок для нівелірного ходу між пунктами 1 і 2 (рис.2.1) з відмітками H_1 і H_2.



$1(H_1)$ $2(H_2)$

Рис 2.1.

Розв'язання:

1. Позначимо через $H_1 = T_1$ і $H_2 = T_2$ істинні значення відміток 1 і 2 пунктів. Тоді вихідне рівняння зв'язку для перевищення дорівнює $\overline{h_{12}} = T_2 - T_1$. (2.17)

2. Хоча це рівняння має лінійний вид, можна формально виконати його лінеаризацію. Для цього одержимо коефіцієнти $a_{11} = \frac{\partial \overline{h_{12}}}{\partial T_1} = -1$, $a_{12} = \frac{\partial \overline{h_{12}}}{\partial T_2} = +1$

і $$l_{12} = (t_2^0 - t_1^0) - h_{12}, \qquad (2.18)$$

де t_2^0 і t_1^0 - наближені значення параметрів H_1 і H_2.

3. Параметричне рівняння дорівнює .

$$\boldsymbol{v_{12} = (\tau_2 - \tau_1) + l_{12}}. \qquad (2.19)$$

4. Якщо t_1^0 = 100,000 м, t_2^0= 149,550 м, h_{12}= 49,545м,

l_{12} = (149,550 -100,000) - h_{12} = 49,550 - 49,545 =+0,005 м

і тоді $v_{12} = \tau_2 - \tau_1 + 0{,}5$,см. .

Зауважимо, що якщо вихідне рівняння зв'язку є лінійним, то коефіцієнти рівнянь не залежать від t_j^0. .

Вид 2. Скласти рівняння поправок для сторони трилатерації - S між двома пунктами А і В довжиною S = 1635,580 м і дирекційним кутом – α (рис.2.2).

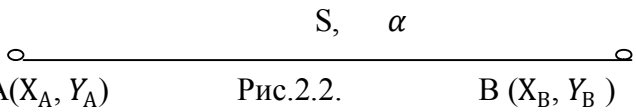


Рис.2.2.

Розв'язання: 1. Вихідне рівняння зв'язку має вид

$$S = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}, \qquad (2.20)$$

де X і Y - координати точок А і В.

2. Далі знаходимо коефіцієнти .

$a_{11}=(\frac{\partial S}{\partial X_A})= -\frac{X_B - X_A}{S} = -\frac{S\ \cos\alpha}{S} = -\cos\alpha,$.

$a_{12} = \left(\frac{\partial S}{\partial Y_A}\right) = -\frac{Y_B - Y_A}{S} = -\frac{S\ \sin\alpha}{S} = -\sin\alpha$ і аналогічно

$a_{13}=\left(\frac{\partial S}{\partial X_B}\right) = +\cos\alpha,$ $a_{14}=\left(\frac{\partial S}{\partial Y_B}\right) = +\sin\alpha,$ (2.21)

де α - дирекційний кут сторони в напряму від А до В, який обчислюється за наближеними координатами x_A^0, y_A^0,x_B^0, y_B^0.

Вільний член $l_S = \sqrt{(x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_A^0 - y_B^0)^2} - S.$ (2.23)

Остаточно маємо рівняння поправок для сторони S

$\boldsymbol{v_S = -\cos\alpha_i\,\delta x_A - \sin\alpha_i\,\delta y_A + \cos\alpha_i\,\delta x_B + \sin\alpha_i\,\delta y_B + l_S}$. (2.24)

3. Якщо $x_B^0 - x_A^0 = \Delta x^0 = 1315{,}540$ м, .

$y_A^0 - y_B^0 = \Delta y^0 = 971{,}806$ м, l_S=0,021м,

тоді рівняння поправок для сторони S має вид: .

$v_S = +0{,}804\,\delta x_A + 0{,}594\,\delta y_A - 0{,}804\,\delta x_B - 0{,}594\,\delta y_B + 0{,}021.$

4. Рівняння поправок для дирекційного кута α_i сторони S визначаються із рівняння зв'язку виду .

$$\alpha = tg^{-1}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = tg^{-1}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$.

Коефіцієнти a_{ij} дорівнюють .

$$a_{11} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_A}\right) = -\rho\frac{-\frac{\Delta y}{\Delta x^2}}{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \rho\frac{\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \rho\frac{S\sin\alpha}{S^2} = \frac{\rho}{S}\sin\alpha,$$

$$a_{12} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_A}\right) = -\rho\frac{\frac{1}{\Delta x}}{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = -\rho\frac{\Delta x}{\Delta x^2+\Delta y^2} = -\rho\frac{S\cos\alpha}{S^2} = -\frac{\rho}{S}\cos\alpha\ .$$

і аналогічно $a_{13} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial X_B}\right) = -\frac{\rho}{S}\sin\alpha,$ $\quad a_{12} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial Y_B}\right) = \frac{\rho}{S}\cos\alpha,$

а вільний член $\quad l_{\alpha_i} = \text{arc}\,tg\,\frac{y_A^0 - y_B^0}{x_B^0 - x_A^0} - \alpha_i = \text{arc}\,tg\,\frac{\Delta y^0}{\Delta x^0} - \alpha_i.$

5.Остаточно рівняння поправок для дирекційного кута α

$$\boldsymbol{v}_{\alpha_i} = \frac{\rho}{S}(\sin\alpha_i\delta x_A - \cos\alpha_i\,\delta y_A - \sin\alpha_i\delta x_B + \cos\alpha_i\,\delta y_B) + l_{\alpha_i}. \quad (2.25)$$

Вид 3. Скласти рівняння поправок для кута β, який виміряний на пункт А між напрямками на пункти В і С (рис.2.3).

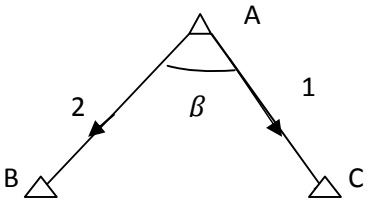


Рис.2.3

Розв'язання: $\beta = \alpha_{AC} - \alpha_{AB}$, де α_{AC} ,α_{AB} – дирекціоні кути напрямків АС і АВ. Вільний член дорівнює $\quad l_\beta = l_{\alpha_{AC}} - l_{\alpha_{AB}}$.

Рівняння поправок для кута β $\boldsymbol{v}_\beta = \boldsymbol{v}_{\alpha_{AC}} - \boldsymbol{v}_{\alpha_{AB}} + \boldsymbol{l}_\beta$. (2.26)

Вид 4. Скласти рівняння поправок для напрямку з пункту А на пункт В. (рис.2.4). Розв'язання. .

Так як напрямок N_{AB} є кут між стороною AB і нульовим діаметром лімба,то запишемо вираз

$$v_{N_{\text{AB}}} = v_{\alpha_{\text{AB}}} - v_{\alpha_0}. \qquad (2.27)$$

Користуючись умовою (2.26), одержимо .

$$v_N = -\delta_{\alpha_0} + v_{\alpha_{\text{AB}}} + l_{\alpha_{\text{AB}}}. \qquad (2.28)$$

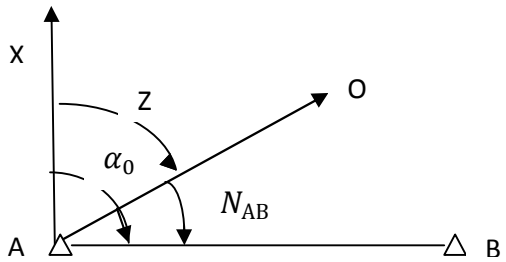


Рис.2.4

Величина α_0 - це орієнтуючий кут (дирекційний кут нульового діаметру лімба). .

Вид 5. Скласти рівняння поправок для дирекційних кутів двох сторін AB і AC (рис.2.3), якщо їх виміряні значення дорівнюють $\alpha_{\text{AB}} = 182^0 11' 03{,}5''$, $\alpha_{\text{AC}} = 253^0 39' 59{,}9''$.

Розв'язання. Запишемо у загальному виді рівняння поправок(2.25) для дирекційного кута α_{i} сторони S

$$v_{\alpha_{\text{i}}} = \frac{\rho}{\text{S}} (\sin\alpha_{\text{i}} \delta x_A - \cos\alpha_{\text{i}}\, \delta y_A - \sin\alpha_{\text{i}} \delta x_{\text{B}} + \cos\alpha_{\text{i}}\, \delta y_{\text{B}}) + l_{\alpha_{\text{i}}},$$

$$l_{\alpha_{\text{i}}} = \text{arc}\, tg\, \frac{\Delta y'}{\Delta x'} - \alpha_{\text{i}}. \qquad .$$

Для нашого прикладу: .

x'_{A}= 40120, 047 м; y'_{A} =36999,739 м; x'_{B}= 39022,182 м;

y'_{B} = 36957,868 м; x'_{C}= 39679,759 м; y'_{C}= 35497,296 м;

S'_{AB} = 1099 м, S'_{AC} = 1566 м

$v_{\alpha_{AB}} = -7{,}16\delta x_A + 187{,}60\delta y_A + 7{,}16\delta x_B - 187{,}60\ \delta y_B + l_{\alpha_{AB}}$, .
де $l_{\alpha_{AB}} = 0{,}7''$, .
$v_{\alpha_{AC}} = -126{,}43\ \delta x_A + 37{,}05\ \delta y_A + 126{,}43\ \delta x_C - 37{,}05\ \delta y_C + l_{\alpha_{AC}}$, ,
де $l_{\alpha_{AC}} = -0{,}3''$. .

Вид 6. Скласти рівняння поправок для визначення вирівняних трьох кутів x_1, x_2, x_3 плоского трикутника, якщо виміряні значення цих кутів відповідно дорівнюють

$x_1' = 61^0\ 17'\ 35''$, $x_2' = 55^0 39' 27''$, $x_3' = 63^0\ 02'\ 52''$.

Розв'язання.

Із трьох невідомих x_1, x_2, x_3, два будуть незалежними, а третє – є їх функцією. Виберемо в якості незалежних невідомих x_1, x_2 і напишемо вихідне рівняння зв'язку $x_3 = 180^0 - (x_1 + x_2)$. За числом вимірів складемо три рівняння поправок .

$$x_1 - 61^0 17' 35'' = v_1, \quad .$$
$$x_2 - 55^0\ 39' 27'' = v_2, \quad .$$
$$180^0 - (x_1 + x_2) - 63^0\ 02'\ 52'' = v_3. \quad .$$

Для полегшення обчислень введемо приблизні значення невідомих. .
Тоді $x_1 = 61^0\ 17'\ 35'' + \delta x_1$, $x_2 = 55^0\ 39'\ 27'' + \delta x_2$,
$$x_1 + x_2 = 116^0 57' 02'' + \delta x_1 + \delta x_2. \quad .$$
Тепер рівняння поправок приймуть вид

$$\left.\begin{aligned} \delta x_1 &= v_1; \\ \delta x_2 &= v_2; \\ -\delta x_1 - \delta x_2 + 6'' &= v_3. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (2.29)$$

Вид 7. Скласти рівняння поправок , які виникають при вирівнюванні нівелірної мережі (рис.2.5), якщо в якості необхідного прийнято: а) перевищення по ходу 1 - h_1; б) відмітка вузлової точки.

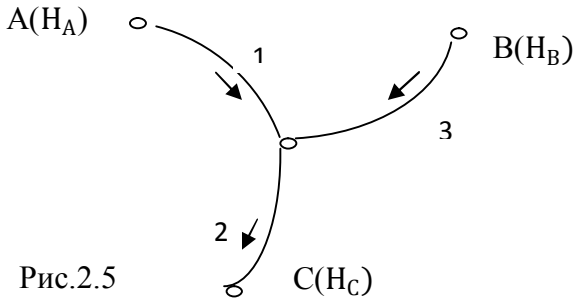


Рис.2.5

Розв'язання. Запишемо вихідні рівняння зв'язку:
а) h_1=X, $h_2 = -X - H_A + H_C$, h_3=X+H_A+H_B
і рівняння поправок будуть .
$v_1 = \delta x + l_1$; $v_2 = -\delta x + l_2$; $v_3 = \delta x + l_3$, де:

$l_1 = x^0 - h_1$; $l_2 = -x^0 - H_A + H_C - h_2$; $l_3 = x^0 + H_A + H_B - h_3$.

Якщо за x^0 приймемо виміряне перевищення h_1, тоді l_1=0;

б) якщо приймемо в якості $x^0 = H_A + h_1$. Тоді
$v_1 = \delta x + l_1$; $v_2 = -\delta x + l_2$; $v_3 = \delta x + l_3$,
l_1=0, $l_2 = H_C - (x^0 + h_2)$, $l_3 = x^0 - (H_B + h_3$.

2.3. НОРМАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

У процесі вирівнювання визначають виправлені (вирівняні) значення виміряних величин. Для цього обчислюють ймовірні значення поправок v_i із системи рівнянь виду

$$\boldsymbol{v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \ldots\ldots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad (i = 1,.., n)}$$

згідно з принципом найменших квадратів при якому повинна дотримуватись умова $[\mathrm{p}\, v^2] = \min$.

Рахуючи рівності (2.16), умову $[\mathrm{p}\, v^2] = \min$ можна записати так: $[\mathrm{p}\, v^2] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} p_i(a_{\mathrm{i}1}\tau_1 + a_{\mathrm{i}2}\tau_2 + \cdots + a_{\mathrm{i}\kappa}\tau_\kappa + l_i)^2 =$

$$= \mathrm{F}\ (\tau_1. \ldots . \ldots \tau_k) = \min. \qquad (2.28)$$

Задача розв'язується визначеною системою рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0 \ \ (\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k}). \qquad (2.29)$$

Візьмемо часткові похідні і прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2\mathrm{p}_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + \ldots\ldots + 2\mathrm{p}_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0. \qquad (2.30)$$

Рахуючи вираз (2.12) знаходимо $\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial \tau_1} = a_{\mathrm{i}1}$. Тепер скоротимо рівність (2.30) на 2 і, після перетворення, запишемо

$$\frac{\partial F}{2\partial \tau_1} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{p}_1 v_1\, a_{\mathrm{i}1} = [pa_1 v] = 0. \qquad (2.31)$$

На підставі тих же рівностей (2.12) отримаємо $\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial \tau_2} = a_{\mathrm{i}2}$, $\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial 3} = a_{\mathrm{i}3}, \ldots\ldots,$ $\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial \tau_\kappa} = a_{\mathrm{i}\kappa}$ і аналогічно тому, як був отриманий вираз (2.31) .

$[pa_2 v] = 0,$ $[pa_3 v] = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, [pa_\kappa v] = 0.$

Таким чином, отримані скорочені рівності .

$$\left.\begin{array}{r} [pa_1 v] = 0; \\ [pa_2 v] = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_\kappa v] = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.32)$$

Підставимо в рівності (2.32) замість v_i праві частини рівнянь поправок (2.12) і отримаємо k – лінійних рівнянь з

k – невідомими $\tau_1, \dots, \tau_k$. Запишемо ще раз систему параметричних рівнянь поправок (2.12) .

$$v_i = a_{i\,1}\tau_1 + a_{i\,2}\tau_2 + \dots\dots + a_{i\,к}\tau_к + l_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Помножимо обидві частини кожного з цих рівнянь на $p_i a_{i1}$ відповідно та просумуємо результати, отримаємо

$$p_1 a_{11} v_1 + p_2 a_{21} v_2 + p_3 a_{31} v_3 + \dots\dots + p_n a_{n1} v_n = [pa_1 v] =$$

$$=[pa_1 a_1]\,\tau_1 + [pa_1 a_2]\,\tau_2 + [pa_1 a_3]\,\tau_3 + \dots + [pa_1 a_k]\,\tau_k + [pa_1 l].$$

Помножимо ті ж рівності на $p_i a_{i2,}$ і знайдемо $[pa_2 v] =$

$$[pa_1 a_2]\,\tau_1 + [pa_2 a_2]\,\tau_2 + [pa_2 a_3]\,\tau_3 + \dots + [pa_2 a_k]\,\tau_k + [pa_2 l].$$

Аналогічно отримаємо $[pa_3 v] =$.

$=[pa_1 a_3]\tau_1 + [pa_2 a_3]\,\tau_2 + [pa_3 a_3]\,\tau_3 + \dots + [pa_3 a_k]\,\tau_k + [pa_3 l]$; .

……

$[pa_k v] = [pa_1 a_k]\tau_1 + [pa_2 a_k]\,\tau_2 + [pa_3 a_k]\,\tau_3 + \dots + [pa_k a_k]\,\tau_k + [pa_k l]$

І отже рівності (2.32) приймуть вид наступних рівнянь

$$\boldsymbol{[pa_1 a_1]\,\tau_1 + [pa_1 a_2]\,\tau_2 + \dots\dots + [pa_1 a_k]\,\tau_k + [pa_1 l] = 0,}$$
$$\boldsymbol{[pa_1 a_2]\,\tau_1 + [pa_2 a_2]\,\tau_2 + \dots\dots + [pa_2 a_k]\,\tau_k + [pa_2 l] = 0,} \quad .$$
$$\boldsymbol{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$
$$\boldsymbol{[pa_1 a_к]\,\tau_1 + [pa_2 a_к]\,\tau_2 + \dots + [pa_к a_k]\,\tau_k + [pa_к l] = 0}, \quad (2.33)$$

або в матричній формі $\boldsymbol{A^T PA\,\tau + L = 0}$ (2.33')

Рівняння (2.33) називають **нормальні рівняння,** вони являють собою визначену систему **k**-лінійних рівнянь з **k**-невідомими. Із розв'язання цієї системи отримують поправки τ до приблизних значень необхідних невідомих.

В літературі **нормальні рівняння** записують також в **символах Гаусса:** .

- у випадку нерівноточних вимірів, коли ваги p_i різні**:** .

$$\left.\begin{array}{l}
[\boldsymbol{paa}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{pab}]\ \boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{pag}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{pal}]=\mathbf{0},\\
[\boldsymbol{pab}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{pbb}]\ \boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{pbg}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{pbl}]=\mathbf{0},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[\boldsymbol{pag}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{pbg}]\ \boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{pgg}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{pgl}]=\mathbf{0},
\end{array}\right\} \quad (2.33,\ а)$$

- у випадку рівноточних вимірів, коли всі $p_i=1$, система рівнянь (2.33, а) тоді приймає більш спрощений вид .

$$\left.\begin{array}{l}
[\boldsymbol{aa}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{ab}]\ \boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{ag}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{al}]=\mathbf{0},\\
[\boldsymbol{ab}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{bb}]\ \boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{bg}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{bl}]=\mathbf{0},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[\boldsymbol{ag}]\ \boldsymbol{\delta x_1}+[\boldsymbol{bg}]\boldsymbol{\delta x_2}+\ldots\ldots+[\boldsymbol{gg}]\ \boldsymbol{\delta x_k}+[\boldsymbol{gl}]=\mathbf{0}.
\end{array}\right\} \quad (2.33,б)$$

В системі умовних рівнянь A τ + L = V та нормальних рівнянь A^TPA τ + L = 0 можна виділити матриці

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots\ \ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & a_{nk}\end{bmatrix} \quad \text{і} \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11}a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12}a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots\ \ \vdots & & \vdots\\ a_{1k}a_{2} & \cdots & a_{nk}\end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

або в символах Гаусса

$$A=\begin{bmatrix} a_1\ b_1 & \cdots & g_1\\ a_2\ b_2 & \cdots & g_2\\ \vdots\ \ \vdots & & \vdots\\ a_n\ b_n & \cdots & g_n\end{bmatrix}, \qquad A^T=\begin{bmatrix} a_1\ a_2 & \cdots & a_n\\ b_1\ b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots & & \vdots\\ g_1\ g_2 & \cdots & g_n\end{bmatrix} \quad (2.34,\ а)$$

$$\text{і} \quad P=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & p_2 & \cdots & 0\\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{bmatrix},\ \tau=\begin{bmatrix} \tau_1\\ \tau_2\\ \vdots\\ \tau_k\end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Тоді система рівнянь (2.32) запишемо в матричному виді:
- при нерівноточних вимірах .

$$\underset{n\times n}{\mathbf{P}} \times \underset{k\times n}{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} \times \underset{n\times 1}{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \qquad (2.35)$$

.

- при рівноточних вимірах

$$\underset{k\times n}{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} \times \underset{n\times 1}{\mathbf{V}} = \mathbf{0}. \qquad (2.36)$$

.

Підставимо формулу (2.14) в формули (2.35), (2.36) і тоді отримаємо в матричному виді систему нормальних рівнянь з невідомими τ:

- для нерівноточних вимірів $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{PA}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{L} = \mathbf{0}$, (2.37)

звідки $\boldsymbol{\tau} = -\,(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\mathrm{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{L},$ (2.37а)

- для рівноточних вимірів $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{L} = \mathbf{0}$, (2.38)

звідки $\boldsymbol{\tau} = -\,(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathrm{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\,\mathbf{L}\,.$ (2.38а)

Для нерівноточних вимірів добуток $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{PA}\,\boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\,\boldsymbol{\tau} =$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots\ \vdots & & \vdots \\ g_1 g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{p}_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{p}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1\mathrm{p}_1 & a_2\mathrm{p}_2 & \cdots & a_n\mathrm{p}_n \\ b_1\mathrm{p}_1 & b_2\mathrm{p}_2 & \cdots & b_n\mathrm{p}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1\mathrm{p}_1 & g_2\mathrm{p}_2 & \cdots & g_n\mathrm{p}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & \cdots & [pag] \\ [pab] & [pbb] & \cdots & [pbg] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [pag] & [pbg] & \cdots & [pgg] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}.$$

Тобто

$$\boldsymbol{A^T}\mathbf{P}\ \mathbf{A}\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\ \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} [paa]\tau_1 + & [pab]\tau_2 + & \cdots + [pag]\tau_k \\ [pab]\tau_1 + & [pbb]\tau_2 + & \cdots + [pbg]\tau_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [pag]\tau_1 + & [pbg]\tau_2 + & \cdots + [pgg]\tau_k \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

Добуток $\boldsymbol{A^T}\mathbf{P}\ \mathbf{L}$ дорівнює .

$$\boldsymbol{A^T}\mathbf{P}\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots\ \vdots & & \vdots \\ g_1 g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1\ 0 & \cdots & 0 \\ 0\ \ \mathrm{p}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0\ \ 0 & \cdots & \mathrm{p}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 a_1 & p_2 a_2 & \cdots & p_n a_n \\ p_1 b_1 & p_2 b_2 & \cdots & p_n b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1 g_1 & p_2 g_2 & \cdots & p_n g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \vdots \\ [pgl] \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Сума A^TPA $\tau + A^T$P L = 0 складає систему нормальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{paa}]\boldsymbol{\tau_1} + & [\boldsymbol{pab}]\boldsymbol{\tau_2} + & \cdots + [\boldsymbol{pag}]\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}} + & [\boldsymbol{pal}] \\ [\boldsymbol{pab}]\boldsymbol{\tau_1} + & [\boldsymbol{pbb}]\boldsymbol{\tau_2} + & \cdots + [\boldsymbol{pbg}]\boldsymbol{\tau_k} + & [\boldsymbol{pbl}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\boldsymbol{pag}]\boldsymbol{\tau_1} + & [\boldsymbol{pbg}]\boldsymbol{\tau_2} + & \cdots + [\boldsymbol{pgg}]\boldsymbol{\tau_k} + & [\boldsymbol{pgl}] \end{bmatrix} = 0. \quad (2.41)$$

Для рівноточних вимірів матриця (2.41) відрізняється тільки відсутністю матриці P = { $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$}. Систему нормальних рівнянь (2.37) і (2.38) для нерівноточних і рівноточних вимірів в літературі представляють також у вигляді [3]

$$\mathbf{N}\ \boldsymbol{\tau} + \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

або

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{N_{11}\ \tau_1 + N_{12}\tau_2 + \ldots\ldots + N_{1k}\ \tau_k + L_1 = 0,} \\ \boldsymbol{N_{21}\ \tau_1 + N_{22}\tau_2 + \ldots\ldots + N_{2k}\ \tau_k + L_2 = 0,} \\ \boldsymbol{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \boldsymbol{N_{k1}\ \tau_1 + N_{k2}\tau_2 + \ldots\ldots + N_{kk}\ \tau_k + L_n = 0,} \end{array}\right\} \quad (2.43)$$

де $\mathbf{N} = A^T$PA, $\mathbf{L} = A^T$P L. (2.43,а)

Коефіцієнти N_{ij} нормальних рівнянь обчислюють на ЕОМ шляхом перемноження матриць А, Р та A^T за формулами (2.39). Математично вони визначаються за формулами:

- при нерівноточних вимірах .

$$N_{ij}=[pa_ia_j]=p_1a_{1i}a_{1j}+p_2a_{2i}a_{2j}+\ldots+p_na_{ni}a_{nj}\,; \qquad (2.44)$$

- при рівноточних вимірах

$$N_{ij}=[a_ia_j]=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\ldots+a_{ni}a_{nj}. \qquad (2.45)$$

Наприклад, .

$N_{11}=[pa_1a_1]=p_1a_{11}a_{11}+p_2a_{21}a_{21}+\ldots+p_na_{n1}a_{n1}$, .

або $N_{11}=[a_1a_1]=a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}+\ldots+a_{n1}a_{n1}$. .

$$N_{12}=[pa_1a_2]=p_1a_{11}a_{12}+p_2a_{21}a_{22}+\ldots+p_na_{n1}a_{n2},$$

або $N_{12}=[a_1a_2]=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\ldots+a_{n1}a_{n2}$ і т.д.

Аналогічно за формулами (2.40) обчислюють коефіцієнти перетворених вільних членів нормальних рівнянь на ЕОМ за формулами: - при нерівноточних вимірах .

. $L_i=[pa_il]=p_1a_{1i}l_1+p_2a_{2i}l_2+\ldots+p_na_{ni}l_n$,

- при рівноточних вимірах .

$$L_i=[a_il]=a_{1i}l_1+a_{2i}l_2+\ldots+a_{ni}l_n\,. \qquad (2.45)$$

Інколи систему нормальних рівнянь (2.43) записують у скороченому вигляді .

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{N_{11}\,\tau_1+N_{12}\tau_2+\ldots+N_{1k}\,\tau_k+L_1=0,}\\
&\boldsymbol{N_{22}\tau_2+\ldots+N_{2k}\,\tau_k+L_2=0,}\\
&\boldsymbol{\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
&\boldsymbol{N_{kk}\,\tau_k+L_n=0.}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.46)$$

Лінійна система нормальних рівнянь (2.33), (2.46) має наступні властивості. .

1. По діагоналі системи **зліва – вниз - направо** розташовані коефіцієнти, які завжди позитивні, та їх називають **квадратичними**, а вказана діагональ – **квадратичною**.

2. Інші, **не квадратичні коефіцієнти**, розташовуються симетрично відносно квадратичної діагоналі.

Названі властивості системи нормальних рівнянь полегшують їх розв'язання.

Отримавши поправки τ_1, ……,τ_k, далі при допомозі рівнянь (2.12) знаходять поправки $\boldsymbol{v_i}$ і потім вирівняні значення виміряних величин $\boldsymbol{x'_i = x_i + v_i}$ та невідомих $\boldsymbol{t_j = t_j^0 + \tau_j}$. Для контролю вирівнювання може бути застосовані рівняння (2.2) .

$$\boldsymbol{x_i + v_i = f_i\,(t_1,\ldots,t_к)} \qquad \mathbf{(i = 1,\ldots,n).}$$

2.4. ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

Задачу вирівнювання параметричним способом розв'язують у такій послідовності. .

1. Виміряні значення величин x_1 x_2……x_n, а отже, і обчислювані поправки до них v_i, виражають у таких мірах, щоб значення середніх квадратичних похибок - m_i величин - x_i були би в тих же одиницях. .

Наприклад, лінійні величини виражають в дециметрах або в сантиметрах, кутові – в секундах, а мало точні виміри кутів – у хвилинах. Коефіцієнт – k для обчислення ваг за формулою $p_i = \frac{k}{m_i^2}$ вибирають так,

щоб ці ваги були за можливістю близькі до одиниці. Все це полегшує обчислення у процесі вирівнювання.

2. Вибирають необхідні невідомі $t_1,\ldots,t_к$ таким чином, щоб параметричні рівняння поправок (2.12) мали найбільш простий вигляд.

Невідомі не повинні мати математичних зв'язків між собою, а всі виміряні величини повинні виражатися через обрані невідомі. В якості невідомих можуть бути як виміряні, так і невиміряні величини.

3. Всі виміряні величини виражають у виді функцій

$x'_i = f_i\,(t_1,\ldots,t_к)$, (i = 1,…..,n), де $x'_i = x_i + v_i$.

4. Знаходять приблизні значення невідомих $t_1^0, \ldots, t_к^0$ і виражають їх з тим числом десяткових знаків, з яким будуть виражені вирівняні значення.

За формулами (2.11) знаходять коефіцієнти і вільні члени рівнянь поправок (2.12). Для невідомих – **t** повинні бути встановлені такі розмірності, при яких порядок величин коефіцієнтів рівнянь поправок був би за можливістю близький до одиниці.

5.Розвязують систему умовних рівнянь і знаходять коефіцієнти системи нормальних рівнянь, виконують контролі обчислення.

6. Складають і розв'язують систему нормальних рівнянь (2.33), виконують контролі обчислення і в результаті цього отримують поправки $\tau_1, \ldots,\tau_k$.

7. Обчислюють значення поправок v_i (i = 1,…..,n) за допомогою рівнянь (2.12).
8. Отримують вирівняні значення виміряних величин x_i'

за формулою $x_i' = x_i + v_i$ (i = 1,.,n) і невідомих – **t**

за формулою $t_j = t_j^0 + \tau_j$ (j = 1, 2,….., k).

9. Виконують контроль обчислених величин за рівностями $x_i' = f_i\ (t_1,\ldots,t_к)$ (i = 1,….., n) .

Необхідно мати на увазі, що недодержання цих контрольних рівностей може виникати не тільки через похибки обчислень, але і за наслідком недостатньої точності приблизних значень невідомих $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_к^0$.

Ознакою цього будуть недопустимо великі абсолютні значення поправок $\tau_1,.,\tau_k$, тобто такі поправки, при яких неможна знехтувати нелінійними членами розкладення

функцій $f_i\ (t_1^0 + \tau_1,\ldots, t_к^0 + \tau_к)$.

. В цьому випадку, отримані після вирівнювання величини $t_1,\ldots,t_к$ слід приймати лише як уточнені приблизні значення і з ними повторюють все вирівнювання.

Іноді з самого початку вирівнювання видно, що отримати достатньо точні значення $t_1^0, \ldots, t_к^0$ неможливо.

Тоді при першому вирівнюванні, яке є за сутністю лише уточнення величин, виконують з меншим числом десяткових знаків у порівнянні з обчисленнями при остаточному вирівнюванні.

2.5. ПРИКЛАДИ ВИРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНОГО ТРИКУТНИКА ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

Задача 2.1. В трикутнику, в якому відомі координати пункту А(x_a, y_a), сторона **c** і її дирекційний кут α_{AB}, виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення координат вершини С (рис.2.6) і отримані результати вимірів x_1, x_2, x_3.

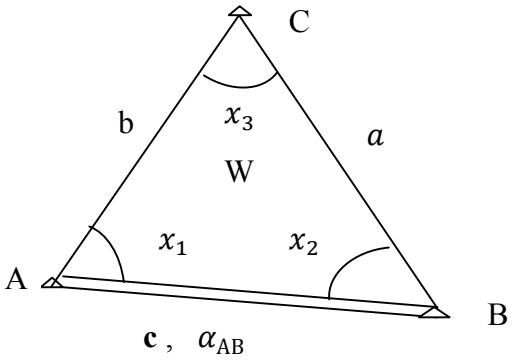


Рис.2.6.

Для розв'язання трикутника з відомою стороною необхідно мати два кути. Так як виміряні три кути, які пов'язані геометричним рівнянням на площині $x_1 + x_2 + x_3$ - 180° = W, то виникає задача вирівнювання. Розглянемо наступні приклади вирівнювання.

Перший приклад, коли кути виміряні рівноточно.

Розв'язання будемо виконувати у послідовності, яка вказана в темі 2.2.

1. В якості необхідних невідомих виберемо дирекціоні кути напрямків АС і ВС. Число цих невідомих повинно бути $k = n - r = 3 - 1 = 2$.

Позначимо $\alpha_{AC} = t_1$, $\alpha_{BC} = t_2$. Очевидно,що дирекціоні кути не пов'язані між собою ні якими математичними співвідношеннями. .

2. Виразимо виміряні величини у виді функцій необхідних невідомих $x_1 = \alpha_{AB} - t_1$, $x_2 = t_2 - \alpha_{AB} \pm 180°$, $x_3 = t_1 - t_2$. .

3. Приймемо в якості приблизних значень необхідних невідомих вирази $t_1^0 = \alpha_{AB} - x_1$, $t_2^0 = \alpha_{AB} \pm 180° + x_2$. (2.13).

Обчислимо коефіцієнти і вільні члени рівнянь поправок

$a_{11} = \frac{\partial x_1'}{\partial t_1} = -1$, $a_{12} = \frac{\partial x_1'}{\partial t_2} = 0$, .

$l_1 = \alpha_{AB} - t_1^0 - x_1 = \alpha_{AB} - (\alpha_{AB} - x_1) - x_1 = 0$, .

$a_{21} = \frac{\partial x_2'}{\partial t_1} = 0$, $a_{22} = \frac{\partial x_2'}{\partial t_2} = +1$, $l_2 = \{t_2^0 - (\alpha_{AB} \pm 180°)\} - x_2 =$

$= \alpha_{AB} \pm 180° + x_2 - \alpha_{AB} \mp 180° - x_2 = 0$, .

$a_{31} = \frac{\partial x_3'}{\partial t_1} = +1$, $a_{32} = \frac{\partial x_3'}{\partial t_2} = -1$, $l_3 = t_1^0 - t_2^0 - x_3 =$

$= \alpha_{AB} - x_1 - \alpha_{AB} \pm 180° - x_2 - x_3 = 180° - x_1 - x_2 - x_3 = -W$,

де W- нев'язка . .

Запишемо параметричні рівняння поправок у вигляді:

$v_1 = -\tau_1$, $v_2 = +\tau_2$, $v_3 = +\tau_1 - \tau_2 - W$.

4. Обчислимо коефіцієнти і вільні члени двох нормальних рівнянь $[a_1a_1] = 2$, $[a_1a_2] = -1$, $[a_1l] = -W$,

$[a_2a_2] = 2$, $[a_2l] = +W$. .

Запишемо нормальні рівняння .

$$\left.\begin{aligned} 2\,\tau_1 - \tau_2 - W = 0, \\ -\tau_1 + 2\tau_2 + W = 0. \end{aligned}\right\}$$

Зробимо додавання рівнянь і у результаті отримаємо

$$\tau_1 + \tau_2 = 0, \qquad (2.47)$$

і звідки з цього $+\tau_1 = -\tau_2$.

Далі із суми 1– го нормального рівняння і рівності (2.47) отримаємо $3\,\tau_1 - W = 0$ і звідки

$\tau_1 = +\frac{W}{3}$ і рахуючи (2.47) одержимо $\tau_2 = -\frac{W}{3}$.

5. Підставимо τ_1 і τ_2 у рівняння поправок і отримаємо $v_1 = -\frac{W}{3}$, $v_2 = -\frac{W}{3}$, $v_3 = +\frac{W}{3} + \frac{W}{3} - W = -\frac{W}{3}$.

Таким чином, нев'язка трикутника у випадку рівноточних вимірів повинна бути розподілена на три його кути порівну з оберненим знаком.

Другий приклад, коли виміри кутів нерівноточні.

Приймемо, що кути X_1, X_2, X_3 виміряні з вагами p_1, p_2, p_3. Рівняння поправок будуть такі ж, як і в попередньому випадку, але при складанні нормальних рівнянь необхідно враховувати ваги вимірів.

Отримаємо $v_1 = -\tau_1$ з вагою p_1, $v_2 = +\tau_2$, з вагою p_2, $v_3 = +\tau_1 - \tau_2 - W$, з вагою p_3.

Коефіцієнти нормальних рівнянь будуть .

$[pa_1a_1] = (p_1 + p_3)$, $[pa_1a_2] = -p_3$, $[pa_1l] = -p_3 W$,

$[pa_2a_2] = (p_2 + p_3)$, $[pa_2l] = +p_3 W$.

Запишемо нормальні рівняння у виді: .

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + p_3)\tau_1 - p_3\tau_2 - p_3 W = 0,\\ -p_3\tau_1 + (p_2 + p_3)\tau_2 + p_3 W = 0.\end{aligned}\right\}$$

Сума рівнянь дорівнює $p_1\tau_1 + p_2\tau_2 = 0$, .

звідки $\tau_2 = -\frac{p_1}{p_2}\tau_1$. (2.48)

Поділимо перше рівняння на p_3 і рахуючи вираз (2.48), отримаємо .

$$(1 + \frac{p_1}{p_3})\tau_1 - \tau_2 - W = (1 + \frac{p_1}{p_3})\tau_1 + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 - W = .$$

$$= (\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_3})\tau_1 - W = 0. .$$

Введемо позначення $\frac{1}{p_1} = q_1$, $\frac{1}{p_2} = q_2$, $\frac{1}{p_3} = q_3$,

і $q_1 + q_2 + q_3 = \Sigma q$. .

Величини q називають оберненими вагами. Тепер отримаємо $\frac{\Sigma q}{q_1}\tau_1 = W$ і звідки $\tau_1 = \frac{q_1}{\Sigma q} W$,

а згідно виразу (2.48) $\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_1}{\Sigma q} W = -\frac{q_2}{\Sigma q} W$.

Обчислимо поправки до кутів за формулами: .

$v_1 = -\frac{q_1}{\Sigma q} W$, $v_2 = -\frac{q_2}{\Sigma q} W$, $v_3 = -\frac{q_3}{\Sigma q} W$,

тобто поправки до кутів трикутника при нерівноточних вимірах розподіляються пропорційно оберненим вагам вимірів.

Третій приклад, коли в геодезичному трикутнику виміряні три кути і дві сторони та дана третя вихідна сторона $\overline{AB}$ = с =1000,000м. .

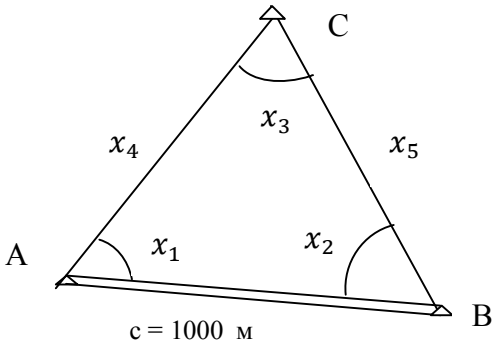


Рис.2.7.

Таблиця 2.1.

Кут	Результат виміру	Поп-равка	Виправлений кут
X_1 X_2, X_3	46^0 25′ 13″ 68^0 01′ 25″ 65^0 33′ 07″	+5 +5 +5	46^0 25′ 18″ 68^0 01′ 30″ 65^0 33′ 12″
Σ -w	179°59′45″ -180 ° 00′00″ - 0° 00′ 15″	+15	180 ° 00′00″

Одержані наступні результати вимірів: .

x_1= 46^0 25′ 13″, $x_2 = 68^0$ 01′ 25″, x_3 = 65^0 33′ 07″,

x_4 = 795,881 м, $x_5 = 1018{,}660$ м. .

Кути виміряні із середньою квадратичною похибкою m =10″.

Середні квадратичні похибки виміру сторін відповідають формулі $m_{l,\text{см}} = (\frac{s_{i,\ \text{см}}}{30\ 000} + 2\ \text{см})$.

Треба знайти вирівняні значення виміряних величин. Позначення вихідних і виміряних величин показані на рис.2.7. Обчислимо середні квадратичні похибки виміру сторін в сантиметрах: m_4,= $\frac{79588\text{ см}}{30\,000}$ +2 см = 4,6 см; m_5= $\frac{101866\text{ см}}{30\,000}$ +2 см =5,4 см. Ваги обчислимо за формулою $p_i = \left(\frac{10}{m_i}\right)^2$, тоді ваги кутів будуть $p_1 = p_2 = p_3 = 1\frac{1}{(''')^2}$. Виражаючи середні квадратичні похибки сторін в сантиметрах, отримаємо ваги сторін $p_4 = \left(\frac{10}{4{,}6\text{ см}}\right)^2 = 4{,}7\ \frac{1}{\text{см}^2}$, $p_5 = \left(\frac{10}{5{,}4\text{ см}}\right)^2 = 3{,}4\ \frac{1}{\text{см}^2}$. Виражати середні квадратичні похибки сторін в інших одиницях невигідно, бо ваги при цьому будуть або дуже мали, або навпаки, дуже великі.

Зауважимо, що в подальших обчисленнях всі лінійні величини повинні виражатися також в сантиметрах.

В якості необхідних невідомих зручніше обрати два кути X_1, X_2 (для розв'язання трикутника, в якому відома одна сторона, необхідно мати дві виміряні величини).

Допустимо $t_1 = x_1'$, $t_2 = x_2'$. Далі виразимо всі виміряні величини у виді функцій необхідних невідомих $x_1' = t_1$, $x_2' = t_2$, $x_3' = 180° - t_1 - t_2$.

$x_4' = c\ \frac{\sin t_1}{\sin(180 - t_1 - t_2)} = c\ \frac{\sin x_1'}{\sin x_3'}$, $x_5' = c\ \frac{\sin t_2}{\sin(180 - t_1 - t_2)} = c\ \frac{\sin x_2'}{\sin x_3'}$

Обчислимо приблизні значення невідомих. Для їх уточнення нев'язку трикутника розподілимо з оберненим знаком на три кути трикутника (табл. 2.1). Тепер приймемо $t_1^0 = 46^0\ 25'\ 18''$, $t_2^0 = 68^0\ 01'\ 30''$, $t_3^0 = 65^0\ 33'\ 12''$. Далі обчислимо вільні члени всіх рівнянь поправок і кое-

фіцієнти останніх двох рівнянь (коефіцієнти інших рівнянь очевидні за формулами 2.48) .

$l_1 = t_1^0 - x_1 = 46^0\ 25'\ 18'' - 46^0\ 25'\ 13'' = +5''$, .

$l_2 = t_2^0 - x_2 = 68^0\ 01'\ 30'' - 68^0\ 01'\ 25'' = +5''$, .

$l_3 = t_3^0 - x_3 = 65^0\ 33'\ 12'' - 65^0\ 33'\ 07'' = +5''$, .

$l_{4,} = 100000\,\frac{\sin 46^0\ 25'\ 18''}{\sin 65^0\ 33'\ 12''} - 79588{,}1 = 79577{,}6 - 79588{,}1 = -10{,}5$см,

$l_{5,} = 100000\,\frac{\sin 68^0\ 01'\ 30''}{\sin 65^0\ 33'\ 12''} - 101866{,}0 = 101867{,}5 - 101866{,}0 = +1{,}5$см,

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_1} = c\frac{\cos t_1 \sin(t_1+t_2) - \sin t_1 \cos(t_1+t_2)}{\sin^2(t_1+t_2)} = c\frac{\sin t_2}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'} \cdot \frac{1}{\sin x_3'} = \frac{x_5'}{\sin x_3'},$$

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_2} = c\,\frac{-\sin t_1 \cos(t_1+t_2)}{\sin^2(t_1+t_2)} = c\frac{\sin t_2 \cos(180^\circ - t_1 - t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\,\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{\sin x_3'} = \frac{x_4'}{tg\, x_3'},$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_1} = c\,\frac{-\sin t_2 \cos(t_1+t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\,\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{\sin x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{\mathrm{tg}\, x_3'} \cdot \frac{1}{\sin x_3'} = \frac{x_5'}{\mathrm{tg}\, x_3'},$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_2} = c\,\frac{\cos t_2 \sin(t_1+t_2) - \sin t_2 \cos(t_1+t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\,\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'} \cdot \frac{1}{\sin x_3'} = \frac{x_4'}{\sin x_3'}.$$

Далі напишемо одне з рівнянь поправок для лінійних вимірів $v_4, \text{см} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)\tau_1 + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)\tau_2 + l_4$, см.

Так, як диференціювання робиться тільки по кутових аргументах, які виражені в радіанній мірі, а поправки τ практично виражаються в секундах, то останнє рівняння запишемо так $v_4, \text{см} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)\frac{\tau''}{\rho''} + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)\frac{\tau''}{\rho''} + l_4$, см.

Одержимо при поправках τ'' наступні коефіцієнти рівнянь поправок для лінійних вимірів

$a_{41}=\frac{x_5,см}{\rho''}\,cosec\,x_3=\frac{101866}{206265}\text{cosec}\,65^0\,33'=+0{,}54,$.

$a_{42}=\frac{x_4,см}{\rho''}\,\text{ctg}\,x_3=\frac{79588}{206265}\,\text{ctg}\,65^0\,33'=+0{,}18,$.

$a_{51}=\frac{x_5,см}{\rho''}\,\text{ctg}\,x_3=\frac{101866}{206265}\,ctg\,65^0\,33'=+0{,}22,$.

$a_{51}=\frac{x_4,см}{\rho''}\,\text{cosec}\,x_3=\frac{79588}{206265}\text{cosec}\,65^0\,33'=+0{,}42.$.

Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь відповідно з формулою (2.19) зручно виконувати за допомогою таблиці коефіцієнтів (табл.2.2), у верхній частині якої виписують коефіцієнти рівнянь поправок, а в нижчій, яка відділена горизонтальною рисою, обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь. Таблиця 2.2.

№ виміру	Вага - р	a_{i1}= +8,8″	a_{i2} = -3,2″	l	v
1	1	+1,00	0	+5,00″	+13,8″
2	1	0	+1,00	+5,00″	+1,8″
3	1	-1,00	-1,00	+5,00″	-0,6″
4	4,7	+0,54	+0,18	-10,50 см	- 6,3 см
5	3,4	+0,22	+0,42	+1,50 см	+2,1 см
[pa_1		3,54	+1,77	-25,54	
[pa_2		+1,77	2, 75	- 6,78	

Нормальні рівняння мають вид: .

$3{,}54\,\tau_1 + 1{,}77\,\tau_2 - 25{,}54 = 0,$.

$1{,}77\,\tau_1 + 2{,}75\,\tau_2 - 6{,}78 = 0,$.

$\Sigma = 5{,}31\tau_1 + 4{,}52\,\tau_2 - 32{,}32 = 0.$.

. Розв’яжемо нормальні рівняння способом визначників, причому детермінанта D = 6,60. .

$\tau_1 = \frac{25{,}54 \cdot 2{,}75 - 6{,}78 \cdot 1{,}77}{6{,}60} = +8{,}8''$, $\tau_2 = \frac{3{,}54 \cdot 6{,}78 - 1{,}77 \cdot 25{,}54}{6{,}60} = -3{,}2''$.

Для контролю правильності обчислень підставимо отримані значення τ_1 і τ_2 в сумарне нормальне рівняння 5,31 · 8,8 – 4,52 · 3,2 - 32,32 = - 0,06. Цією остаточною похибкою можна знехтувати. Для зручності обчислень поправок v_i значення $\boldsymbol{\tau}$ впишемо у заголовні граф 3 і 4 табл.2.2. Перемножуючи величини τ_1 і τ_2 на коефіцієнти $\boldsymbol{a_{ij}}$ у відповідних рядках і додаючи до суми цих добутків величини $\boldsymbol{l}$, одержують поправки $\boldsymbol{v}$, які записують в графу

6. Далі одержимо значення виміряних величин за формулою $\boldsymbol{x_i' = x_i + v_i}$, тобто .

$x_1' = 46^0\ 25'\ 13'' + 13{,}8'' = 46^0\ 25'\ 26{,}8''$, .

$x_2' = 68^0\ 01'\ 25'' + 1{,}8'' = 68^0\ 01'\ 26{,}8''$, .

$x_3' = 65^0\ 33'\ 07'' - 0{,}6'' = 65^0\ 33'\ 06{,}4''$. .

. $\Sigma = 180°\ 00'\ 00{,}0''$. .

x_4' = 79588,1 см – 6,3 см = 795,818 м. .

x_5'=101866,0 см + 2,1 см =1018,681м. . .

Для остаточного контролю вирівнювання була підрахована сума кутів трикутника, яка опинилася рівною 180° і, крім того, були обчислені віддалі сторін $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ за вирівняними кутами від вихідної сторони $\overline{AB}$ = с; при цьому нами були одержані величини $x_4 + v_4$ і $x_5 + v_5$.

$\overline{BC}$ =1000,000 м · $\frac{\sin 46^0\ 25'\ 26{,}8''}{\sin 65^0\ 33'\ 06{,}4''}$ =795,819 м; x_4' =795,818м.

$\overline{AC}$ =1000,000 м · $\frac{\sin 68^0\ 01'\ 26{,}8''}{\sin 65^0\ 33'\ 06{,}4''}$ =1018,681м; x_5' =1018,681м.

Контроль підтверджує правильність вирівнювання , бо спів

падання знаходиться у межах точності обчислень.

Далі розглянемо розв'язання більш складних систем нормальних рівнянь, які широко застосовуються при вирівнюванні геодезичних мереж.

ГЛАВА 3. СПОСІБ ГАУССА РОЗВ'ЯЗАННЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

3.1. СУТЬ СПОСОБУ ГАУССА.

Одним із ефективних і широко поширених способів розв'язання нормальних рівнянь є спосіб К.Ф. Гаусса,який складається у послідовному виключенні із системи рівнянь всіх невідомих. При цьому вихідна система рівнянь

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]\,\delta x_1+[ab]\,\delta x_2+[ac]\,\delta x_3+\ldots+[ag]\,\delta x_k+[al]=0,\\
[ab]\delta x_1+[bb]\,\delta x_2+[bc]\,\delta x_3+\ldots+[bg]\,\delta x_k+[bl]=0,\\
[ac]\,\delta x_1+[bc]\,\delta x_2+[cc]\,\delta x_3+\ldots+[cg]\,\delta x_k+[cl]=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[ag]\,\delta x_1+[bg]\,\delta x_2+[cg]\,\delta x_3+\ldots\ldots+[gg]\,\delta x_k+[gl]=0,
\end{array}\right\} \quad (3.1)$$

замінюється на еквівалентну систему рівнянь виду

$$\left.\begin{array}{r}
[aa]\,\delta x_1+[ab]\,\delta x_2+[ac]\,\delta x_3+\ldots..+[ag]\,\delta x_k+[al]=0,\\
[bb.1]\,\delta x_2+[bc.1]\,\delta x_3+\ldots+[bg.1]\,\delta x_k+[bl.1]=0,\\
[cc.2]\,\delta x_3+\ldots+[cg.2]\,\delta x_k+[cl.2]=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[gg(k-1)]\,\delta x_k+[gl(k-1)]=0,
\end{array}\right\} \quad (3.2)$$

що називають прямим ходом її розв'язання. Невідомі, починаючи з останнього, обчислюють із так званих елімінаційних рівнянь, які отримують в системі (3.2) через поділення на квадратичні коефіцієнти:

$$\delta x_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3 - \ldots - \frac{[ag]}{[aa]}\delta x_k - \frac{[al]}{[aa]},$$

$$\delta x_2 = -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\delta x_3 - \ldots - \frac{[bg.1]}{[bb.1]}\delta x_k - \frac{[bl.1]}{[bb.1]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta x_k = -\frac{[gl(k-1)]}{[gg(k-1)]}. \qquad (3.3)$$

Цей процес називають оберненим ходом розв'язання системи. Коефіцієнти при невідомих в еквівалентній системі (3.2) називають алгоритмами Гаусса.

3.2. ПРАВИЛО РОЗКРИТТЯ АЛГОРИТМІВ ГАУССА.

Алгоритм з індексом – j буде називатися перетвореним, а без індексу – не перетвореним. Тоді будь – який перетворений алгоритм Гаусса дорівнює цьому же не перетвореному алгоритму мінус число дробів, які співпадають з індексом – j алгоритму.

Знаменники цих дробів дорівнюють першим коефіцієнтам (j - 1) еквівалентних рівнянь, а їх чисельники – добутку двох алгоритмів з тим самим індексом, що і в алгоритмі знаменника. Причому перший співмножник умовно виходить як добуток першої літери знаменника на першу літеру алгоритму, що розкривається, а другий – як добуток другої літери знаменника на його другу літеру.

Наприклад

$$\left.\begin{aligned} [bb.1] &= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}; \\ [bl.1] &= [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

$$[cc.2] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]};$$
$$[cl.2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}; \qquad (3.5)$$

Можлива і неповна форма розкриття алгоритму, коли алгоритм, що розкривається з індексом – j дорівнює тому же алгоритму з індексом (j - 1) мінус остання дріб із повної форми розкриття.

Наприклад: $$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}. \qquad (3.5, а)$$

В індексній формі запису система еквівалентних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned}
&[a_1a_1]\,\delta x_1 + [a_1a_2]\,\delta x_2 + [a_1a_3]\,\delta x_3 + \ldots + [a_1a_k]\,\delta x_k + [a_1l] = 0,\\
&[a_2a_2.1]\,\delta x_2 + [a_2a_3.1]\delta x_3 + \ldots + [a_2a_k.1]\delta x_k + [a_2l.1] = 0,\\
&[a_3a_3.2]\delta x_3 + \ldots + [a_3a_k.2]\delta x_k + [a_3l.2] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[a_ka_k.(k-1)]\delta x_k + [a_kl.(k-1)] = 0. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Для зручності елементи матриці (3.6) позначають через N_{ij}, а невідомі δx_i через τ_i [2]. Тоді замість (3.6)маємо

$$\begin{aligned}
&N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\,\tau_3 + \ldots\ldots\ldots + N_{1k}\tau_k + L_1 = 0,\\
&[N_{22}.1]\,\tau_2 + [N_{23}.1]\tau_3 + \ldots + [N_{2k}.1]\,\tau_k + [L_2.1] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[N_{kk}.(k-1)]\tau_k + [L_k.(k-1)] = 0. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Алгоритми Гаусса системи (3.7) розкриваються наступним чином $[N_{22}.1] = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}$;

$[N_{2k}.1] = N_{2k} - \frac{N_{12}N_{1k}}{N_{11}}$; $[L_2.1] = L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}$;

$$[N_{gr}.(g-1)] = N_{gr} - \frac{N_{1g}N_{1r}}{N_{11}} - \frac{[N_{2g}.1][N_{2r}.1]}{[N_{22}.1]} - \ldots\ldots \quad .$$

$$[L_g.(g-1)] = L_g - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}} - \frac{[N_{2g}.1]\,[L_2.1]}{[N_{22}.1]} - \ldots\ldots \qquad (3.8)$$

В літературі [2] використовуються також такі символи:

$$-\frac{N_{12}}{N_{11}} = \mathrm{E}_{12},\ldots,\ -\frac{N_{1i}}{N_{11}} = \mathrm{E}_{1i},\ldots,\ -\frac{N_{1k}}{N_{11}} = \mathrm{E}_{1k};\ldots\ldots,\ -\frac{L_1}{N_{11}} = \mathrm{E}_{1L};$$

$$-\frac{[N_{23}.1]}{[N_{22}.1]} = \mathrm{E}_{23},\ldots,-\frac{[N_{2i}.1]}{[N_{22}.1]} = \mathrm{E}_{2i},\ldots,-\frac{[N_{2k}.1]}{[N_{22}.1]} = \mathrm{E}_{2k},\ldots,-\frac{[L_2.1]}{[N_{22}.1]} = \mathrm{E}_{2L};$$

……..

$$-\frac{[N_{i,i+1}.(i-1)]}{[N_{ii}.(i-1)]} = \mathrm{E}_{i,i+1},\ldots,-\frac{[L_i.(i-1)]}{[N_{ii}.(i-1)]} = \mathrm{E}_{i,L},\ldots,-\frac{[L_k.(k-1)]}{[N_{kk}.(k-1)]} = \mathrm{E}_{k,L} \text{ і}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tau_1 = \mathrm{E}_{12}\tau_2 + \mathrm{E}_{12}\tau_2 + \ldots + \mathrm{E}_{1k}\tau_k + \mathrm{E}_{1L}, \\
\tau_2 = \mathrm{E}_{23}\tau_3 + \mathrm{E}_{24}\tau_4 + \ldots + \mathrm{E}_{2k}\tau_k + \mathrm{E}_{2L}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_i = \mathrm{E}_{i,i+1}\tau_{i+1} + \mathrm{E}_{i,i+2}\tau_{i+2} + \ldots + \mathrm{E}_{ik}\tau_k + \mathrm{E}_{iL}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{E}_{kL}
\end{array}\right\} \qquad (3.3,а)$$

Приклад 3.1. Виконати розв’язання системи нормальних рівнянь за способом Гаусса.

$$\left.\begin{array}{l}
6{,}42\ \delta x_1 - 1{,}33\ \delta x_2 - 1{,}11\ \delta x_3 - 0{,}64 = 0; \\
-1{,}33\ \delta x_1 + 2{,}83\ \delta x_2 + 0\cdot\ \delta x_3 - 0{,}14 = 0; \\
-1{,}11\ \delta x_1 + 0\cdot\ \delta x_2 + 3{,}10\ \delta x_3 + 0{,}60 = 0.
\end{array}\right\} \qquad (3.1,а)$$

Знаходимо алгоритми .

$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = 2{,}83 - \frac{(-1{,}33)^2}{6{,}42} = 2{,}554;$.

$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} = 0 - \frac{(-1{,}33)(-1{,}11)}{6{,}42} = -0{,}230;$.

$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} = -0{,}14 - \frac{(-1{,}33)(-0{,}64)}{6{,}42} = -0{,}273.$.

Друге еквівалентне рівняння дорівнює .

$2{,}554\ \delta x_2 - 0{,}230\ \delta x_3 - 0{,}273 = 0;$.

$[cc.2] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]} = 3{,}10 - \frac{(-1{,}11)^2}{6{,}42} - \frac{(-0{,}230)^2}{2{,}554} = 2{,}887;$

$[cl.2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]} = 0{,}60 - \frac{(-1{,}11)(-0{,}64)}{6{,}42} -$
$- \frac{(-0{,}230)(-0{,}273)}{2{,}554} = 0{,}465.$.

Третє еквівалентне рівняння дорівнює .

$2.887\ \delta x_3 + 0{,}465 = 0$ звідки $\delta x_3 = (-0{,}465) / 2.887 = -0{,}161.$

і тоді невідомі елімінаційних рівнянь будуть .

$\delta x_1 = 0{,}207\ \delta x_2 + 0{,}173\ \delta x_3 + 0{,}100 = +0{,}091;$.

$\delta x_2 =$ …… $+0{,}090\ \delta x_3 + 0{,}107 = +0{,}092;$.

$\delta x_3 =$ ..... $= -0{,}161.$.

Підстановка отриманих невідомих у вихідну систему підтверджує правильність одержаних результатів.

Спосіб Гаусса зручний тим, що всі обчислення вдається розташовувати у компактній схемі, яка включає виконання однотипних обчислювальних дій і дозволяє контролювати проміжні результати.

3.3. КОНТРОЛІ СКЛАДАННЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ УМОВНИХ ТА НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

У процесі складання і розв'язання нормальних рівнянь виконуються контролі цих названих дій та виключення помилок, якщо вони виникають. Це дає змогу отримати правильні результати при обчисленнях на проміжних і остаточному етапах.

Контроль складання умовних рівнянь поправок робиться обчисленнями у дві руки.

Контроль обчислення коефіцієнтів робиться методом сум: $a_i + b_i + c_i + \cdots + g_i + l_i = s_i$ (i = 1, 2… n),

причому $[a]+[b]+[c]+\cdots+[g]+[l]=[s]$. (3.9)

Коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь контролюють за формулами

$$\left.\begin{array}{r}
[aa]+[ab]+[ac]+\cdots+[ag]+[al]=[as];\\
[ab]+[bb]+[bc]+\cdots+[bg]+[bl]=[bs];\\
[ac]+[bc]+[cc]+\cdots+[cg]+[cl]=[cs];\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[ag]+[bg]+[cg]+\cdots+[gg]+[gl]=[gs];\\
[al]+[bl]+[cl]+\ldots+[gl]+[ll]=[ls];\\
[as]+[bs]+[cs]+\cdots+[gs]+[ls]=[ss].
\end{array}\right\} \quad (3.10)$$

Далі:

$$\left.\begin{array}{r}
[aa]+[ab]+[ac]+\ldots\ldots\ldots+[ag]+[al]=[as];\\
[bb.1]+[bc.1]+\cdots+[bg.1]+[bl.1]=[bs.1];\\
[cc.2]+\cdots+[cg.2]+[cl.2]=[cs.2];\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[gg.(k-1)]+[gl.(k-1)]=[gs.(k-1)]
\end{array}\right\} \quad (3.11)$$

Остаточним контролем прямого хода розв'язання схеми Гаусса є виконання наступних рівностей:

$$[ll.k] = [ls.k] = [ss.k]. \qquad (3.12)$$

Потім переходять до обчислення невідомих δx_j. У міру їх обчислення контроль здійснюють шляхом обчислення і порівняння з допоміжними невідомими $\overline{\delta x_j}$ (див. схему Гаусса 3). Отримуючи згідно (3.3) всі невідомі δx_j, обчислюють за формулою (2.12) поправки v_i і контролюють їх на основі формул $[av] = 0,\ [bv] = 0, \dots, [gv] = 0.$ (3.13)

Перевіряють також виконання контрольних рівностей

$$[vv] = [ll.k] = [ls.k]. \qquad (3.14)$$

Справедливі рівності $[vv] = [lv] = [sv]$. (3.15)

Остаточним контролем розв'язання задачи вирівнювання є дотримання рівностей .

$$x_i + v_i = \varphi_{\text{i}}\ (t_1, \dots, t_{\text{к}}),$$

які слід перевіряти, бо вони контролюють правильність розкладення в ряд. Складання нормальних рівнянь при рівноточних вимірюваннях та їх розв'язання виконують за допомогою трьох схем, які наводимо для трьох невідомих. При невеликому числі невідомих (k ≤ 10) коефіцієнти нормальних рівнянь частіше обчислюють з точністю до 0,01 – 0,001. З такою же точністю обчислюють коефіцієнти еквівалентних рівнянь. .

Коефіцієнти же елімінаційних рівнянь і невідомі обчислюють з точністю до 0,001–0,0001.

Величини $\frac{1}{[aa]}$, $\frac{1}{[bb]}$ і інші в схемі 4 вписані для заміни дій ділення на множення. Їх обчислюють з точністю до 0,0001.

Розбіжності контрольних сум еквівалентних рядків в схемі Гаусса допускають до 0,01 – 0,02 (допуск поступово збільшується у міру спускання вниз по схемі).

Схема 1 визначення коефіцієнтів умовних рівнянь і поправок v_i

Виміри	a_i b_i c_i	l_i s_i	v_i	$v_i v_i$
1 2 … n	a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 …… a_n b_n c_n	l_1 s_1 l_2 s_2 ……. $.l_n$ s_n	v_1 v_2 ….. v_n	$v_1 v_1$ $v_2 v_2$ …….... $v_n v_n$
	$[a]$ $[b]$ $[c]$ δx_1 δx_2 δx_3 $[av]$ $[bv]$ $[cv]$	$[l]$ $[s]$	$[v]$	$[vv]$

Схема 2 обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь.

	$a]$ $b]$ $c]$	$l]$ $s]$	Контроль

$[a$ $[b$ $[c$ $[l$ $[s$	$[aa]$ $[ab]$ $[ac]$ . . $[bb]$ $[bc]$ . . $[cc]$	$[al]$ $[as]$ $[bl]$ $[bs]$ $[cl]$ $[cs]$ $[ll]$ $[ls]$. $[ss]$	Розхо- дження до 0,01.

Зауважимо, що в колонці – S вписані числа із колонки ”Контроль” схеми2. .

Схема 4 являє собою скорочену схему 3 способу Гаусса, в якої опущені проміжні записи, що пов’язані з розкриттями алгоритмів Гаусса. .

. Всі алгоритми в цієї схемі отримуються методом накопичення в пам’яті ЄОМ (мікрокалькулятора). .

Якщо виконати порядкову нумерацію рядків в схемі 4, опускаючи елімінаційні рядки, то можна сформулювати наступне правило обчислення коефіцієнтів цих рядків:

- будь – який коефіцієнт, що розташований в і-му рядку та в j- й колонці схеми, дорівнює відповідному коефіцієнту із схеми 2 плюс сума добутків вже отриманих чисел елімінаційних рядків із колонки – і на числа із колонки – j, що розташовані понад ними (в еквівалентних рядках). .

Наприклад, суму $[cs.2]$ одержуємо як $[cs]$ плюс сума добутків чисел елімінаційних рядків із колонки С

(- $\frac{[ac]}{[aa]}$ і - $\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$) відповідно на числа $[as]$ і $[bs.1]$ (числа еквівалентних рядків із колонки S).

Невідомі δx_j обчислюються за наступним правилом: - **невідоме δx з номером j-й дорівнює числу j** – го **елімінаційного рядку із колонки l плюс сума добутків вже обчислених невідомих δx на розташовані над ними числа із цього ж елімінаційного рядку.**

Приведемо повну, так звану “ **шкільну** “ схему розв’язання за способом Гаусса з метою роз’яснення порядку розкритті алгоритмів Гаусса у процесі розв’язанні системи 3-х нормальних рівнянь виду

$$\left.\begin{aligned} [aa]\delta x_1 + [ab]\delta x_2 + [ac]\delta x_3 + [al] &= 0; \\ [bb]\delta x_2 + [bc]\delta x_3 + [bl] &= 0; \\ [cc]\delta x_3 + [cl] &= 0. \end{aligned}\right\}$$

№	Дії	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контр
0	1	2	3	4	5	6	7
1	a	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	
2	E_1	-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	конт-роль
3	b		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	
4	$[ab]$ $\times E_1$		$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[al]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[as]}{[aa]}[ab]$	
5	$b.1$		$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	конт-
6	E_2		-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	роль
7	c			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	
8	$[ac]$ $\times E_1$			$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[al]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[as]}{[aa]}[ac]$	
9	$[bc.1]$ $\times E_2$			$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc1]$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc1]$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bc1]$	
10	$c.2$			$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$	конт-

11	E_3			**-1**	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	**роль**
12	l				$[ll]$	$[ls]$	
13		$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[al]}{[aa]}[as]$	
14	$-\frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3$		$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\delta x_3$		$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl1]$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bl1]$	
15		$-\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2$			$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl2]$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cl2]$	
16	δx_j	δx_1	δx_2	δx_3	$[ll3]$	$[ls3]$	
17						$[ss]$	
18		$-\frac{[as]}{[aa]}$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$		$-\frac{[as]}{[aa]}[as]$	
19	$-\frac{[ac]}{[aa]}\overline{\delta x_3}$		$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\overline{\delta x_3}$			$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs1]$	
20	$-\frac{[ab]}{[aa]}\overline{\delta x_2}$					$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}[cs2]$	
21	$\overline{\delta x_j}$	$\overline{\delta x_1}$	$\overline{\delta x_2}$	$\overline{\delta x_3}$		$[ss3]$	**конт-**
22	$\delta x_j - \overline{\delta x_j}$ =1,000		**1,000**	**1,000**	$[ll3] = [ls3] = [ss3]$		**роль**

Схема 3(шкільна) розв'язання системи 3-х нормальних рівнянь способом Гаусса. .

Слід зауважити, що необхідність виконання записів проміжних обчислень в схемі 3 Гаусса може внести тільки додаткові помилки і збільшити час обчислень. Тому необхідно застосовувати метод накопичення, тобто користуватися скороченою схемою Гаусса, яка наведена нижче.

Рядок	**Дії.**	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	**Контроль**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	a	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	
2	E_1	**-1**	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	**Контроль**
3	**b**		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	
4	$b.1$		$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	

5	E_2		**-1**	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	**Кон-троль**
6	c			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	
7	$c.2$			$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$	
8	E_3			**-1**	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	**Кон-троль**
9	δx_j -	δx_1	δx_2	δx_3	$[ll3]$	$[ls3]$	
10	$\overline{\delta x_j}$	$\overline{\delta x_1}$	$\overline{\delta x_2}$	$\overline{\delta x_3}$		$[ss3]$	
11	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	$[ll3] = [ls3] = [ss3]$		**Кон-троль**

Схема 4 (скорочена) розв'язання 3-х нормальних рівнянь способом Гаусса. .

Формули алгоритмів Гаусса в схемах 3 і 4 мають вид

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}; \qquad [bl.1] = [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]};$$

$$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}; \qquad [cl.2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]};$$

$$[cc.2] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}; \quad \delta x_3 = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}; \quad \overline{\delta x_3} = -\frac{[cs.2]}{[cc.2]};$$

$$\delta x_2 = -\frac{[bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\delta x_3; \qquad \overline{\delta x_2} = -\frac{[bs.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\overline{\delta x_3};$$

$$\delta x_1 = -\frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3 - \frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2; \quad \overline{\delta x_1} = -\frac{[as]}{[aa]} - \frac{[ac]}{[aa]}\overline{\delta x_3} - \frac{[ab]}{[aa]}\overline{\delta x_2}.$$

Контроль обчислення невідомих δx_j можна здійснювати шляхом підстановки їх в j –е еквівалентне рівняння (3.2). Для того, щоб судити про вплив помилок заокруглення, невідомі слід підставити у вихідну систему нормальних рівнянь (це доцільно робити при великої кількості невідомих).

Якщо відхилення від нуля у правих частинах - ε_j опиниться суттєвим, то слід невідомі уточнити, розв'язуючи систему з вільними членами, рівними ε_j. Існує також інший надійний спосіб поточного контролю

обчислень усіх невідомих $\boldsymbol{\delta x_j}$, починаючи з останнього. Якщо колонку вільних членів – $\boldsymbol{l}$ замінити сумарною колонкою – S і залишити для її елементів умовно колишні позначення $[al]$, $[bl]$, ..., $[gl]$, то замість $\boldsymbol{\delta x_j}$ будемо одержувати невідомі $\overline{\boldsymbol{\delta x_j}}$, і потім виконувати контроль

$$\boldsymbol{\delta x_j - \overline{\delta x_j} = 1}. \qquad (3.16)$$

Формула (3.16) дозволяє перевірити $\boldsymbol{\delta x_j}$, не до чикаючись, поки будуть обчислені всі невідомі, а підставлення їх у вихідну систему нормальних рівнянь виявить помилку в обчисленнях надто пізно. Зауважимо, що ухилення від 1 у формулі (3.16) допустимі до 0,005 при обчисленнях невідомих з точністю до 0,001.

Розв'яжемо тепер систему нормальних рівнянь (див. схеми 2 та 4, що наведені для системи 3.1) за схемою 5 Гаусса. Система нормальних рівнянь має вид:

$$6{,}42\ \delta x_1 - 1{,}33\ \delta x_2 - 1{,}11\ \delta x_3 - 0{,}64 = 0; \quad s_1' = 3{,}34, \quad .$$
$$2{,}83\ \delta x_2 + 0 \cdot \delta x_3 - 0{,}14 = 0; \quad s_2' = 1{,}36, \quad .$$
$$3{,}10\ \delta x_3 + 0{,}60 = 0; \quad s_3' = 2{,}59. \qquad (3.1)$$

Ряд	Дії.	1 :	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
0	1	**-**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	a	**:** $[\boldsymbol{aa}]$	**6,42**	**- 1,33**	**- 1,11**	**- 0,64**	**3,34**	3,34
2	E_1	**0,1558**	**-1**	**0,207**	**0,173**	**0,100**	**- 0,520**	- 0,520
3	b			**2,83**	**0**	**-0,14**	**1,360**	1,360
4	b.1	**:**$[\boldsymbol{bb.1}]$		**2,554**	**-0,230**	**- 0,273**	**2, 051**	2, 051
5	E_2	**0,4124**		**-1**	**0, 090**	**0, 106**	**- 0, 804**	- 0, 804
6	c				**3,10**	**0,60**	**2,59**	2,59
7	$c.2$	**:** $[\boldsymbol{cc.2}]$			**2, 887**	**0, 465**	**3, 352**	3, 350
8	E_3	**0,3464**			**-1**	**- 0, 161**	**1, 161**	1, 163
9	δx_j-		**0,091**	**0, 092**	**-0, 161**	$[\boldsymbol{ll3}]$ **=0,11**	$[\boldsymbol{ls3}]$ **= 0,11**	

10	$\overline{\delta x_j}$		**- 0,909**	**-0,908**	**-1, 161**		$[ss3]$**= 0,11**	
11	1,0		1,000	1,000	1,000	$[ll.3] = [ls.3] = [ss.3]$		

Схема 5 Гаусса (скорочена) розв'язання системи рівнянь 3.1,а.

Таким чином спосіб Гаусса розв'язання системи нормальних рівнянь виду $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta x} + \mathbf{L} = \mathbf{0}$ (3,17) приводиться до уявлення матриці N у вигляді добутку двох трикутних матриць T_1 і T_2, які виражаються у виразі $\mathbf{N} = T_1 \cdot T_2$, (3,18) де матриці .

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{[ab]}{[aa]} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \left[\frac{[ag]}{[aa]}\right] & \left[\frac{[bg.1]}{[bb.1]}\right] & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ і } T_2 = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & \cdots & [ag] \\ & [bb.1] & \cdots & [bg.1] \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & [gg.(k-1)] \end{bmatrix}$$

T_1 - складаються з елементів еквівалентних рядків і T_2 – з елімінаційних рядків з оберненою позначкою схеми Гаусса. При цьому одержуються дві системи рівнянь

$$T_1 \cdot \boldsymbol{\delta x} = \mathbf{y}, \quad (3,19) \qquad T_2 \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{L}. \quad (3,20)$$

.

3.4. ФОРМУЛИ ОБЧИСЛЕННЯ СУМИ $[pv^2]$.

В методі найменших квадратів сума $[pv^2]$ відіграє важливу роль. Вона є не тільки основною умовою принципу найменших квадратів $[pv^2]$= min, а й застосовується для оцінки точності вирівнювання та має контрольну функцію при розв'язанні нормальних рівнянь. Тому існує декілька способів її визначення.

Перший спосіб – коли обчислені значення поправок до виміряних величин і визначається за формулою:

. $$[\boldsymbol{pv^2}]=\boldsymbol{p_1v_1^2+p_2v_2^2+\ldots..+p_nv_n^2}. \qquad (3.21)$$

Другій – коли $[\boldsymbol{pv^2}]=[\boldsymbol{plv}]=\boldsymbol{p_1l_1v_1+p_2l_2v_2+\ldots..+p_nl_nv_n}$. (3.22)

Доведення. Систему параметричних рівнянь поправок $v_i= a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2+\ldots\ldots+ a_{i\kappa}\tau_\kappa + l_i$ (i = 1,…,n) помножимо на $p_i v_i$ і додамо, тоді отримаємо

$$[\boldsymbol{pv^2}] = [\boldsymbol{pa_1v}]\boldsymbol{\tau_1}+ [\boldsymbol{pa_2v}]\boldsymbol{\tau_2} + \ldots.+[\boldsymbol{pa_kv}]\boldsymbol{\tau_k} + [\boldsymbol{plv}]. \quad .$$

Згідно (2.32) $[pa_i v] = 0$ і тому $[\boldsymbol{pv^2}]=[\boldsymbol{plv}]$, що і треба довести.

Третій – $[\boldsymbol{pv^2}]=[\boldsymbol{pa_1l}]\boldsymbol{\tau_1}+[\boldsymbol{pa_2l}]\boldsymbol{\tau_2}+ \ldots.+[\boldsymbol{pa_kl}]\boldsymbol{\tau_k}+[\boldsymbol{pll}]$. (3.23)

або $$[pv^2] = L_1\tau_1+L_2\tau_2 + \ldots.+L_k\tau_k +[pll]. \qquad (3.24)$$

Для доведення формул (3.19) і (3.20) систему параметричних рівнянь поправок помножимо на $p_i l_i$ і додамо $[plv] = [pa_1l]\tau_1+ [pa_2l]\tau_2 + \ldots.+ [pa_kl]\tau_k + [pll]$. За висновком п.2 $[\boldsymbol{pv^2}]= [\boldsymbol{plv}]$, тому й рівняння (3.19) і (3.20) є доведеними.

Четвертий спосіб. В схемі розв'язання нормальних рівнянь $[pv^2]$ визначається k- тим перетворенням коефіцієнта $[pll]$, тобто за правилами розкриття алгоритмів Гаусса маємо

$$[\boldsymbol{pv^2}]=[\boldsymbol{pll.k}] = \boldsymbol{pll + E_{1L}L_1+ E_{2L}[L_2.1] + \ldots.+ E_{kL}[L_k.(k-1)]}. \quad (3.25)$$

3.5. ПРИКЛАД ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ КУТІВ, ЯКІ ВИМІРЯНІ НА ГЕОДЕЗИЧНОМУ ПУНКТІ.

Вирівняти горизонтальні кути, які виміряні на геодезичному пункті О способом " в усіх комбінаціях". Результати вимірювання наведені на рис.3.1 і в табл. 3.1.

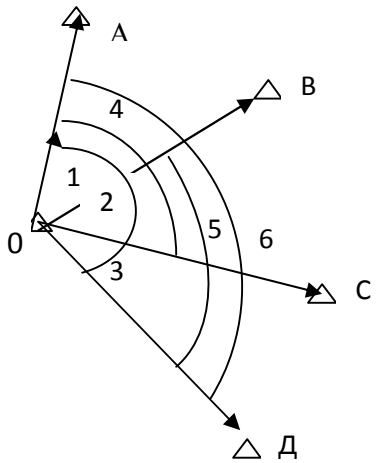


Рис.3.1. Схема вимірювання кутів на пункті О.

Таблиця 3.1. .

Значення виміряних та вирівняних кутів.

№ кута	Позна-чення ку-тів	Виміряні кути	Невідомі	Вирівняні кути
1	А О В	38°31′15,5″	x_1	38°31′15,62″
2	В О С	36 07 30,0	x_2	36 07 29,88
3	С О Д	17 43 46,5	x_3	17 43 46,87
4	А О С	74 38 45,0	$x_1 + x_2$	74 38 45,50
5	В О Д	53 51 16,5	$x_2 + x_3$	53 51 16,75
6	А О Д	92 22 33,0	$x_1 + x_2 + x_3$	92 22 32,37

Розв’язання.

1.Виберемо в якості незалежних невідомих (параметрів) X_1, X_2, X_3 відповідно перший, другій і третій кути. Тоді інші три кути, які залежать від перших трьох, будуть мати собою суми незалежних невідомих.

Рівняння зв’язку мають вид .

$У_1 = X_1$; $У_4 = X_1 + X_2$; .

$У_2 = X_2$; $У_5 = X_2 + X_3$; .
$У_3 = X_3$; $У_6 = X_2 + X_3 + X_3$. .

2.Запишемо рівняння поправок у загальному виді

$$\left.\begin{array}{ll} \delta x_1 + l_1 = v_1; & \delta x_1 + \delta x_2 + l_4 = v_4; \\ \delta x_2 + l_2 = v_2; & \delta x_2 + \delta x_3 + l_5 = v_5; \\ \delta x_3 + l_3 = v_3; & \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_6 = v_6. \end{array}\right\} \quad (3,26)$$

3. Введемо приблизні значення невідомих, приймаючи їх рівними виміряним значенням кутів x_1, x_2, x_3

$x_1' = 38°31'15,5''$; $x_2' = 36°\ 07'\ 30,0''$; $x_2' = 17°\ 43'\ 46,5''$.

4. Обчислимо вільні члени l_i , як різності приблизних значень кутів і виміряних на основі (2.11). .

Отримаємо: .
$l_1 = 0$; $l_4 = 0,5''$; .
$l_2 = 0$; $l_5 = 0$; .
$l_3 = 0$; $l_6 = -\ 1,0''$. .

5. За рівняннями (3.17) складемо таблиці коефіцієнтів рівнянь поправок і нормальних рівнянь (табл.3.2 і 3.3)

Таблиця 3.2. .

Схема визначення коефіцієнтів умовних рівнянь поправок $v = a\ \delta x_1$+b δx_2+c $\delta x_3 + l$.

№ ви-міру	Коефіцієнти				s	v
	a	b	c	l		
1	1				1	0,12″
2		1			1	-0,12
3			1		1	0,37
4	1	1		0,5	2,5	0,50
5		1	1		2,0	0,25
6	1	1	1	-1,0	2,0	-0,63
Σ	3	4	3	-0,5	9,5	$[vs]$=0,86
δx_j	0,124	-0,122	0,373	$[lv]$=0,8		$[v^2]$=0,874
Кон-троль	$[av]$ -0,01	$[bv]$ 0	$[cv]$ 0	6		

Таблиця 3.3.

Схема визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь.

	$a]$	b]	c]	$l]$	s]	Конт-роль.
$[a$	3,00	2,00	1,00	-0,50	5,50	5,50
$[b$		4,00	2,00	-0,50	7,50	7,50
[c			3,00	-1,00	5,00	5,00
$[l$				1,25	-0,75	-0,75
[s					17,25	17,25

6.

Розв’яжемо нормальні рівняння за скороченою схемою Гаусса. Як видно із розв’язання, всі контролі виконуються. Вирівняні значення кутів наведені в табл..3.1.

Остаточним контролем розв’язання задачі є виконання рівностей $y_i = \varphi_i\ (x_1, x_2, x_3)$, в чому легко переконатися безпосередньо в табл.3.1

Таблиця 3.4.

Схема розв'язання нормальних рівнянь способом Гаусса.

Дії та додатні числа	δx_1 (τ_1)	δx_2 (τ_2)	δx_3 (τ_3)	l	s	Контроль
a	3,00	2,00	1,00	-0,50	5,50	5,50
$\boldsymbol{E_1}$ (0,3333)	-1	-0.667	-0,333	0,167	-1,833	-1,833
b		4,00	2,00	-0,50	7,50	7,50
b.1		2,67	1,33	-0,17	3,83	3,83
$\boldsymbol{E_2}$ (0,3745)		-1	-0,498	0,064	-1,434	-1,434
c			3,00	-1,00	5,00	5,00
c.2			2,00	-0,748	1,26	1,25
$\boldsymbol{E_3}$ (0,5000)			-1	0,374	-0,63	-0,627
$\boldsymbol{\delta x_j}$ -	**0.124**	**-0,123**	**0,37**	$[ll3]$ = 0,88	$[ls3]$ = 0,89	
$\overline{\overline{\delta x_j}}$	-0,875	-1,123	-0,63		$[ss3]$= 0,89	
Контроль	0,999	1,000	1,00			

ГЛАВА 4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИРІВНЮВАННЯ.

4.1. ПРО ОЦЕНКУ ТОЧНОСТІ ЗА МАТЕРІАЛАМИ ВИРІВНЮВАННЯ.

Як відомо, вирівняне значення параметра t_{i} дорівнює приблизному значенню t_{i}^0 плюс поправка τ_{i}, тобто

$$t_{\text{i}} = t_{\text{i}}^0 + \tau_{\text{i}} \quad (i = 1, \dots, k). \qquad (4.1).$$

В геодезичних мережах в якості параметрів приймають координати і висоти окремих пунктів або виміряні величини, для яких у результаті вирівнювання отримують ймовірні значення вектора невідомих параметрів t_1,…..,$t_{\text{к}}$ з оцінкою яких існує кореляційна матриця К$_i$. Для визначення кореляційної матриці К$_{\text{i}}$, вектор t_{i} уявляють як лінійну функцію через виміряні величини - x_{i}.

Матриця виміряних величин X є вектором багатовимірного розподілу дисперсій вимірів або кореляційною матрицею $К_x$ [1; 14]. Приймаючи, що виміряні величини виду x_i незалежні між собою, маємо

$$К_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad (4.2)$$

де σ_i^2 - дисперсія виміряних величин і вона дорівнює

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{p_i}\sigma_0^2; \qquad (4.3)$$

p_i - ваги вимірів; σ_0- дисперсія одиниці ваги.

Виходячи з виразу (4.3) кореляційна матриця буде

$$К_x = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot p^{-1}. \qquad (4.4)$$

Практично ваги окремих вимірів в геодезичних мережах відомі, але невідома дисперсія одиниці ваги σ_0^2, яка визначається за результатами вирівнювання. В теорії методу найменших квадратів [1,2] доводиться, що

$$К_x = \sigma_0^2 \cdot N^{-1}, \qquad (4.5)$$

де N^{-1}- обернена матриця відносно вихідної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь N. Обернена матриця дорівнює матриці Q, тобто $N^{-1} = (A^T PA)^{-1} = Q$. (4.6)

В свою чергу матриця Q дорівнює .

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \cdots & Q_{kk} \end{bmatrix}, \qquad (4.7)$$

де Q_{ii} - діагональні квадратичні коефіцієнти матриці Q, які виражають обернені ваги параметрів вирівнювання;

Q_{ij} – не квадратичні коефіцієнти параметрів t_{i} та t_j.

Величина Q_{ii} дорівнює $\boldsymbol{Q_{ii}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p_{x_{\text{i}}}}}$. (4,8)

У цьому випадку кореляційна матриця невідомих параметрів t_{i} може бути виражена як

$$К_t = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \cdots & Q_{kk} \end{bmatrix}, \qquad (4.9)$$

а при незалежних t_{i} та t_j параметрах

$$К_t = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{p}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{p}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\text{p}_n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot p^{-1}. \qquad (4.10)$$

Звідки міра точності або дисперсія невідомого параметра t_{i} буде $\sigma_{t_{\text{i}}}^2 = \sigma_0^2 \cdot Q_{ii} = \dfrac{1}{p_{t_{\text{i}}}} \sigma_0^2$, (4.11)

а коефіцієнт кореляції між параметрами t_i та t_j -

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}}\sqrt{Q_{jj}}}. \qquad (4.12)$$

Таким чином для оцінки вирівняних параметрів необхідно знати обернену матрицю N^{-1} або Q.

Вагові коефіцієнти Q_{ii} визначають як діагональні коефіцієнти оберненої матриці N^{-1}. Не квадратичні коефіцієнти мають властивість симетрії відносно головної діагоналі, тобто .

$$Q_{ij} = Q_{ji.} \qquad (4.13)$$

Внаслідок симетричності матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь її можна переписати, як

$$N = N^T, \qquad N^{-1} = (N^T)^{-1}$$

або $N^{-1} = (N^{-1})^T$ і $Q = Q^T$. (4.14)

Тобто обернена матриця Q також є симетричною відносно головної діагоналі. Рахуючи велику значність вагових коефіцієнтів при вирівнюванні використовують наступні способи їх визначення:

- **спосіб додаткових граф**; .
- **спосіб діагоналей**; .
- **спосіб Ганзена**. .

Тому розглянемо далі ці способи докладно. .

4.2. СПОСІБ ДОДАТКОВИХ ГРАФ.

В цьому способі використовується властивість добутку матриць

$$N \times N^T = E \quad .$$

або

$$N \times Q = E, \qquad (4.15)$$

де E – одинична матриця . Тобто маємо

$$\begin{bmatrix} N_{11} N_{12} & \cdots & N_{1k} \\ N_{21} N_{22} & \cdots & N_{2k} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ N_{k1} N_{k2} & \cdots & N_{kk} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{11} Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ Q_{k1} Q_{k2} & \cdots & Q_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15,a)$$

Із виразу (4.15) можна створити систему рівнянь

$$N \cdot Q - E = 0. \qquad (4.16)$$

Порівняємо отриману систему (4.16) із системою нормальних рівнянь

$$N \cdot \tau + L = 0. \qquad (4.17)$$

В них однакова вихідна матриця N коефіцієнтів нормальних рівнянь, але відрізняються перетвореними вільними членами.

Виходячи з того, що $N \cdot Q = E$ позначимо j-у колонку матриці Q через Q_j, а матрицю E через E_j,- і тоді отримаємо k систем нормальних рівнянь виду

$$N \cdot Q_j = E_j. \qquad (4.18)$$

Із системи (4.18) видно, що для обчислення елементів

колонки Q_j матриці Q в схемі Гаусса необхідно додатково ввести колонки E_j виду

$$-\mathrm{E}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\mathrm{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, -\mathrm{E}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (4.19)$$

Вирази (4.19) являють нові колонки вільних членів схеми Гаусса і по кожній з них можна отримати **k** колонок Q_j.

Більш того, якщо кожну із колонок E_j можна позначити як

. $$\mathrm{E}_j = \begin{bmatrix} [al] \\ [bl] \\ \vdots \\ [gl] \end{bmatrix},$$

то елементи колонок Q_j можна обчислити по тим же формулам, що і обчислюють невідомі τ_j.

Розглянемо схему обчислення коефіцієнтів Q_{ij} матриці Q на основі прикладу 3.2 при розв'язанні трьох нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

Контролем обчислень є рівності $Q_{ij} = Q_{ji}$, бо **м**атриця Q, як і матриця N, симетрична.

Зазвичай при обчисленнях табл.3.4 і 4.1 їх поєднують, а колонки E_j поміщають слідом за колонкою " контроль " в табл.3.4. Елементи матриці Q_{ij} поміщають нижче рядку " контроль" в лівій нижчій частині цієї таблиці.

Таблиця 4.1. Схема визначення коефіцієнтів матриці Q.

Рядок	Дії.	δx_1 (τ_1)	δx_2 (τ_2)	δx_3 (τ_3)	$-\mathrm{E}_1$	$-\mathrm{E}_2$	$-\mathrm{E}_3$
$\boldsymbol{k_{ls}}$	0	1	2	3	4	5	6
1 2	a E_1	+3,00 -1	+2,00 -0,667	+1,00 -0,333	-1 +0,333	0 0	0 0
3 4	b.1 E_2.1		+2,67 -1	+1,33 -0,498	+0,67 -0,250	-1 +0,374	0 0
5 6	c.2 E_3.2			2,00 -1	0 **0**	0,500 **-0,250**	-1 **0,500**

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}500 & -0{,}250 & 0 \\ -0{,}250 & +0{,}499 & -0{,}250 \\ 0 & -0{,}250 & +0{,}500 \end{pmatrix}.$$

Порядок визначення коефіцієнтів Q_{ij}за допомогою коефіцієнтів $\boldsymbol{k_{ls}}$, де l- рядок, а s- колонка схеми Гаусса (табл..4.1.) включає наступні дії.

1. Q_{31}= k_{64} = 0; Q_{32} =k_{65}= - 0,250; Q_{33}= k_{66} = +0,500.

2. Q_{23} = $Q_{33}k_{43}$ + k_{46}= $0,500$ ·(- 0,498) + 0 = $-0{,}250$. .

Q_{22} =Q_{32} k_{43} +k_{45} = (-0,250) ·(-0,498) + 0,374 = +0,499; .

Q_{21} = Q_{31} k_{43} +k_{44} = 0·(-0,498) + (-0,250) = - 0, 250; .

3.Q_{13}= Q_{33} k_{23}+$Q_{23}k_{22}$+k_{26} = .
= $0,500$ ·(-0,333) + (-0,250)(-0,667) + 0 = 0; .

Q_{12}=$Q_{32}k_{23}$+$Q_{22}k_{22}$+k_{25}= .
=(-0,250)(-0,333) + 0,499(- 0,667) +0 = $-0{,}250$; .

$Q_{11=}Q_{31}k_{23}$+$Q_{21}k_{22}$+k_{24}= .
=0 (-0,333) +(- 0,250)(- 0,667) + 0,333 = $0{,}500$. .

Спосіб обчислення вагових коефіцієнтів за допомогою додаткових граф (колонок) застосовується у тих випадках, коли необхідно визначити лише де які рядки оберненої матриці.

4.3. СПОСІБ ДІАГОНАЛЕЙ.

Спосіб діагоналей обчислення будь – якого елемента матриці Q не стребує знання інших її елементів. Він заснований на наступних міркуваннях. Матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь завжди можна представити у вигляді добутку двох трикутних матриць T_1 і T_2.

$$T_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{[ab]}{[aa]} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \left[\frac{[ag]}{[aa]}\right] & \left[\frac{[bg.1]}{[bb.1]}\right] & \cdots & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & \cdots & [ag] \\ & [bb.1] & \cdots & [bg.1] \\ & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & [gg.(k-1)] \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Матриця T_1 складена із елементів елімінаційних рядків,які взяті з оберненим знаком, а матриця T_2 складена із еквівалентних рядків схеми Гаусса. Власне на цьому уявленні і заснований спосіб Гаусса.

Так як N·Q = E, то отримаємо $T_1T_2Q = E$ і звідки слідує

$$Q = N^{-1} = T_2^{-1} \cdot T_1^{-1} \quad (4.21)$$

Покажемо, що елементи матриць T_1^{-1} і T_2^{-1} знаходяться в колонках $-E_i$ таблиці, причому в непарних рядках уявлені елементи матриці T_1^{-1} зі зворотним знаком, а в парних рядках – елементи матриці $(T_2^{-1})^T$. .

Так в нашому прикладі .

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}333 & -0{,}251 & 0 \\ & 0{,}374 & -0{,}249 \\ & & 0{,}500 \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0{,}67 & 1 & \\ 0 & 0{,}50 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Перемножимо ці матриці і отримаємо матрицю Q. Але обчислення зручно виконувати у вигляді табл.4.1 за наступним правилом: будь – який елемент Q_{ij} **м**атриці Q дорівнює взятої з оберненим знаком сумі добутків чисел всіх елімінаційних рядків із колонки $-E_i$ на елементи еквівалентних рядків із колонки $-E_j$ (так званий спосіб діагоналей). Наприклад, .

$Q_{11=}$- (-0,333 $-$ 0,67 $\cdot$ 0,251) = 0, 500; .
Q_{22}= - (-0,374 - 0,250 $\cdot$ 0,500)= 0, 500; Q_{12} = - 0,251 і т.д.

Цей спосіб дає можливість у процесі вирівнювання визначати будь – який необхідний коефіцієнт вагової матриці. Однак він також потребує створення додаткових граф Q_i.

Середні квадратичні похибки вирівняних невідомих для рівноточних вимірювань обчисляють за формулою

$$m_{xj} = m\sqrt{Q_{jj}} \quad , \qquad (4.23)$$

де m - середня квадратична похибка окремого виміру, її обчислюють за узагальненою формулою Бесселя (при k= 1)

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-k)}}. \qquad (4.24)$$

В нашому прикладі 3.2 $m = \sqrt{\frac{0{,}87}{(6-3)}} = 0{,}54''$ і

$$m_{x1} = m_{x2} = m_{x3} = 0{,}54\sqrt{0{,}50} = 0{,}38''.$$

Матрицю $M^2 = m^2Q$ називають кореляційною матрицею вирівняних невідомих. Зауважимо, що r_{ij} є коефіцієнти кореляції

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}}\sqrt{Q_{jj}}} \qquad (4.25)$$

між вирівняними i – м та j - м невідомими. Коефіцієнт кореляції між першим та другим кутами дорівнює

$$r_{ij} = \frac{-0{,}250}{\sqrt{0{,}500}\ \sqrt{0{,}500}} = -\ 0{,}5.$$

4.4. СПОСОБ ГАНЗЕНА ОБЧИСЛЕННЯ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ.

В порівнянні зі способами додаткових граф і діагоналей обсяг обчислень можна скоротити, якщо скористатися властивістю симетричності матриці Q.

Так наприклад, якщо прийняти для простоти систему трьох нормальних рівнянь, то для її можна записати три системи еквівалентних рівнянь виду .

$$\left.\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} - 1 = 0;\\ [bb.1]Q_{12} + [bc.1]Q_{13} + ? = 0;\\ [cc.2]Q_{13} + ? = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

$$\left.\begin{aligned} [aa]Q_{12} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} = 0;\\ [bb.1]Q_{22} + [bc.1]Q_{23} - 1 = 0;\\ [cc.2]Q_{23} + ? = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

$$\left.\begin{aligned} [aa]Q_{13} + [ab]Q_{23} + [ac]Q_{33} = 0;\\ [bb.1]Q_{23} + [bc.1]Q_{33} = 0;\\ [cc.2]Q_{33} - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.28)$$

В цих рівняннях знаком питання замінені вільні члени, обчислювати які не потрібно. Далі із останнього рівняння системи (4.28) зразу находимо $Q_{33}=\frac{1}{[cc.2]}$, (4.29)

із другого рівняння $Q_{23}= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}Q_{33}$, (4.30)

та із першого рівняння $Q_{13}= -\frac{[ab]}{[aa]}Q_{23} - \frac{[ac]}{[aa]}Q_{33}$. (4.31)

Таким чином, для обчислення стовпця $Q_3=\begin{pmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \\ Q_{33} \end{pmatrix}$ вводити додатковий стовпець вільних членів не потрібно (величина $\frac{1}{[cc.2]}$ вже мається в схемі Гаусса як допоміжна величина, інші же числа елімінаційних рядків цього стовпця дорівнюють нулеві).

Оскільки $Q_{23}= Q_{32}$, то останнє рівняння в системі (4.27) для визначення Q_{32} не потрібне. Прийнявши в якості Q_{32} величину Q_{23}, із другого рівняння (4.27) находимо

$$Q_{22}=\frac{1}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}Q_{32}, \qquad (4.32)$$

а із першого рівняння $Q_{12}= -\frac{[ab]}{[aa]}Q_{22} - \frac{[ac]}{[aa]}Q_{32}$. (4.33)

Зауважимо, що величина $\frac{1}{[bb.1]}$ вже є в схемі Гаусса, а елемент першого елімінаційного рядку в додатковому стовпці вільних членів дорівнює нулеві.

Таким чином і для отримання стовпця Q_2, як і стовпця Q_3, також не потрібно вводити додатковий стовпець.

Міркуючи аналогічним чином і переходячи до системи (4.26), знайдемо $Q_{11} = \frac{1}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} Q_{12} - \frac{[ac]}{[aa]} Q_{13}$, (4.34)

Прийнявши $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{13} = Q_{31}$. Обчислення доцільно розташовувати за наступною схемою табл. 4.2.

. Таблиця 4.2. Схема обчислення матриці Q_{ij}.

Дії та додатні числа	δx_1 (τ_1)	δx_2 (τ_2)	δx_3 (τ_3)
a	3,00	2,00	1,00
$\boldsymbol{E_1}$ (0,3333)	-1	-0.667	-0,333
b.1		2,67	1,33
$\boldsymbol{E_2}$ (0,3745)		-1	-0,498
c.2			2,00
$\boldsymbol{E_3}$ (0,5000)			-1
Контроль: 1,000	**0,500**	**-0,250**	**0**
0,998	**-0,250**	**0,499**	**-0,249**
1,002	**0**	**-0,249**	**0,500**

В цієї схемі обчислення починають з останнього рядку (в якому розташовують елементи стовпця Q_3), як описано вище. В подальшому всі величини, що обчислюються, вносять в нижню частину схеми, виділеною потовщеною лінією. .

У верхню же частину заносять числа із нижній у міру просовування по рядках уверх. Так обчисливши елементи третього, число – 0,249, переносять у другій рядок, а обчисливши елементи другого рядку, починаючи з 0,499, в перший рядок заносять елементи -0,250 із другого рядку і із третього. В перший рядок находять лише елемент Q_{11}= 0,500. Однак, необхідно мати на увазі, що при обчи-

сленнях Q_{ij} цим способом помилки, які можуть бути допущені, не виявляються і вся матриця Q може бути отримана невірною. Тому кожний стовпець Q_j, починаючи з останнього, слід контролювати додатково. Необхідні для цього рівності виникають безпосередньо із формули (4.18) і мають вид .

$$\left.\begin{aligned} &[ac]Q_{13}+[bc]Q_{23}+[cc]Q_{33}=1;\\ &[ab]Q_{12}+[bb]Q_{22}+[bc]Q_{23}=1;\\ &[aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13}=1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

Отримані праві частини цих рівностей доцільно записати у спеціальному стовпці “ Контроль“ (див. схему 10). Розходження можуть бути допустимі до 0,002 - 0,003.

Хоча цей спосіб нами розглянутий для трьох нормальних рівнянь (k = 3), його можна узагальнити на будь – яке число рівнянь k.

Зауважимо також, що розглянуті способи контролю дозволяють застосовувати їх для обертання симетричних матриць як вручну, так і на ЕОМ і розкривають суть способу Гаусса.

Із формул (4.8), (4.29) слідує зразу, що вага останнього невідомого $p_{x3}=[cc.2]$ або у загальному випадку

$$p_{xk}=[gg.(k-1)]. \qquad (4.36)$$

Легко отримати також формулу для обчислення ваги перед останнього невідомого

$$p_{x2} = \frac{[bb.1]}{[cc.1]}\ p_{x3} \qquad (4.37)$$

або у загальному випадку

$$p_{x(k-1)} = \frac{[pp.(k-2)]}{[gg.(k-2)]}\ p_{xk}. \qquad (4.38)$$

Так у нашому прикладі p_{x3} = 2,00. .

.

Алгоритми Гаусса $[bb.1]$ і $[cc.1]$дорівнюють .

$[bb.1]$= 2,67; $[cc.1]$= 2,00 + 0,67 = 2,67.

Тому $p_{x2} = \frac{2,67}{2,67} \cdot 2,00 = 2,00.$.

Так як ваги p_{xk} і $p_{x(k-1)}$ легко можна обчислити, то останніми в геодезичній мережі звичайно нумерують ті пункти, які припускають найменш точними із усіх, що розташовані у самому слабкому місці.

4.5. ПРО ОЦІНКУ ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ ВИРІВНЯНИХ НЕВІДОМИХ.

Однією із важливих задач вирівнювання є оцінка точності функцій вирівняних невідомих

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (4.39)$$

Можливі два способи оцінки точності, це:

- **спосіб матриці вагових коефіцієнтів функції**; .
- **спосіб додаткових стовпців**, які і розглянемо далі.

4.6. СПОСІБ МАТРИЦІ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУНКЦІЇ.

Якщо відома матриця Q вагових коефіцієнтів, то обернена вага вирівняної функції .

$$\frac{1}{p_F} = f\mathrm{Q}f^T, \qquad (4.40)$$

або в розкритих символах .

$$\frac{1}{p_F} = \sum_{(j=1)}^{k} f_j^2 Q_{jj} + 2\sum_{i<j} f_i\ f_j\ Q_{ij}, \qquad (4.41)$$

де матриця – рядок $f = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)$ (4.42)
складається із часткових похідних виду

$$f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial X_j}\right)_{X_j = x_j}. \qquad (4.43)$$

У випадку, коли k =3, замість формули (4.41) будемо мати

$$\frac{1}{p_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2f_1 f_2 Q_{12} + 2f_1 f_3 Q_{13} + 2f_2 f_3 Q_{23}. \qquad (4.44)$$

Так для нашого прикладу 3.2 обернена вага суми

вирівняних кутів $F = x_1 + x_2 + x_3$ (шостий кут) знайдемо,

рахуючи, що $f_i = 1$, $\frac{1}{p_F} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2(-0{,}25 - 0{,}25) = 0{,}50$.

В матричній формі згідно формули (4.40) отримаємо той же результат

$$\frac{1}{p_F} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}50 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}50 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}25 \quad 0 \quad 0{,}25) \cdot (1 \quad 1 \quad 1)^{\mathrm{T}} = 0{,}50.$$

Зауважимо, що матричну форму (4.40) зручно застосовувати при оцінці m- функцій. У цьому випадку матриця f має розмір m × k, причому кожний її і-й рядок відповідає і – й функції і складається, згідно (4.42). В цьому випадку в лівій частині виразу (4.40) замість оберненої ваги $\frac{1}{p_F}$ слідує писати матрицю обернених ваг системи функції (вектор – функції). Наприклад, якщо оцінюється точність двох функцій $F_1 = x_1 + x_2$ і $F_2 = x_1 + x_2 + x_3$ вирівняних 4 і 6 кутів (рис.3.1), то отримаємо

$$Q_F = P_F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}50 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}50 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}50 \end{pmatrix}.$$

Матриця Q_F симетрична і з її допомогою знайдемо коефіцієнт кореляції $r_{F_1F_2} = \frac{0{,}250}{\sqrt{0{,}500}\ \sqrt{0{,}500}} = 0{,}5.$

4.7. СПОСІБ ДОДАТКОВИХ СТОВПЦІВ.

Цей спосіб застосовується при оцінці функції, якщо вагові коефіцієнти невідомі. Тоді використовують формулу:

$$-\frac{1}{p_F} = [f_{k+1}.k] = f_{k+1} - \frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} - \ldots - \frac{[f_k.(k-1)]^2}{[gg.(k-1)]}, \qquad (4.45)$$

в якої $f_{k+1}=0$; $[f_2.1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1$;

$[f_3.2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [f_2.1]$ і т. д. .

Якщо умовно позначити

$$\left.\begin{array}{l} [al] = f_1, \\ [bl] = f_2, \\ \dots\dots\dots \\ [gl] = f_k, \\ [ll] = f_{k+1} = 0, \end{array}\right\} \qquad (4.46)$$

то алгоритм Гаусса $[f_{k+1}.k]$ розкривається як і $[ll.k]$.

Алгоритми $[f_2.1]$, $[f_3.2]$, …., $[f_k.(k-1)]$ розкриваються як і алгоритми $[bl.1]$, $[cl.2]$, …, $[gl(k-1)]$, якщо мати на увазі позначення (4.46).

Тепер легко зрозуміти, що алгоритм $\frac{1}{p_F}$ можна отримати в схемі Гаусса, якщо в її ввести додатковий стовпець вільних членів (4.46). Зробивши теж перетворення, що і в основному стовпці вільних членів l, отримаємо алгоритм

умовно $$-\frac{1}{p_F} = [ll.k]. \qquad (4.47)$$

Для контролю обчислень $\frac{1}{p_F}$ служить формула (4.48)

$$-\frac{1}{p_F} = [\Sigma_{k+1}.k] = [f] - \frac{\Sigma_1 f_1}{[aa]} - \frac{[\Sigma_2.1][f_2.1]}{[bb.1]} - \dots - \frac{[\Sigma_k.(k-1)][f_k.(k-1)]}{[gg(k-1)]},$$

(4.48) в якої знову введені суми

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 = [as] - [al] + f_1, \\ \Sigma_2 = [bs] - [bl] + f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Sigma_k = [gs] - [gl] + f_k\ . \end{array}\right\} \qquad (4.49)$$

Для розкриття алгоритмів з символом Σ слід умовно вважати що, .

$$\Sigma_1 = [as],\ \Sigma_2 = [bs]\ ,\ldots,\ \Sigma_k = [gs],\ [\Sigma_{k+1}] = [f]. \qquad (4.50)$$

Тоді алгоритм $[\Sigma_{k+1}.k]$ буде розкриватися так же, як і $[ls.k]$, тобто $\frac{1}{p_F} \xRightarrow{\text{умовно}} [ls.k]$, а алгоритми $[\Sigma_2.1]$, $[\Sigma_3.2]$,….., $[\Sigma_k.(k-1)]$ - як алгоритми $[bs.1]$, $[cs.2]$,……, $[gl.(k-1)]$, якщо рахувати позначення (4.46) , (4.50). Наприклад:

$[\Sigma_2.1] = \Sigma_2 - \frac{[ab]\Sigma_1}{[aa]}$; $[\Sigma_3.2] = \Sigma_3 - \frac{[ac]\Sigma_1}{[aa]} - \frac{[bc.1][\Sigma_2.1]}{[bb.1]}$ і т.д.
$([bs.1])$ $([cs.2])$

Знайдемо обернену вагу функції в прикладі 3.2. Для цього додамо в схему (табл.3.3) два додаткових стовпця f і Σ (табл.4.3) і виконавши їх перетворення, отримаємо обернену вагу - $\frac{1}{p_F}$ (табл..4.4). .

Подібним чином в схемі Гаусса можна оцінити точність зразу декілька функцій.

Таблиця 4.3 коефіцієнтів нормальних рівнянь

	a]	b]	c]	f]	Σ]
[a	3,00	2,00	1,00	1,00	7,00
[b		4,00	2,00	1,00	9,00
[c			3,00	1,00	7,00

Таблиця 4.4.

Визначення оберненої ваги $-\frac{1}{p_F}$.

Дії та додатні числа	δx_1 (τ_1)	δx_2 (τ_2)	δx_3 (τ_3)	f	Σ
a	3,00	2,00	1,00	1,00	7,00
$\boldsymbol{E_1(0,3333)}$	**−1**	**-0.667**	**-0,333**	**-0,333**	**-2,333**
b		4,00	2,00	1,00	9,00
b.1		2,67	1,33	0,33	4,33
$\boldsymbol{E_2}$	**(0,3745)**	**-1**	**-0,498**	**-0.124**	**-1,622**
c			3,00	1,00	7,00
c.2			2,00	0,51	2,51
$\boldsymbol{E_3}$	**(0,5000)**		**-1**	**-0,254**	**-1,249**
$\boldsymbol{\delta x_j}$ -	**0.124**	**-0,122**	**0,373**	$-\frac{1}{p_F}$ **= - 0,50**	**- 0,51**
$\overline{\boldsymbol{\delta x_j}}$	-0,875	-1,122	-0,627		
Контроль	0,999	1,000	1,000		

ГЛАВА 5. РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

5.1. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ ДИРЕКЦІЙНИХ КУТІВ МЕРЕЖІ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

В мережі тріангуляції (рис.5.1), яка створена на основі пунктів жорсткого кута АОВ, вирівняти параметричним способом дирекціоні кути сторін (рис.5.1). Оцінити точність вирівняних дирекційних кутів і кута $x_6' = \alpha_3' - \alpha_2'$.

Дирекціоні кути вихідних сторін ОА і ОВ дорівнюють $\boldsymbol{\alpha_{OA} = 0}$, $\boldsymbol{\alpha_{OB} = 135° \; 40' \; 19,5''}$. Значення виміряних кутів мережі наведені в табл.5.1. Задача прийнята з роботи [4].

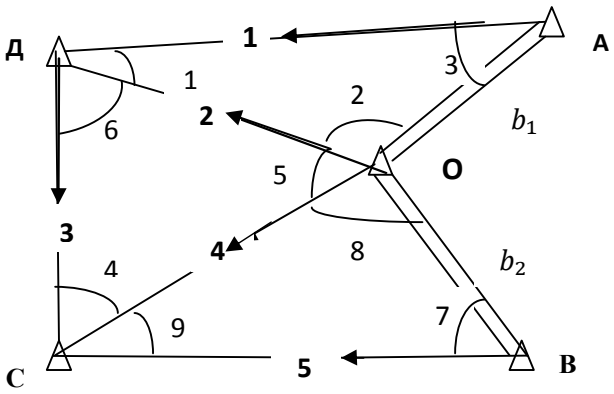


Рис. 5.1. Схема мережі.

Таблиця 5.1. .

Виміряні та вирівняні горизонтальні кути.

№ кутів	Виміряні кути x_i	Поправки v_i	Вирівняні кути x_i'
1	64° 36′ 00,9″	-1,4	64° 35′ 59,5″
2	65 53 45,2	-2,6	65 53 42,6
3	49 30 19,3	-1,4	49 30 17,9
Σ	180 00 05,4	-5,4	180 00 00,0
4	55 19 45,2	+2,7	55 19 47,9
5	55 12 15,1	+1,6	55 12 16,7
6	69 27 52,6	+2,8	69 27 55,4
Σ	179 59 52,9	+7,1	180 00 00,0
7	33 44 19,4	-1,1	33 44 18,3
8	103 13 43,4	-2,2	103 13 41,2
9	43 02 01,7	-1,1	43 02 00,6
Σ	180 00 04,5	-4,4	180 00 00,0

Розв’язання.

1. За кількістю виміряних кутів складемо рівняння поправок

$v_1 = \delta x_2 - \delta x_1 + l_1$; $v_2 = -\delta x_2 + l_2$; $v_3 = \delta x_1 + l_3$;

$v_4 = \delta x_4 - \delta x_3 + l_4$; $v_5 = \delta x_2 - \delta x_4 + l_5$; $v_6 = \delta x_3 - \delta x_2 + l_6$;

$v_7 = -\delta x_5 + l_7$; $v_8 = \delta x_4 + l_8$; $v_9 = \delta x_5 - \delta x_4 + l_9$, (5,1)

де δx_j (j = 1, 2,……, 5) - поправки до наближених значень дирекційних кутів сторін.

2. Обчислимо наближені дирекціоні кути сторін - α_i і вільні члени - l_i.

$\alpha_1 = \alpha_{AO} + ъ3 = 180° + 49° 30' 19,3'' = 229° 30' 19,3''$;

$\alpha_2 = \alpha_{AO} - ъ2 = 360° - 65°53' 45,2'' = 294° 06' 14,8''$;

$\alpha_3 = \alpha_2 + ъ6 = 294°06'14,8'' + 69°27'52,6'' - 180° = 183°34'07,4''$;

$\alpha_4 = \alpha_{OB} + ъ8 = 135° 40' 19,5'' + 103°13' 43,4'' = 238° 54' 02,9''$;

$\alpha_5 = \alpha_{BO} - ъ7 = 315° 40' 19,5'' - 33° 44' 19,4'' = 281° 56' 00,1''$.

$l_1 = \alpha_2 - \alpha_1 - ъ1 = -5,4''$; $l_2 = \alpha_{OA} - \alpha_2 - ъ2 = \alpha_{OA} - \alpha_{OA} + ъ2 - ъ2 = 0$;

$l_3 = \alpha_1 - \alpha_{AO} - ъ3 = \alpha_{AO} + ъ3 - \alpha_{AO} - ъ3 = 0$; $l_4 = \alpha_4 - \alpha_3 - ъ4 = 10,3''$;

$l_5 = \alpha_2 - \alpha_4 - ъ5 = -3,2''$; $l_6 = \alpha_3 - \alpha_2 + 180° - ъ6 = 0$;

$l_7 = \alpha_{BO} - \alpha_5 - ъ7 = 0$; $l_8 = \alpha_4 - \alpha_{OB} - ъ8 = 0$;

$l_9 = \alpha_5 - \alpha_4 - ъ9 = -4,5''$.

3. Складемо і розв'яжемо умовні та нормальні рівняння (табл..5.2; 5.3; 5.4).

Таблиця 5.2. .

Коефіцієнти і вільні члени умовних рівнянь та поправки $v_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + c_i\delta x_3 + d_i\delta x_4 + e_i\delta x_5 + l_i$.

Вимір	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	l_i	s_i	v_i
1	-1	1				-5,4	-5,4	-1,41
2		-1				0	-1	-2,57
3	1					0	1	-1,42
4			-1	1		10,3	10,3	2,74
5		1		-1		-3,2	-3,2	1,61
6		-1	1			0	0	2,75
7					-1	0	-1	-1,13
8				1		0	1	-2,24
9				-1	1	-4,5	-4,5	-1,13
δx_j	-1,42	2,57	5,32	-2,24	1,13		$[vv]$	35,98
Конт-роль	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$	$[dv]$	$[ev]$		$[lv]$	35,77
	-0,01	0,02	0,01	0,02	0			

Таблиця 5.3.

Коефіцієнти нормальних рівнянь. .

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	e]	$l]$	$s]$	$f]$	$\Sigma]$
$[a$	2	-1	0	0	0	5,4	6,4	0	1
$[b$		4	-1	-1	0	-8,6	-7,6	-1	0
$[c$			2	-1	0	-10,3	-10,3	1	1
$[d$				4	-1	18,0	19,0	0	1
[e					2	-4,5	-3,5	0	1
$[l$						165,74	165,74		
$[s$							169,74		

.

Таблиця 5.4.

Розв'язання системи нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

Додатні	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δx_5	l	s	f	Σ
0,5000 E_1	2 -1	-1 0,500	0 0	0 0	0 0	5,4 -2,70	6,4 -3,20	0 0	1,00 -0,50
0,2857 E_2		4 3,50 -1	-1 -1,00 0,286	-1 -1,00 0,286	0 0 0	-8,6 -5,90 1,686	-7,6 -4,40 1,257	-1 -1 0,286	0 0,50 -0,142
0,5846 E_3			2 1,71 -1	-1 -1,29 0,754	0 0 0	-10,3 -11,99 7,012	-10,3 -11,56 6,760	1 0,71 -0,415	1 1,14 -0,667
0,3650 E_4				4 2,74 -1	-1 -1 0,365	18,0 7,27 -2,653	19,0 9,02 -3,29	0 0,25 -0,091	1 2,00 -0,73
0,6098 E_5					2 1,64 -1	- 4,5 -1,85 1,128	-3,5 -0,21 0,128	0 0,09 -0,055	1 1,73 -1,056
$\frac{\delta x_j}{\delta x_j}$	-1,416 -2,419	2,567 1,562	5,322 4,313	-2,241 -3,245	1,128 0,128	35,76	35,75 35,86	-0,608 $-\frac{1}{p_F}$	-0,607
Конт-роль	1,003	1,005	1,009	1,004	1,000				

Продовження таблиці 5.4.

Обчислення коефіцієнтів матриці Q_{ij}.

Конт-роль	Q_{1j}	Q_{2j}	Q_{3j}	Q_{4j}	Q_{5j}
1,000	**0,6114**	**0,2228**	**0,1677**	**0,1117**	**0,0486**
1,003	**0,2228**	**0,4455**	**0,3354**	**0,2235**	**0,0971**
1,004	**0,1677**	**0,3354**	**0,8375**	**0,3352**	**0,1676**
1,003	**0,1117**	**0,2235**	**0,3352**	**0,4462**	**0,2226**
0,999	**0,0486**	**0,0971**	**0,1676**	**0,2226**	**0,6098**

Зауважимо, що матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь N обернемо на ЕОМ і отримаємо матрицю Q, тобто

$$N=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & -1 & -1 & 0 \\ & & 2 & -1 & 0 \\ & & & 4 & -1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & 8 & 6 & 4 & 2 \\ & & 15 & 6 & 3 \\ & & & 8 & 4 \\ & & & & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6111 & 0{,}2222 & 0{,}1667 & 0{,}1111 & 0{,}0556 \\ & 0{,}4444 & 0{,}3333 & 0{,}2222 & 0{,}1111 \\ & & 0{,}8333 & 0{,}3333 & 0{,}1667 \\ & & & 0{,}4444 & 0{,}2222 \\ & & & & 0{,}6111 \end{pmatrix}.$$

Матрицю Q порівняємо з матрицею Q_{ij}в схемі Гаусса (табл..5.4) і отримаємо достатньо близьку схожість.

4. Поправки v_i обчислені і наведені в табл.5.2.

Як видно, контролі $[av]=[bv]=[cv]=[dv]=[ev]=0$ виконуються у межах точності обчислень.

5. Вирівняні кути x_i' обчислені з контролем в табл..5.1. Виконуємо також контроль .

2 +5 + 8 - ∟AOB = 224°19′40,5″ - ∟AOB = 0. .

6.Обчислемо вирівняні дирекціоні кути.

α_1' = 229° 30′17,9″; α_2'= 294° 06′ 17,4″;

α_3'= 183° 34′ 12,7″; α_4'= 238° 54′ 00,7″;

α_5'= 281° 56′ 01,2″. .

7. Робимо остаточний контроль, для цього обчислимо вирівняні кути. .

1 = α_2' - α_1' = 64°35′59,5″; 2 =α_{AO} - α_2' = 65° 53′ 42,6″;

3 = α_1' - α_{AO}= 49°30′17,9″; 4 = α_4' - α_3' = 55° 19′ 47,9″;

5 = α_2' - α_4' =55°12′16,7″; 6 =α_3'-α_2'+180°= 69°27′55,4″;

7 =α_{BO}- α_5' = 33°44′18,3″; 8 =α_4'- α_{OB}=103° 13′ 41,2″;

9 = α_5' - α_4' = 43°02′00,6″. .

8. Виконуємо оцінку точності. .

Середня квадратична похибка виміряного кута .

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-k)}} = \sqrt{\frac{35,75}{4}} = 3''.$$

Середні квадратичні похибки вирівняних дирекційних кутів

. $m_{\alpha_1} = m_{\alpha_5} = 3\sqrt{0,610} = 2,3''$; .

$m_{\alpha_2} = m_{\alpha_4} = 3\sqrt{0,446} = 2,0''$; .

$m_{\alpha_3} = 3\sqrt{0,837} = 2,7''$. .

Середня квадратична похибка функції .

. $m_{x6} = 3\sqrt{\frac{1}{p_F}} = 3\sqrt{0,61} = 2,3''$. .

Обернена вага функції визначиться в додатковому стовпці схеми Гаусса через додавання стовпця (табл.5.3)

$$f = (0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T,$$.

а також за формулою .

$\frac{1}{p_{x_6'}} = Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23}$ =0,446 + 0,837 - 2· 0,335 = 0,612.

5.2. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ МЕРЕЖІ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

В мережі тріангуляції (рис.5.1), яка створена на основі жорсткого вихідного кута АОВ, потрібно вирівняти параметричним способом дирекціоні кути всіх обчислених сторін і координати пунктів С і Д (табл.5.1 і 5.5). Вихідні координати пунктів А, О, В та приблизні координати пунктів С і Д прийняті із задачі 5.3. Також оцінити точність вирівняних координат пунктів, довжину і дирекційний кут сторони $\overline{ДС}$. Умова задачи прийнята із роботи [4]. .

. Для зручності приведемо табл.5.5 координат пунктів і дирекційних кутів сторін, а також табл.5.5,а виміряних кутів цієї мережі. Таблиця 5.5

Сторони	Приблизні дирекціоні кути.	Пункти	Вихідні координати пунктів, м	
			x	y
1 2 3 4 5	229°30′15,9″ 294 06 16,5 183 34 09,2 238 54 02,2 281 56 06,8	А О В	1813,119 0 -1527, 638	0 0 1492,213
			Приблизні координати, м	
		Д С	623,360 -897,701	-1393, 272 -1488,183

Розв'язання. Вважаючи, що відомі наближені координати пунктів С і Д (рис.5.1) складемо рівняння поправок для дирекційних кутів сторін (табл.5.5) за умовою (2.25), а саме: $v_{\alpha_i} = \frac{\rho}{S}(\sin\alpha_i \delta x_C - \cos\alpha_i \delta y_C - \sin\alpha_i \delta x_Д + \cos\alpha_i \delta y_Д) + l_{\alpha_i}$, де вільні члени $l_{\alpha_i} = \alpha_i^0 - \alpha_i$; значення дирекційних кутів α_i обчислені через виміряні кути, а α_i^0 – обчислені за формулою $\alpha_i^0 = \text{arc tg}\frac{\Delta y_i^0}{\Delta x_i^0}$.

Таблиця 5.5,а. Виміряні та вирівняні горизонтальні кути.

№ кута	Виміряні кути x_i	Поправки v_i	Вирівняні кути x_i'
1	64° 36′ 00,9″	-2,0	64° 35′ 58,9″
2	65 53 45,2	-2,8	65 53 42,4
3	49 30 19,3	-0,6	49 30 18,7
Σ	180 00 05,4	-5,4	180 00 00,0
4	55 19 45,2	2,0	55 19 47,2
5	55 12 15,1	1,8	55 12 16,9
6	69 27 52,6	3,3	69 27 55,9
Σ	179 59 52,9	+7,1	180 00 00,0
7	33 44 19,4	-2,8	33 44 16,6
8	103 13 43,4	-2,2	103 13 41,2
9	43 02 01,7	0,5	43 02 02,2
Σ	180 00 04,5	-4,5	180 00 00,0

Таблиця 5.6 обчислення довжин сторін S_i'.

Сто-рони	α_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$\Delta x_i'$	$\Delta y_i'$	S_i'
1	229°30′	-0,649	-0,760	-1189,759	-1393,272	1832,139
2	294 06	0,408	-0,913	623,369	-1393,272	1526,363
3	183 34	-0,998	-0,062	-1521,061	- 94,911	1524,019
4	238 54	-0,517	-0,856	- 897,701	-1488,183	1737,975
5	281 56	0,207	-0,978	629,937	-2980,396	3046,240

Таблиця 5.7 обчислення кутів α_i^0 та вільних членів l_i.

Сто-рони	S_i, м	$\frac{\rho}{S}\sin\alpha$	- $\frac{\rho}{S}\cos\alpha$	$\frac{\Delta y_i^0}{\Delta x_i^0}$	α_i^0	l_i
1	1832	-0,856×10²	+0,731×10²	1,1710540	229°30′17,8″	+1,7
2	1526	-1,234	-0,552	- 2,2351001	294 06 14,7	-1,8
3	1524	-0,084	+1,350	0,0623979	183 34 13,8	+4,6
4	1738	-1,018	+0,614	1,6577714	238 54 02,9	+0,7
5	3046	-0,662	-0,140	- 4,7312604	281 56 03,8	-3,8

Через те, що кожна поправка до кута v_i є різницею поправок дирекційних кутів сторін, тоді для складання вирівняних поправок кутів, скористаємося складеними рівняннями поправок дирекційних кутів (2.26)

. $v_{\beta_i} = v_{\alpha_{кін}} - v_{\alpha_{поч}} + l_i$.

Віднімаючи коефіцієнти при одних і тих же поправках координат, що відповідають і – у куту рівнянь поправок дирекційних кутів, одержимо коефіцієнти, які наведені в табл.5,8. Контролем обчислення l_i є порівняння суми l_i кутів трикутника з кутовою нев'язкою цього же трикутника ($[l]_1$= - 5,4″, $[l]_2$ = +7,1″, $[l]_3$ = - 4,5″) (табл.5.1,а)

Таблиця 5.8. .

. Коефіцієнти, вільні члени та поправки умовних рівнянь виду $v_i = a_i\,\delta x_D + b_i\delta y_D + c_i\delta x_C + d_i\delta y_C + l_i$.

Кути	α_j- α_k	$\frac{a_i}{\delta x_D}$	$\frac{b_i}{\delta y_D}$	$\frac{c_i}{\delta x_c}$	$\frac{d_i}{\delta y_c}$	l_i''	v_i''
1	α_2- α_1	0,376	1,283			-4,0″	-2,0″
2	- α_2	-1,234	-0,552			0,1	-2,8
3	α_1	0,858	-0,731			-1,5	-0,6
4	α_4- α_3	0,084	-1,350	0,934	0,736	3,9	2,0
5	α_2- α_4	1,234	0,552	-1,018	0,614	-3,3	1,8
6	α_3- α_2	-1,318	0,798	0,084	-1,350	6,5	3,3
7	- α_5			-0,662	-0,140	-3,7	-2,8
8	α_4			1,018	-0,614	0	-2,2
9	α_5- α_4			-0,356	0,754	-0,8	0,5
$\delta x_j \cdot 10^{-2}$		1,922	0,891	-1,567	0,872	100,94	43,26
Контроль		0,02	0,07	0	-0,09	$[ll]$	$[vv]$
		$[av]$	$[bv]$	$[cv]$	$[dv]$		

Відмітимо, що для вихідних дирекційних кутів $\alpha_I = \alpha_{AO}$ і $\alpha_{II} = \alpha_{OB}$ рівняння поправок не складаються. Всі коефіцієнти в табл..5.8 зменшені в 100 разів. Вільні члени рівнянь поправок кутів одержимо за формулою

. $l_i = \alpha_j^0 - \alpha_i^0 - x_i$, де x_i - виміряні кути.

. Скориставшись значеннями приблизних дирекційних кутів, які наведені в табл.5,5, отримаємо значення l_i, які

вписані в табл. 5,8. Далі складемо на ЕОМ систему нормальних рівнянь

$$N = \begin{pmatrix} 5{,}667 & 0{,}052 & -1{,}288 & 2{,}599 \\ 0{,}052 & 5{,}249 & -1{,}756 & -1{,}732 \\ -1{,}288 & -1{,}756 & 3{,}517 & -0{,}852 \\ 2{,}599 & -1{,}732 & -0{,}852 & 3{,}706 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_D \\ \delta y_D \\ \delta x_C \\ \delta y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15{,}226 \\ -5{,}990 \\ 10{,}282 \\ -8{,}016 \end{pmatrix} 10^2 = 0$$

і з якої отримаємо обернену матрицю Q .

$$Q = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0{,}287 & -0{,}077 & 0{,}010 & -0{,}235 \\ -0{,}077 & 0{,}349 & 0{,}210 & 0{,}266 \\ 0{,}010 & 0{,}210 & 0{,}440 & 0{,}193 \\ -0{,}235 & 0{,}266 & 0{,}193 & 0{,}604 \end{pmatrix};$$ та вектор

невідомих поправок δx = - Q $A^T L$ = $\begin{pmatrix} 1{,}922 \\ 0{,}891 \\ -1{,}567 \\ 0{,}872 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}$.

В табл.5.8 обчислимо поправки v_i і виконуємо контроль . $[av] = [bv] = [cv] = [dv] = 0$. .

. Остаточний контроль розв'язання задачи виконується шляхом обчислення за вирівняними координатами пунктів С і Д (табл. 5.9) спочатку дирекційних кутів сторін (табл. 5.9,а), а за ними і кутів.(табл. 5.5,а). .

. Таблиця 5.9. Вирівняні координат пунктів С і Д.

Пункт	Вирівняні координати пунктів м	
	x	y
Д	623,379	-1393, 263
С	-897,717	-1488,174

Сторони	Δx	Δy	Δy/Δx	α_i
1	-1189,740	-1393,263	1,1710651	229°30′18,7″
2	623,379	-1393,263	-2,2350460	294 06 17,6

3	-1521,096	-94,911	0,0623965	183 34 13,5
4	-897,717	-1488,174	1,6577318	238 54 00,7
5	629,921	-2980,387	-4,7313663	281 56 02,9

Таблиця 5.9,а

вирівняних дирекційних кутів сторін.

Оцінка точності результатів вирівнювання.

Число надлишкових вимірів мережі дорівнює 5 і тому достатньо для обчислення середній квадратичній похибки виміру кута - m. Тому $m = \sqrt{\frac{[vv]}{5}} = \sqrt{\frac{43,26}{5}} = 2,9''$.

Середні квадратичні похибки вирівняних координат пунктів $m_{X_D} = 2,9\sqrt{0,287} \cdot 10^{-2} = 0,016$ м, $m_{Y_D} = 2,9\sqrt{0,349} \cdot 10^{-2} = 0,017$ м,

$m_{X_C} = 2,9\sqrt{0,440} \cdot 10^{-2} = 0,019$ м, $m_{Y_C} = 2,9\sqrt{0,604} \cdot 10^{-2} = 0,023$ м.

. Для оцінки функції вирівняної довжини сторони СД, приймемо матрицю f_1, в якої коефіцієнти рівняння поправок складають $f_1 = (0,998 \quad 0,062 \; -0,998 \quad -0,062)$.

Для отримання матриці функції f_2 вирівняного дирекційного кута сторони СД, необхідно обчислити коефіцієнти рівняння поправок для дирекційного кута. Тому матиме $f_2 = \frac{\rho''}{S}(\sin\alpha_3 \quad -\cos\alpha_3 \quad -\sin\alpha_3 \quad \cos\alpha_3)$, а через те, що $\frac{\rho''}{S} = \frac{206265}{1524} = 1,353 \cdot 10^2$ маємо

$f_2 = (-0{,}084 \quad +1{,}350 \quad +0{,}084 \quad -1{,}350)\cdot 10^2$.

. Далі знайдемо добутки матриць .

$$fQ = \begin{pmatrix} 0{,}286\cdot 10^{-4} & -0{,}281\cdot 10^{-4} & -0{,}428\cdot 10^{-4} & -0{,}448\cdot 10^{-4} \\ 0{,}190\cdot 10^{-2} & +0{,}136\cdot 10^{-2} & 0{,}059\cdot 10^{-2} & -0{,}420 \end{pmatrix},$$

та $Q_F = fQf^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}723\cdot 10^{-4} & -0{,}165\cdot 10^{-2} \\ -0{,}164\cdot 10^{-2} & 0{,}740 \end{pmatrix}$.

Середні квадратичні похибки m_{S_3}, m_{α_3} сторони СД $m_{S_3}=2{,}9\sqrt{0{,}723}\cdot 10^{-2}=0{,}025$ м; $m_{\alpha_3}=2{,}9\sqrt{0{,}740}=2{,}5''$.

Контрольна формула обчислення $[vv]$ має результат:

. $[vv]=[ll.k]=[ll]+L^T A\times \delta x=100{,}94-57{,}70=43{,}24$.

5.3. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ МЕРЕЖІ ТРИЛАТЕРАЦІЇ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

В мережі трилатерації (рис.5.2), яка створена на основі пунктів жорсткого кута АОВ, вирівняти параметричним способом приблизні координати пунктів С і Д, виміряні довжини сторін і дирекціоні кути цієї мережі (табл.5.10 і 5.10,а). Оцінити точність вирівняних координат пунктів С і Д, довжину і дирекційний кут сторони СД. Вихідні дані прийняті з роботи [4].

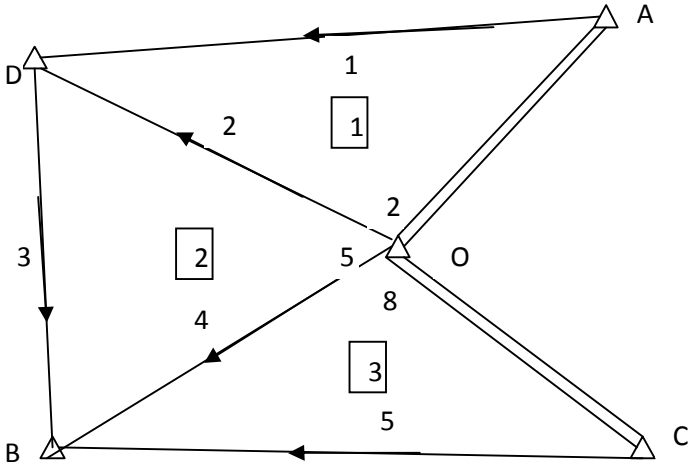


Рис. 5.2. Схема мережі трилатерації.

Координати пунктів А,О,В та приблизні координати пунктів Д і С наведені в табл.5.10. Виміряні віддалеміром довжини сторін наведені в табл.5.10,а. **Розв'язання.** 1. **Визначення приблизних координат пунктів** Д і С прийнято без виконання обчислень, вважаючи, що ці дії вивчаються в курсі " Вища геодезія ". Значення приблизних координат пунктів Д і С наведені в табл..5.10.

Таблиця 5.10. Координати пунктів мережі

Пункт	Вихідні координати, м	
	x	y
А	1813,119	0
О	0	0
В	-1527, 638	1492,213
	Приблизні координати,м	
Д	623,360	-1393, 272
С	-897,701	-1488,183

Таблиця 5.10,а. Виміряні та вирівняні довжини сторін

№ сторони	Виміряні довжини, м	Поправки v_i, м	Вирівняні довжини,м
1	1832,120	-0,001	1832,119
2	1526,358	0,001	1526,359
3	1524,054	-0,001	1524,053
4	1737,975	0,001	1737,976
5	3046,229	0	3046,229

2. Складання рівнянь поправок. .

. Рівняння поправок для сторони S_{i} наведені в темі 2.2 і мають вигляд

v_{S_i}= - $\cos\alpha_{\text{i}}\,\delta x_{\text{поч.}}$-$\sin\alpha_{\text{i}}\delta y_{\text{поч.}}$+$\cos\alpha_{\text{i}}\,\delta x_{\text{кін.}}$+$\sin\alpha_{\text{i}}\delta y_{\text{кін.}}$+ l_i, (5.3)

причому напрям на і - стороні приданий з початкового пункту на кінцевий. Необхідні дирекціоні кути для об числення коефіцієнтів $\cos\alpha_i$ і $\sin\alpha_i$ візьмемо з точністю до хвилини із задачи 5.1. .

Наближені довжини сторін обчислимо в табл.5.11 за формулою $S_i' = \sqrt{(\Delta x_i')^2 + (\Delta y_i')^2}$, (5.5)

а вільні члени знайдемо в табл.5.12 за формулою $l_{\text{i}} = S_i'$ - S_i, де S_i - виміряні довжини сторін.

Таблиця 5.11. Обчислення сторін.

Сторони	α_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$\Delta x_i'$	$\Delta y_i'$	S_i'
1	229°30′	-0,649	-0,760	-1189,759	-1393,272	1832,139
2	294 06	0,408	-0,913	623,369	-1393,272	1526,363
3	183 34	-0,998	-0,062	-1521,061	- 94,911	1524,019
4	238 54	-0,517	-0,856	- 897,701	-1488,183	1737,975
5	281 56	0,207	-0,978	629,937	-2980,396	3046,240

3. **Складання коефіцієнтів умовних і нормальних рівнянь та їх розв'язання** дано в табл. 5,12; 5,13 і 5,14.

Таблиця 5,12.

Коефіцієнти і вільні члени умовних рівнянь та поправки v_i= - $\cos\alpha_i\,\delta x_{поч.}$- $\sin\alpha_i\ \delta y_{поч.}$+$\cos\alpha_i\,\delta x_{кін.}$+ $\sin\alpha_i\delta y_{кін.}$+ l_i,

Ви-мір	a_i	b_i	c_i	d_i	l_i,см	s_i	v_i
1	-0,649	-0,760			1,9	0,491	-0,101
2	0,408	-0,913			0,5	-0,005	0,075
3	0,998	0,062	-0,998	-0,062	-3,5	-3,500	-0,097
4			-0,517	-0,856	0	-1,373	0,139
5			0,207	-0,978	1,1	0,329	-0,115
δx_j	1,667	1,210	-1,722	0,878		$[vv]$	0,058
Кон-троль	-0,001	0,002	0,001	0,0005		$[lv]$	0,059
	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$	$[dv]$			

Таблиця 5,13. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$l]$	$s]$
$[a$	1,584	0,182	-0,996	-0,062	-4,522	-3,814
$[b$		1,414	-0,062	-0,004	-2,118	-0,588
$[c$			1,306	0,302	3,721	4,271
$[d$				1,693	-0,858	1,070
$[l$					17,230	13,524
$[s$						14,484

Таблиця 5.14.

Розв’язання нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

Додатні	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	l	s	Конт-роль
(0,6313)	1,584 -1	0,182 -0,1149	-0,996 0,6288	-0,062 0,0391	-4,522 2,8548	-3,814 2,4078	-3,814 2,4078
(0,7179)		1,4,14 1,393 -1	-0,062 0,052 -0,037	-0,004 0,003 -0,002	-2,118 -1,598 1,1472	-0,588 -0,150 0,1077	-0,588 -0,150 0,1077
(1,4749)			1,306 0,678 -1	0,302 0,262 -0,388	3,721 0,937 -1,382	4,271 1,878 -2,7699	4,271 1,878 -2,7699
(0,6293)				1,693	-0,858	1,070	1,070

				1,589 -1	-1,395 0,8779	0,193 -0,1215	0,194 -0,1221
δx_j	1,6670	1,2095	-1,722	0,8779	0,058	0,056	
$\overline{\delta x_j}$	0,6669	0,2095	-2,723	-0,122			
Конт-роль	1,0001	1,0000	1,0003	0,9994			
Конт-роль	Матриця коефіцієнтів Q_{ij}.						
	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}	Q_{i4}			
0,998	1,258	-0,119	0,984	-0,130			
1,000	-0,119	0,720	-0,058	0,008			
1,000	0,984	-0,058	1,570	-0,244			
0,999	-0,130	0,008	-0,244	0,629			

4. **Обчислення вагових коефіцієнтів Q_{ij}.**

$Q_{44}=\frac{1}{[dd.3]}=\frac{1}{1,589}=0,629;$

$Q_{43}=Q_{44}(-\frac{[cd.2]}{[cc.2]})=0,629(-0,3879)=-0,244;$

$Q_{42}=Q_{44}\left(-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}\right)+Q_{43}\left(-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\right)=$

$=0,629\cdot(-0,0022)+(-0,244)(-0,0373)=0,008;$

$Q_{41}=Q_{44}(-\frac{[ad]}{[aa]})+Q_{43}(-\frac{[ac]}{[aa]})+Q_{42}(-\frac{[ab]}{[aa]})=$

$=0,629\cdot 0,0391+(-0,244)0,6288+0,008(-0,1149)=-0,130;$

Контроль: $[ad]Q_{41}+[bd]Q_{42}+[cd]Q_{43}+[dd]Q_{44}=$

$=(-0,062)(-0,130)+(-0,004)0,008+0,302(-0,244)+1,693\cdot 0,629=0,999;$

$Q_{33}=\frac{1}{[cc.2]}+Q_{43}(-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}=$

$1,4749+(-0,244)(-0,3879)=1,570;$

$Q_{32}=Q_{43}\left(-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}\right)+Q_{33}(-\frac{[bc.1]}{[bb.1]})=$

$=(-0,244)(-0,0022)+1,570(-0,0373)=-0,058;$

$Q_{31}= \quad Q_{43}(-\frac{[ab]}{[aa]}) \quad +Q_{33} \quad (-\frac{[ac]}{[aa]})+ Q_{32}(-\frac{[ad]}{[aa]}) \quad =$
$=(-0{,}244)0{,}0391+1{,}570\cdot 0{,}6288+(-\ 0{,}058)(\ -0{,}1149)= 0{,}984;$

Контроль: $[ac]Q_{31}+[bc]Q_{32}+[cc]Q_{33}+[cd]Q_{34} =$
$= (-0{,}996)0{,}984+(-0{,}062)(-0{,}058)+1{,}306\cdot 1{,}570+0{,}302(-0{,}244) =1{,}000.$

$Q_{22}= \frac{1}{[bb.1]} \quad +Q_{32} \quad (-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}) \quad + \quad Q_{42}\left(-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}\right) \quad =$
$= \quad 0{,}718+(-\quad 0{,}058) \quad (-0{,}0373)+ \quad 0{,}008(-0{,}0022)= \quad 0{,}720;$
$Q_{21}= \quad Q_{22}(-\frac{[ab]}{[aa]})+ Q_{32}(-\frac{[ac]}{[aa]})+ Q_{42}(-\frac{[ad]}{[aa]}) \quad =$
$= 0{,}720(-0{,}1149)+(-\ 0{,}058)\ 0{,}6288+0{,}008\cdot 0{,}0391= -\ 0{,}119;$

Контроль:$[ab]Q_{21}+[bb]Q_{22}+[bc]Q_{23}+[bd]Q_{24}=$
$=0{,}182(-\quad 0{,}119)+\quad 1{,}414\cdot 0{,}720+(-0{,}062)\quad 0{,}720+(-0{,}004)\quad 0{,}008=\quad 1{,}000.$
$Q_{11}=\frac{1}{[aa]}+Q_{21}(-\frac{[ab]}{[aa]})+ Q_{31}(-\frac{[ac]}{[aa]})+ Q_{41}\ (-\frac{[ad]}{[aa]}) =$.

$=0{,}631+(-\ 0{,}119)(\ -0{,}1149)+\ 0{,}984\cdot 0{,}6288+(-\ 0{,}130)\ 0{,}0391= 1{,}258;$

Контроль: $[aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13}+[ad]Q_{14} =$

$1{,}584\cdot 1{,}258+0{,}182(-0{,}119)+(-0{,}996)0{,}984+(-0{,}062)(-0{,}130)= \quad 0{,}999.$

Нагадуємо, що обчисляються тільки числа нижній частини таблиці вагових коефіцієнтів Q_{ij}, а верхня частина заповняється симетрично нижній.

5. **Застосування ЕОМ при вирівнюванні трилатерації** . В літературі [3] пропонується ще інша схема складання нормальних рівнянь, мінуючи традиційну схему.

Так, якщо рівняння поправок (2.24) записати у вигляді $v_i= -\ C_i\Delta_k + C_i\Delta_s + l_i,$ (5.6)

де матриці C_i= (cos α_i sin α_i), $\Delta_k = \begin{pmatrix} \delta x_к \\ \delta y_к \end{pmatrix}$, $\Delta_s = \begin{pmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{pmatrix}$,

то отримаємо для кожної сторони матрицю .

$$N_i = C^T C = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i \end{pmatrix} (\cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha_i & \cos\alpha_i \sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i \cos\alpha_i & \sin^2\alpha_i \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь, представимо у блочному виді порядку – k, за формулами:

1) діагональні блоки $N_{jj} = \sum_{i \in j} N_i$, (5.8)

тобто підсумовують матрицю N_i тих сторін, які належать пункту з номером - j; k – число пунктів, які визначаються; .

2) недіагональні N_{js} = - $N_{i \in j,s}$, (5.9)

де $N_{i \in j,s}$ - матриця тієї сторони, яка належить пунктам j,s, які визначаються. Так, в нашому завданні

N_{11}= N_1+ N_2+ N_3, N_{22} = N_3 +N_4+N_5, N_{12}= - N_3. (5.10)

Складаючи вільного члена $A^T L = b$ обчисляються за

формулою $b_j = \sum_{i \in j} \pm C_i^T l_i$. (5.11)

Знак “+” ставиться, якщо сторона – і спрямована до точки - j, знак “ - ” – у протилежному випадку. .

Таблиця 5.15. Коефіцієнти матриць C і N.

Сторони	Матриця C_i	Матриця N_i	l_i ,см	$C^T l_i$
1	-0,649 -0,760	0,421 0,493 0,578	1,9	-1,233 -1,444
2	0,408 -0,913	0,166 -0,372 0,833	0,5	0,204 -0,456
3	-0,998 -0,062	0,998 0,062	-3,5	3,493

			0,004		0,217
4	-0,517 -0,856	0,268	0,442 0,732	0	0 0
5	0,207 -0,978	0,043	-0,202 0,956	1,1	0,228 -1,076

Так , наприклад .

$b_1 = C_1^T l_1 + C_2^T l_2 - C_3^T l_3$, $b_2 = C_3^T l_3 + C_4^T l_4 + C_5^T l_5$. (5.11,а)

Матриці $N_{11} = \begin{pmatrix} 1{,}585 & 0{,}182 \\ 0{,}182 & 1{,}414 \end{pmatrix}$, (див. також табл.5.14)

$N_{12} = \begin{pmatrix} -0{,}996 & -0{,}062 \\ -0{,}062 & -0{,}004 \end{pmatrix}$, $N_{22} = \begin{pmatrix} 1{,}306 & 0{,}302 \\ & 1{,}693 \end{pmatrix}$

вектор b = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}522 \\ -2{,}118 \\ 3{,}721 \\ -0{,}858 \end{pmatrix}$. .

Цей спосіб значно скорочує обсяг обчислень при визначенні коефіцієнтів нормальних рівнянь.

6.**Обчислення поправок v_i (5.3) і контроль** рівністю $[av] = [bv] = [cv] = [dv] = 0$ виконані в табл.5.12.

7. **Обчислення вирівняних невідомих**: .

$X_D = X'_D + \delta X_D$ = 623,360 + 0,017 = 623,377м, .

$Y_D = Y'_D + \delta Y_D$ = -1393,272 +0,012= -1393,260м. .

$X_C = X'_C + \delta X_C$ = -897,701 – 0,017 = - 897,718м, .

$Y_C = Y'_C + \delta Y_C$ = -1488,183 +0,009 = -1488,174м. .

Тут $\delta X_D = \delta x_1$, $\delta Y_D = \delta x_2$, $\delta X_C = \delta x_3$, $\delta Y_C = \delta x_4$.

8. **Остаточний контроль розв'язання задачи** .

. $$S_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}},$$.

де S_i, Δx_i, Δy_i – відповідно вирівняні довжини сторін (табл.5.5) і приростів координат. Обчислення, які наведені в табл.5.16 доводять, що задача розв'язана вірно.

Таблиця 5.16. Значення довжин сторін. .

Сторона i	Δx_i	Δy_i	S_i
1	-1189,742	-1393,260	1832,119
2	623,377	-1393,260	1526,359
3	-1521,095	- 94,914	1524,053
4	- 897,718	-1488,174	1737,976
5	629,920	-2980,387	3046,228

Таблиця 5.17. Значення дирекційних кутів сторін.

Сторони	Виміряні дирекціоні кути.	Сек. вирівняних дирекційних кутів.	Сторони	Виміряні дирекціоні кути	Сек. вирівняних дирекційних кутів
1	229°30′15,9″	15,9	4	238 54 02,2	02,2
2	294 06 16,5	16,6	5	281 56 06,8	06,8
3	183 34 09,2	09,2			

9. **Оцінка точності вирівняної функції**. .

Коефіцієнти f_i функції – вирівняної довжини сторони СД, співпадають з коефіцієнтами рівняння поправок для цієї сторони, тобто матриця .

$f_1 = (0{,}998 \quad 0{,}062 \quad -0{,}998 \quad -0{,}062)$. .

Для того, щоб отримати матрицю f_2 для другої функції – дирекційного кута цієї сторони, необхідно обчислити коефіцієнти рівняння поправок для дирекційного кута.

Тому будемо мати .

$$f_2 = \frac{\rho''}{S}\,(\sin\alpha_3 \quad -\cos\alpha_3 \quad -\sin\alpha_3 \quad \cos\alpha_3) \qquad (5,12)$$

або, так як $\frac{\rho''}{S} = \frac{206265}{1524} = 1{,}353 \cdot 10^2$ і

$f_2 = (-0{,}084 \quad +1{,}350 \quad +0{,}084 \quad -1{,}350) \cdot 10^2$. .

Далі за формулою (4.40) находимо матрицю $Q_F = f\mathrm{Q}f^T$. При цьому $f\mathrm{Q} =$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}062 & -0{,}998 & -0{,}062 \\ -0{,}084 \cdot 10^2 & +1{,}350 \cdot 10^2 & +0{,}084 \cdot 10^2 & -1{,}350 \cdot 10^2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1{,}258 & -{,}0119 & 0{,}984 & -0{,}130 \\ -{,}0119 & 0{,}720 & -0{,}058 & 0{,}008 \\ 0{,}984 & -0{,}058 & 1{,}570 & -0{,}244 \\ -0{,}130 & 0{,}008 & -0{,}244 & 0{,}629 \end{pmatrix} = \qquad .$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}274 & -0{,}017 & -0{,}573 & 0{,}075 \\ -0{,}008 \cdot 10^2 & +0{,}966 \cdot 10^2 & +0{,}301 \cdot 10^2 & -0{,}848 \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

$$Q_F = f\mathrm{Q}f^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}840 & -0{,}195 \cdot 10^2 \\ -0{,}196 \cdot 10^2 & 2{,}475 \cdot 10^4 \end{pmatrix}. \qquad .$$

Так як в нашої задачи число надлишкових вимірів .

. $$r = n - k = 5 - 4 = 1$$.

і це є недостатнім для обчислення середній квадратичній похибки вимірів, то неможливо обчислити похибки функцій m_F. На основі даних досвіду приймемо, що середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_S = 0{,}02$ м.

Звідки середні квадратичній похибки для координат пунктів складуть:

σ_{X_D}= 0,02$\sqrt{1,258}$ = 0,022 м; σ_{Y_D}= 0,02$\sqrt{0,720}$ = 0.017 м;

σ_{X_C} = 0,02$\sqrt{1,570}$ = 0,025м; σ_{Y_C}= 0,02$\sqrt{0,629}$ = 0,016 м,

і для функцій дорівнюють: σ_{F_1}= σ_{S_3}= 0,02$\sqrt{0,840}$ = 0,018 м,

σ_{F_2}= σ_{α_3}= 0,02$\sqrt{2,475 \cdot 10^4}$ = 3,1″. $\frac{\sigma_S}{S}$= $\frac{1}{85000}$,

5.4. ВИРІВНЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

Вирівнювання нерівноточних вимірів виконується під умовою $[pvv] = V^T PV$ = min, .

де p_i - ваги вимірів діагональної матриці .

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}. \qquad (5,14)$$

Питання визначення ваг p_i було розглянуто нами раніше. Вихідна система зв'язку і рівняння поправок складаються так же, як і у випадку рівноточних вимірів, але на відміну від нього система нормальних рівнянь має вид

$[paa]\ \delta x_1$+$[pab]\ \delta x_2$ +……+$[pag]\ \delta x_k$ +$[pal]$ = 0,
$[pab]\ \delta x_1$+$[pbb]\ \delta x_2$ +……+$[pbg]\ \delta x_k$ +$[pbl]$ = 0

…… ……

$[pag]\ \delta x_1 + [pbg]\ \delta x_2 + \ldots + [pgg]\delta x_k + [pgl] = 0,$ (5,15)

де алгоритми

$[paa] = p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \ldots + p_n a_n a_n,$.

$[pab] = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n,$.

…….. .

$[pal] = p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2 + \ldots + p_n a_n l_n,$.

…….. .

$[pgl] = p_1 g_1 l_1 + p_2 g_2 l_2 + \ldots + p_n g_n l_n$ (5,16)

i $N\Delta x + b = 0,$ (5,17)

.

. $N = A^T PA,$ (5,18)

.

. $b = A^T PL.$ (5,19)

Обчислення при вирівнюванні нерівноточних вимірів, відрізняється від вже розглянутого випадку рівноточних вимірів лише схемою складання нормальних рівнянь. При цьому це можна робити двояко : .

1) привести нерівноточні виміри до рівноточних шляхом помноження i – го рівняння поправок на величину $\sqrt{p_i}$;

2) нормальні рівняння складати за звичайною вищі розглянутою схемою. .

Таблиця 5.18. Коефіцієнти умовних рівнянь.

Номер виміру	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{l}$	$\overline{s}$	Контроль	
	$[\overline{aa}]$	$[\overline{ab}]$	$[\overline{ac}]$	$[\overline{al}]$	$[\overline{as}]$		
	$[\overline{ab}]$	$[\overline{bb}]$	$[\overline{bc}]$	$[\overline{bl}]$	$[\overline{bs}]$		
	$[\overline{ac}]$		$[\overline{cc}]$	$[\overline{cl}]$	$[\overline{cs}]$		
	$[\overline{al}]$			$[\overline{ll}]$	$[\overline{ls}]$		
	$[\overline{as}]$				$[\overline{ss}]$		
	$\overline{a_i}$	$\overline{b_i}$	$\overline{c_i}$	$\overline{l_i}$	$\overline{s_i}$		$\overline{v_i}$
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1	$\sqrt{p_i}$	$\overline{v_1}$
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2	$\sqrt{p_i}$	$\overline{v_2}$
…	……				……	……	….
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n	$\sqrt{p_i}$	$\overline{v_n}$

В першій схемі матиме систему умовних рівнянь поправок

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \overline{a_1}\delta x_1 + \overline{b_1}\delta x_2 + \ldots + \overline{g_1}\delta x_к + \overline{l_1}, \\ v_2 &= \overline{a_2}\delta x_1 + \overline{b_2}\delta x_2 + \ldots + \overline{g_2}\delta x_к + \overline{l_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \overline{a_n}\delta x_1 + \overline{b_n}\delta x_2 + \ldots + \overline{g_n}\delta x_к + \overline{l_n}, \end{aligned}\right\} \qquad (5{,}20)$$

де $\overline{a_i} = a_i\sqrt{p_i}$; $\overline{b_i} = b_i\sqrt{p_i}$;….., $\overline{g_i} = g_i\sqrt{p_i}$; $\overline{l_i} = l_i\sqrt{p_i}$. (5,21)

Таблиця 5.19. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

Система нормальних рівнянь .

$$\left.\begin{aligned} &[\overline{aa}]\delta x_1 + [\overline{ab}]\delta x_2 + \ldots + [\overline{ag}]\delta x_k + [\overline{al}] = 0, \\ &[\overline{ab}]\delta x_1 + [\overline{bb}]\delta x_2 + \ldots + [\overline{bg}]\delta x_k + [\overline{bl}] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[\overline{ag}]\delta x_1 + [\overline{bg}]\delta x_2 + \ldots + [\overline{gg}]\delta x_k + [\overline{bl}] = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (5{,}22)$$

В другій звичайній схемі матиме коефіцієнти умовних рівнянь поправок Таблиця 5.19,а

Номер виміру	a_i b_i c_i l_i	s_i	p_i	a_ip_i b_ip_i c_ip_i l_ip_i	s_ip_i	v_i
1	a_1 b_1 c_1 l_1	s_1	p_1	a_1p_1 b_1p_1 c_1p_1 l_1p_1	s_1p_1	v_1
2	a_2 b_2 c_2 l_2	s_2	p_2	a_2p_2 b_2 p_2 c_2 p_2 l_2p_2	s_2p_2	v_2
…	……	…	…	……	…	…
n	a_n b_n c_n l_n	s_n	p_n	a_np_n b_np_n c_np_n l_np_n	s_np_n	v_n

і коефіцієнти нормальних рівнянь (Табл. 5.20) .

.

Таблиця 5.20. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	$a]$ $b]$ $c]$ $l]$	$s]$	Контроль
$[pa$	$[paa]$ $[pab]$ $[pac]$ $[pal]$	$[pas]$	
[pb	$[pbb]$ $[pbc]$ $[pbl]$	$[pbs]$	
[pc	$[pcc]$ $[pcl]$	$[pcs]$	
[pl	$[pll]$	$[pls]$	
[ps		$[pss]$	

. Розв’язання нормальних рівнянь, оцінка точності невідомих та їх функцій виконується аналогічно, як і у випадку рівноточних вимірів. Слід лише мати на увазі, що в усіх формулах, які відносяться до цього обчислення, в алгоритми Гаусса з двома літерами додають літеру – р.

5.5. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ НІВЕЛІРНОЇ МЕРЕЖИ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ.

Умова задачи: Вирівняти параметричним способом нівелірну мережу, яка опирається на три вихідні марки. . Виконати оцінювання точністі визначених висот трьох вузлових реперів і польових вимірювань. Схема мережи показана на рис. 1. Напрямки прокладання нівелірних ходів вказані стрілками. Вихідні дані наведені в табл. 5.21. При вирівнюванні потрібно визначити:

- відмітки вузлових реперів і величини перевищень;
- точність польових вимірювань; .
- середню квадратичну похибку одиниці ваги – μ та її похибку m_μ; .
- середні квадратичні похибки вузлових реперів - m_i;
- середню квадратичну похибку функції - m_F; .
- середню квадратичну похибку на 1 км ходу - $m_{км}$.

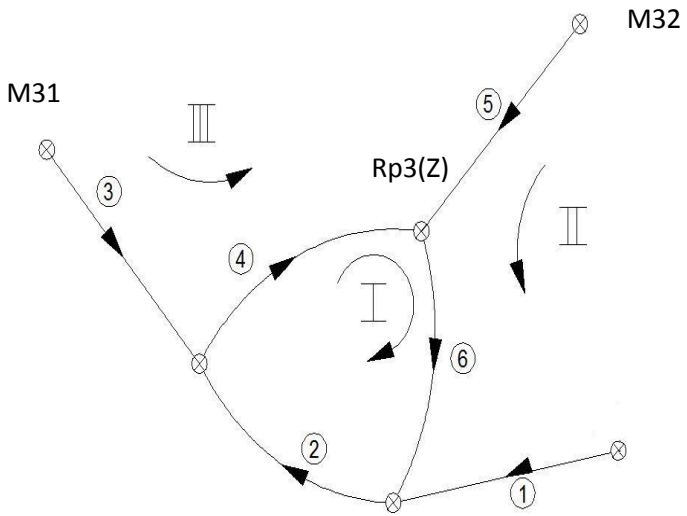


Рис. 5.3. Схема нівелірних ходів. .

Таблиці 5.21. Вихідні дані

№ вихі-дних марок	Відмітки вихідних марок-H_j, м	№ хо-ду	Переви-щення -h_i, м	Довжини ходів– Li, км	Ваги ходів. $Pi = \frac{10}{Li}$
М30	22,356	1	-1.807	25.0	0.40
		2	+3.901	7.9	1.27
М31	18,874	3	+5.554	5.8	1.72
		4	-9.952	6.1	1.64
М32	10,870	5	+3.593	8.0	1.25
		6	+6.077	9.6	1.04

.

Порядок вирівнювання.

5.5.1. Оцінка якості вимірювань і перевірка відповідності встановлених допусків та класу нівелювання.

Оцінку якості вимірювань виконуємо через порівняння обчислених нев'язок в полігонах з їх допустимими значеннями. Для вирівнювання мережі,що зображена на рис.5.3, визначимо кількість умовних рівнянь які виникають у цієї мережі за формулою:

$$r = n - k = 6 - 3 = 3,$$ де

n – кількість ходів нівелювання; k – кількість необхідних ходів для визначення відміток реперів; r – кількість надлишкових ходів (вимірів).

Для визначення нев'язок мережу поділимо на три полігони: один замкнений і два розімкнені. Позначимо полігони римськими цифрами, а непрям їх обходу пока-

жемо стрілками. Нев'язку f_h кожного полігона обчислимо за формулами - в замкненому полігоні $f_{h1} = \Sigma h$;
-в розімкненому полігоні $f_{h2} = \Sigma h - (H_{кін} - H_{поч})$, .

$$f_{h3} = \Sigma h - (H_{кін} - H_{поч}), \quad (5.23)$$

де Σh – сума перевищень по ходах, які утворюють полігон. Граничну нев'язку для полігона нівелювання III класу обчислимо за формулою: .

. $$f_{hгран.} = 10мм\sqrt{L}, км ,$$

де L – довжина полігона, вона дорівнює сумі довжин ходів, які складають полігон. Результати обчислень – в табл. 5.22.

Таблиця 5.22.

Нев'язки полігонів та їх допустимі значення.

№ полігона	Порядок обходу полигона	Ходи, які складають полигони	Нев'язки f_h, мм	Довжина полигона L, км	Гранична нев'язка fh гр, мм	Сума поправок в полигоні
I	Реп.1 до реп.1.	2,4,6	+26	23,6	49	-26
II	М32 до М 30.	5,6,1	-9	42,6	65	+9
III	М 31 до М 32.	3,4,5	+13	19,9	45	-13

Нев'язки полігонів дорівнюють: .

$f_{h1} = h_2 + h_4 + h_6 = 3,901 - 9,952 + 6,077 = + 0,026$ м.

$f_{h2} = h_5 + h_6 + h_1 - (H_{30} - H_{32}) = 3,593+6,077+1,807 - (22,356 - 10,870) = +11,477-11,486 = -0,009$ м .

$f_{h3} = h_3 + h_4 + h_5 - (H_{32} - H_{31}) = 5{,}554 - 9{,}952 - 3{,}593 - (10{,}870 - 18{,}874) = -7{,}991 + 8{,}004 = +0{,}013$ м, .

Із табл. 5.22 видно, що всі нев'язка за абсолютною величиною менше відповідно граничних III класу значень , отже точність польових вимірювань відповідає вимогам даного класу нівелювання.

5.5. 2. Вибір необхідних невідомих.

В нівелірній мережі є перевищення і відмітки. Для знаходження відміток трьох вузлових реперів достатньо виміряти три перевищення, наприклад h_1, h_3, h_5. Всі інші перевищення можуть бути обчислені за відмітками вузлових реперів і вихідних даних, тому виміри цих перевищень є надлишковими. Отже, число невідомих (параметрів) $k = 3$. В якості параметрів нівелірної мережі зручніше прийняти не самі перевищення, а вирівняні відмітки вузлових реперів

$$\mathbf{H_1 = x; \quad H_2 = y; \quad H_3 = z.} \qquad (5{,}24)$$

5.5.3. Визначення найближчих значень параметрів.

Виразимо вирівняні значення висот реперів, які визначаються через наближені значення і поправки до них:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x_0} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y_0} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}; \\ \mathbf{z} &= \mathbf{z_0} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (5{,}25)$$

Обчислимо за виміряними перевищеннями і відмітками марок 30, 31, 32 найближчі значення висот:

$x_0 = H_{30} + h_1 = 22{,}356 - 1{,}807 = 20{,}549$м;

$y_0 = H_{31} + h3 = 18,874 + 5,554 = 24,428$м;

$z_0 = H_{32} + h_5 = 10,870 + 3,593 = 14,463$м.

5.5.4. Складання параметричних рівнянь зв'язку.

Виразимо всі вирівняні значення перевищень через вирівняні відмітки реперів. Число рівнянь зв'язку дорівнює числу виміряних перевищень тобто:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ h_1 = x - H_{30}; \\ 2.\ h_2 = y - x; \\ 3.\ h_3 = y - H_{31} \\ 4.\ h_4 = z - y; \\ 5.\ h_5 = z - H_{32}; \\ 6.\ h_6 = x - z. \end{array}\right\} \begin{array}{r} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ (5,26) \end{array}$$

5.5.5. Складання параметричних рівнянь поправок.

За числом виконаних вимірів складемо шість рівнянь поправок у загальному вигляді, користуючись правилом: «**Вирівняне значення мінус виміряне значення** дає поправку»

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (x - H_{30}) - h_1 = V_1; \\ 2.\ (y - x) - h_2 = V_2; \\ 3.\ (y - H_{31}) - h_3 = V_3; \\ 4.\ (z - y) - h_4 = V_4 \\ 5.\ (z - H_{32}) - h_5 = V_5; \\ 6.\ (x - z) - h_6 = V_6. \end{array}\right\} \quad (5.27)$$

Підставимо замість невідомих їх наближені значення плюс поправки і одержимо систему перетворених рівнянь поправок .

$$\left.\begin{array}{l} 1(x_0 + \delta x - H_{30}) - h_1 = V_1; \\ 2.\ (y_0 + \delta y - x_0 - \delta x) - h_2 = V_2; \\ 3.\ (y_0 + \delta y - H_{31}) - h_3 = V_3; \\ 4.\ (z_0 + \delta z - y_0 - \delta y) - h_4 = V_4; \\ 5.\ (z_0 + \delta z - H_{32}) - h_5 = V_5; \\ 6.\ (x_0 + \delta x - z_0 - \delta z) - h_6 = V_6. \end{array}\right\}$$

Звідки:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (20{,}549+\delta x - 22{,}356) - 1{,}807) = V_1; \\ 2.\ (24{,}428+\delta y - 20{,}549 - \delta x) - 3{,}901 = V_2; \\ 3.\ (24{,}428+ \delta y - 18{,}874) - 5{,}554 = V_3; \\ 4.(14{,}463 + \delta z - 24{,}428 - \delta y) - (-9{,}952) = V_4; \\ 5.\ (14{,}463+ \delta z - 10{,}870) - 3{,}593 = V_5; \\ 6.(20{,}549 + \delta x - 14{,}463 - \delta z) - 6{,}077 = V_6. \end{array}\right\}$$

Остаточно систему рівняння поправок, в яких вільні члени виражені в сантиметрах, запишемо у вигляді системи:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ + \delta x = V_1; \\ 2.\ - \delta x + \delta y - 2{,}2 \text{ см} = V_2; \\ 3.\ + \delta y = V_3; \\ 4.\ - \delta y + \delta z - 1{,}3 \text{ см} = V_4; \\ 5.\ + \delta z = V_5; \\ 6.\ + \delta x - \delta z + 0{,}9 \text{ см} = V_6. \end{array}\right\} \qquad (5{,}28).$$

У загальному вигляді рівняння поправок v_i при трьох параметрах дорівнює :

$$v_i = p_i\,(a_i\,\delta x + b_i\,\delta y + c_i\,\delta z + l_i)\,, \qquad (5.29)$$

де p_i - вага і-го перевищення. .

Згідно рівняння (5.28) складемо табл.5.23 коефіцієнтів

№ рів-	a_i (δx)	b_i (δy)	c_i (δ z)	l_i	s_i	p_i	$v_{i,см}$

рівнянь поправок системи.

Для цього запишемо в перші 7 стовпців табл. 5.23 коефіцієнти, ваги і вільні члени рівнянь поправок, а далі зробимо контроль заповнення кожного рядку методом сум - s_i, : $a_i + b_i + c_i + \ldots\ldots\ldots + g_i + l_i = s_i$,
і загальна сума за позначенням Гаусса - [ ]: .

$$[a] + [b] + [c] + \ldots + [g] + [l] = [s]. \qquad (5.30)$$

У стовбці 7 обчислимо ваги перевищень за формулою .

$$Pi = \frac{C}{Li}, \qquad (5.31)$$

де C = 10, Li - довжина і-го нівелірного ходу.

Обчислення поправок в стовпце 8 робимо після визначення невідомих (δx_j) - δx, δy, δz. Також находимо контрольні суми $[av] + [bv] + [cv]$ і $[\boldsymbol{pvv}]$. .

Таблиця 5.23.

Коефіцієнти рівнянь поправок $v_i = p_i (a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + l_i)$.

няння 1	2	3	4	5	6	7	8
1 2 3 4 5 6	+1 -1 0 0 0 +1	0 +1 +1 -1 0 0	0 0 0 +1 +1 -1	0 -2,2 0 -1,3 0 +0,9	+1 -2,2 +1 -1,3 +1 +0,9	0,40 1,27 1,72 1,64 1,25 1,04	-1,223 -1,014 -0,037 -0,821 +0,442 -0,765
Сума	+1	+1	+1	-2,6	+0,4	$[pvv]$ = 3,864	
δx_j Конт-роль	-1,223 0,002 $[av]$	-0,037 -0,004 $[bv]$	+0,442 0,002 $[cv]$				

Примітка. Якщо коефіцієнти рівнянь поправок дорівнюють ± 1 або 0, стовпці pa, pb, pc можна не додавати .

Нормальні рівняння мають вигляд .

$$\left.\begin{aligned} [Paa]\,\delta x + [Pab]\,\delta y + [Pac]\,\delta z + [Pal] &= 0, \\ [Pbb]\,\delta y + [Pbc]\delta z + [Pbl] &= 0, \\ [Pcc]\delta z + [Pcl] &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь Таблиця 5.24

a]	b]	c]	l]	s]	Конт-роль	F	Σ	S_q
[pa 2,71 [pb [pc [pl [ps	-1,27 4,63	-1,04 -1,64 3,93	+3,73 -0,66 -3,07 9,76	+4,13 +1,06 -1,82 +9,76 +13,13	+4,13 +1,06 -1,82 +9,76 +13,13	-1 +1 0	-0,60 +2,72 +1,25 0	+3,13 +0,06 -2,82

Вільні члени виражені в сантиметрах. Ваги вимірів обчислені за формулою $p_i = \frac{10}{L_i}$. В табл. 5,23 і 5,24 наведені коефіцієнти рівнянь поправок і нормальних рівнянь.

5.5.6. Розв'язання системи нормальних рівнянь.

Розв'язання системи нормальних рівнянь за "шкільною" схемою Гаусса наведено в табл.5.25 та в іі продовженні.

Таблиця 5.25.

Ряд	Дії.	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
0	1	2	3	4	5	6	7
1	a	2,71	-1,27	-1,04	+3,73	+4,13	
2	$\boldsymbol{-E_1}$	**-1**	**+0,4686**	**+0,3838**	**-1,3764**	**- 1,5240**	**-1,524**
3	b		4,63	-1,64	-0,66	+1,06	
4	$[pab]E_1$		- 0,595	-0,487	*+1,748*	+1,935	
5	$b.1$		+4,035	-2,127	+1,088	+2,995	+2,996
6	$\boldsymbol{-E_2}$		**-1**	**+0,527**	**-0,2696**	**-0,7423**	**-0,7423**
7	c			3,93	-3,07	-1,82	
8	$[pac]E_1$			-0,399	+1,432	+1,585	
9	$[pbc.1]E_2$			-1,121	+0,573	+1,579	
10	$c.2$			+2,410	-1,065	+1,344	+1,345
11	$\boldsymbol{-E_3}$			**-1**	**0,4419**	**-0,5577**	**-0,5581**
12	l				+9,76	+9,76	
13	$[pal]E_1$	-1,376	-0,270	+0,442	-5134	-5,684	
14	$[pbl.1]E_2$	+0,170	+2,233		-0,293	-0,807	
15	$[pcl.2]E_3$	-0,017	-0,037		-0,293	-0,807	
16	$\boldsymbol{\delta x_j}$	**-1,223**	**-0,037**	**+0,442**	**+3,862**	**+3,863**	
17	s					+13,13	
18	$[pas]E_1$	- 1,524	-0,742	-0,558		-6,294	
19	$[pbs.1]E_2$	-0,214	**-0,294**			-2,223	
20	$[pcs.2]E_3$	-0,485				-0,750	
21	$\overline{\boldsymbol{\delta x_j}}$	**-2,223**	**-1,036**	**-0,558**		**3,863**	
22	$\delta x_j - \overline{\boldsymbol{\delta x_j}}$	1,000	1,000	1,000	$[\boldsymbol{Pll3}] = [\boldsymbol{Pls3}] = [\boldsymbol{Pss3}]$		

$$\left.\begin{aligned} &[Paa]\,\delta x + [Pab]\,\delta y + [Pac]\,\delta z + [Pal] = 0,\\ &[Pbb.1]\,\delta y + [Pbc.1]\delta z + [Pbl.1] = 0,\\ &[Pcc.2]\delta z + [Pcl.2] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Продовження таблиці 5.25.

№	Обчислення матриці Q_{ij} вагових коефіцієнтів					і ваги функції F		
	Q_1	Q_2	Q_3	S_Q	Контроль 2	F	Σ	Контроль 3
	8	9	10	11	12	13	14	15

1	-1			+3,13		-1	-0,60	
2	**+0,369**			**-1,155**	**-1,155**	**+0,369**	**+0,2214**	**+0,2214**
3		-1		+0,06		+1	+2,72	
4	-0,469			+1,467		-0,469	-0,281	
5	-0,469	-1		+1,527	+1,527	+0,531	+2,439	+2,439
6	**+0,116**	**+0,248**		**-0,378**	**-0,378**	**0,1316**	**-0,6045**	**-0,6045**
7			-1	-2,82		0	+1,25	
8	-0,384			1,201		-0,384	-0,230	
9	-0,247	-0,527		0,805		0,280	1,286	
10	-0,631	-0,527	-1	-0,814	-0,813	-0,104	+2,306	+2,305
11	**0,2618**	**0,2187**	**0,4149**	**0,3378**	**0,3373**	**0,0432**	**-0,9568**	**-0,9566**
12	0,369	0,116	0,262				0	
13	0,101	0,138	$=\boldsymbol{Q_{13}}$			-0,369	-0,221	
14	0,119	0,254	$=\boldsymbol{Q_{12}}$			-0,070	-0,321	
15	0,589	$=\boldsymbol{Q_{11}}$				-0,004	+0,100	
16		0,248	0,219			-0,443	-0,442	
17	0,084	0,115	$=\boldsymbol{Q_{23}}$			$-\frac{1}{P_F}$	$-\frac{1}{P_F}$	
18	0,170	0,363	$=\boldsymbol{Q_{22}}$					
19	0,254	$=\boldsymbol{Q_{21}}$				**Матриця коефіцієнтів $\boldsymbol{Q_{ij}}$**		
20			0,415=	Контроль		Q_1	Q_2	Q_3
21	0,159	0,219	$\boldsymbol{Q_{33}}$	1,001		0,589	0,254	0,262
22	0,103	0,219	$=\boldsymbol{Q_{32}}$	0,999		0,254	0,363	0,219
23	0,262	$=\boldsymbol{Q_{31}}$		0,999		0,262	0,219	0,415

Також контролюємо обчислення поправок невідомих $\boldsymbol{\delta x_j}$ через підстановку їх в еквівалентні рівняння.

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}71\ (-1{,}223) - 1{,}27(-0{,}037) - 1{,}04\cdot 0{,}442+3{,}73 = +\ 0{,}003; \\ 4{,}035(-\ 0{,}037)\ -2{,}127\cdot 0{,}442+1{,}088= -\ 0{,}001; \\ 2{,}41\cdot 0{,}442\ -1{,}065\ = 0. \end{array}\right\}$$

Переконавшись в правильності обчислення поправок δx, δy, δz, впишемо їх в нижній рядок табл.5.23 і обчислимо поправки v_i до виміряних перевищень. **Величини $[\boldsymbol{pvv}]=[\boldsymbol{pll3}]=[\boldsymbol{pls3}]=[\boldsymbol{pss3}]$ = 3,863 контролюють всі обчислення, які виконуються.** Далі обчислимо вирівняні значення невідомих – відміток реперів 1,2,3

$H_1 = x = x_0 + \delta x = 20{,}549 - 12{,}2$ мм $= 20{,}5368$ м;

$H_2 = y = y_0 + \delta y = 24{,}428 - 0{,}4$ мм $= 24{,}4276$ м;

$H_3 = z = z_0 + \delta z =$ 14,463 + 4,4 мм = 14,4674 м. .

Таблиця 5,26.

Обчислення вирівняних і остаточно контрольних перевищень.

Контролі обчислення вирівняних значень перевищень, як функцій вирівняних відміток точок виконуються.

5.5.7.Оценка точності визначених невідомих..

Для оцінки точності трьох визначених невідомих,

Хід	Виміряні перевищення,м	Поправки v_i ,мм	Вирівняні перевищення,м	Рівняння зв'язку h_i= =f_i(x,y,z)	Контрольні перевищення, м
1	-1.807	- 12,2	-1.8192	x - H_{30}	-1.8192
2	+3.901	-10,1	+3.8909	y - x	+3.8908
3	+5.554	-0,4	+5.5536	y - H_{31}	+5.5536
4	-9.952	-8,2	-9.9602	z - y	-9.9602
5	+3.593	+4,4	+3.5974	z - H_{32}	+3.5974
6	+6.077	-7,6	+6.0694	x - z	+6.0694

застосуємо метод вагових коефіцієнтів. Коефіцієнти знайдемо із наступних систем вагових рівнянь: .

- для першого невідомого – x .

$[paa]\ Q_{11}+[pab]\ Q_{12}+[pac]\ Q_{13}$ -1 =0, .

$[pab]\ Q_{11}+[pbb]\ Q_{12}+[pbc]\ Q_{13}$ = 0, .

$[pac]Q_{11}+[pbc]\ Q_{12}+[pcc]Q_{13} = 0,$.

– для другого невідомого – y .

$[paa]\ Q_{21}+[pab]\ Q_{22}+[pac]\ Q_{23}$ = 0, .

$[pab]\ Q_{21}+[pbb]\ Q_{22}+[pbc]\ Q_{23}$ - 1= 0, .

$[pac]Q_{21}+[pbc]\ Q_{22}+[pcc]Q_{23} = 0,$.

– для третього невідомого – z .

$[paa]\ Q_{31}+[pab]\ Q_{32}+[pac]\ Q_{33}$ = 0, .

$[pab]\ Q_{31}+[pbb]\ Q_{32}+[pbc]\ Q_{33} = 0,$.

$[pac]Q_{31} +[pbc]\ Q_{32} +[pcc]Q_{33} - 1 = 0.$.

Із кожної системи можна визначити три вагових коефіцієнтів, а з трьох систем для трьох невідомих, відповідно $3^2 = 9$. Порівнюючи системи вагових рівнянь і нормальних рівнянь, бачимо,що вони різняться лише невідомими і вільними членами. Тому вагові коефіцієнти знаходять одночасно з розв'язанням основної системи нормальних рівнянь шляхом введення в схему (5.25) додаткових стовпців (8 – 12) з вільними членами вагових рівнянь.

В додаткових стовпцях (8 – 10) виконуються такі ж обчислення, як в і стовпцях (2 - 4). Для контролю обчислень в додаткових стовпцях (11 - 12) утворюють контрольні суми: $S_{Q_1}= [pas]$ – 1= 4,13 – 1= 3,13 ; .

.$S_{Q_2}=[pbs]$- 1=1,06 –1=0,06; .

$S_{Q_3}= [pcs]$- 1= (-1,82) -1= -2,82. .

Вагові коефіцієнти обчислимо за формулами:

$Q_{33} = \frac{1}{[pcc.2]} = \frac{1}{2,41} = 0,415;$.

$Q_{32}= Q_{33}(-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]})= 0,415\cdot 0,527 = 0,219;$.

$Q_{31}=Q_{33}\left(-\frac{[pac]}{[paa]}\right)+Q_{32}\left(-\frac{[pab]}{[paa]}\right) = 0,415\cdot 0,3838+0,219 \cdot 0,4686= 0,262.$

$Q_{22}= \frac{1}{[pbb.1]} + Q_{32}\ (-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]})= 0,248 + 0,219\cdot 0,527=0,363;$

$Q_{21}=Q_{32}\left(-\frac{[pac]}{[paa]}\right)+Q_{22}(-\frac{[pab]}{[paa]}) = 0,219\cdot 0,3838+0,363\cdot 0,4686= 0,254.$

. $Q_{11}=\frac{1}{[aa]} +Q_{31}(-\frac{[ac]}{[aa]})+Q_{21}(-\frac{[ab]}{[aa]})=$ . .

$= 0,369+0,262\cdot 0,3838+0,2540,4686= 0,589.$.

Контроль: .
$[pac]Q_{31}$+$[pbc]$Q$_{32}$+$[pcc]Q_{33}$ = .
(-1,04)0,26 +(-1,64)0,219+3,93·0,415 = 0,999. .

$[pab]Q_{21}$+$[pbb]$Q$_{22}$+$[pbc]Q_{23}$= (1,27)0,254+4,63·0,363+ +(-1,64)0,219= 0,999. .

$[paa]Q_{11}$+$[pab]$Q$_{12}$+$[pac]Q_{13}$=2,71· 0,589+(-1,27)0,254+ +(-1,04)0,262 = 1,001. .

Перевіримо також обчислення вагових коефіцієнтів за формулою: $S_1\,(Q_{11}+Q_{12}+Q_{13})$+ $S_2\,(Q_{21}+Q_{22}+Q_{23})$ + $+S_3\,(Q_{31}+Q_{32}+Q_{33})$ =3 або 0,40(0,589+0,254+0,262)+ +1,72(0,254+0,363+0,219)+ +1,25(0,262+0,219+0,415) = 3.

де S_1 = $[pas]$-$[pal]$ = 4,13–3,73=0,40; .
S_2 = $[pbs]$-$[pbl]$ = 1,06-(-0,66) = 1,72; .
S_3 = $[pcs]$- $[pcl]$ = -1,82- 3,07 = 1,25 .
Контролі виконуються. .
Оцінку вирівняної функції обчислимо за формулою m_F = m $\sqrt{\frac{1}{P_F}}$ = m $\sqrt{Q_F}$ . .
Обернена вага вирівняної функції визначається за допомогою вагових коефіцієнтів:
$\frac{1}{p_F} = f_1^2\,Q_{11} + f_2^2\,Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2f_1f_2Q_{12} + 2f_1f_3Q_{13} + 2\,f_2f_3Q_{23}$,
де f_1, f_2, f_3 - коефіцієнти при поправках відповідних невідомих функції лінійного виду F= f_0+$f_1\delta x$+$f_2\delta y$+$f_3\delta z$,

а вільний член функції f_0 не впливає на оцінку точності функції F. .

Для обчислення оберненої ваги вирівняної функції F обрана функція вирівняного перевищення $\overline{h_2}$ ходу 2, яку виразимо формулою F = $\overline{h_2}$ = y – x. (5.32) .

Потім обчислимо коефіцієнти, що використовуються для визначення функції: .

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y} = +1, \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

і підставимо їх в табл. 5.25. Тоді обернена вага функції дорівнює $\frac{1}{P_F} = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}$ (5.33) і звідки $\frac{1}{P_F}$ = 0,589+0,363 - 2·0,254 = 0,444.

Одночасно обернена вага функції обчислена в додаткових стовпцях (13, 14) схеми розв'язання нормальних рівнянь (табл.5,25) і вона склала $\frac{1}{P_F}$ = 0,443.

В рядках1,3,7, які відведені для коефіцієнтів нормальних рівнянь, записані величини f_1 і Σ_1, f_2 і Σ_2, f_3 і Σ_3 відповідно в стовпцях f і Σ_F. Над числами стовпців 13 і 14 зроблені такі ж дії і в тому же порядку, що і в стовпці 5 вільних членів. Обернена вага вирівняної функції одержана з від'ємним знаком в рядку 17 як суму величин рядків 13 – 15 згідно формул: основна - $\frac{1}{P_F} = \frac{f_1^2}{[paa]} - \frac{[f_2.1]^2}{[pbb.1]} - \frac{[f_3.2]^2}{[pcc.2]}$, (5.34)

і контрольна - $\frac{1}{P_F} = [f] - \frac{f_1 \Sigma_1}{[paa]} - \frac{[f_2.1]\,[\Sigma_2.1]}{[pbb.1]} - \frac{[f_3.2]\,[\Sigma_3.2]}{[pcc.2]}$.(5.35)

де $\Sigma_1 = [pas] - [pal] + f_1$, $\Sigma_2 = [pbs] - [pbl] + f_2$,
$\Sigma_3 = [pcs] - [pcl] + f_3$. (5.36)

5.5.8. Оцінка точності результатів вирівнювання.

Середня квадратична похибка одиниці ваги – μ (перевищення по ходу довжиною 10 км) .

. $$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{3,86}{6-3}} = 1,13 \text{ см} = 11,3 \text{ мм.}$$.

Середня квадратична похибка величини похибки μ .

.

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}} = \frac{11,3}{\sqrt{2(6-3)}} = 4,6\text{мм.}$$.

Середня квадратична похибка перевищення на 1 км ходу

. $$m_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{11,3}{\sqrt{10}} = 3,6 \text{ мм.}$$.

Середні квадратичні похибки вирівняних значень невідомих (відміток реперів) та їх точність дорівнюють .

$m_x = \mu\sqrt{Q_{11}} = 11,3\sqrt{0,59} = 8,7$мм; .

$m_{m_x} = m_\mu\sqrt{Q_{11}} = 4,6\sqrt{0,59} = 3,5$мм; .

$m_y = \mu\sqrt{Q_{22}} = 11,3\sqrt{0,36} = 6,8$мм; .

$m_{m_y} = m_\mu\sqrt{Q_{22}} = 4,6\sqrt{0,36} = 2,8$мм; .

$m_z = \mu\sqrt{Q_{33}} = 11,3\sqrt{0,42} = 7,3$мм; .

$m_{m_z} = m_\mu\sqrt{Q_{33}} = 4,6\sqrt{0,42} = 3,0$мм. .

Середня квадратична похибка вирівняної функції F- m_F та її точність -m_{m_F} дорівнюють : .

. m_F = m $\sqrt{\frac{1}{P_F}}$ =11,3$\sqrt{0,44}$ =7,5мм; .

. m_{m_F}=$m_\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}$ =4,6$\sqrt{0,44}$ =3,1мм. .

Довірчий інтервал для будь-якої вирівняної функції F

$$F - t_\beta m_F \le F \le F + t_\beta m_F, \qquad (5.37)$$

де t_β- довірчий інтервал розподілу Ст'юдента з імовірністю β і числу ступенів вільності r = n – k .

Для невідомого вирівняного значення x довірчі інтервали визначаються із виразу

$$x - t_\beta m_x \le x \le x + t_\beta m_x \ . \qquad (5.38)$$

Так, в нашому прикладі для вирівняних значень відміток 3-х реперів нівелірної мережі при числі r =3, ймовірності p = 0,90 і коефіцієнті t_β= 2,9 одержимо наступні довірчі інтервали розподілу

20,5368 – 0,0087·2,9 ≤ $\boldsymbol{x} \le$ 20,5368 + 0,0087·2,9;

.

24,4276 – 0,0068·2,9 ≤ $\boldsymbol{y} \le$ 24,4276 + 0,0068·2,9;

.

14,4674 – 0,0073·2,9 ≤ $\boldsymbol{z} \le$ 14,4674 +0,0073·2,9 або

20,5116 ≤ $\boldsymbol{x} \le$ 20,5620; 24,4079 ≤ $\boldsymbol{y} \le$ 24,4473;

14,4462 ≤ $\boldsymbol{z} \le$ 14,4886. .

Для вирівняних перевищень h_1 і h_5 довірчі складають

-1,8192 – 0,075·2,9 ≤ h_1 ≤ -1,8192 – 0,075·2,9;

3,5974 – 0,075·2,9 ≤ h_5 ≤ 3,5974 – 0,075·2,9 або

-1,8410 $\leq h_1 \leq$ -1,7974 і 3,5756 $\leq h_5 \leq$ 3,6191.

Довірчий інтервал для середньої квадратичної похибки σ_0 одиниці ваги має вид $\gamma_1\mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2\mu$, (5.39) причому коефіцієнти $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_1^2}}$ і $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_2^2}}$ (5.40) визначаються з табл. розподілу χ^2 при числі r = n – k.

Так, при ймовірності β= 0,90 і r = 3 p_1= 0,90 і χ_2^2 = 0,584; p_2 =1- p_1= 0,10 і χ_1^2 = 6,251, . а довірчі інтервали мають вид

$$\sqrt{\frac{3}{6{,}251}} \cdot 11{,}3 \leq \sigma_0 \leq \sqrt{\frac{3}{0{,}584}} \cdot 11{,}3 \quad \text{або} \quad 0{,}78 \leq \sigma_0 \leq 2{,}56 \text{ см.}$$

Для середньої квадратичної похибки σ_F функції F аналогічно $\gamma_1 m_F \leq \sigma_F \leq \gamma_2 m_F$ або 0,52 $\leq \sigma_F \leq$ 1,70 см.

5.6. СПОСІБ ВУЗЛІВ ПРОФ. В.В. ПОПОВА СКЛАДАННЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ВИРІВНЮВАННІ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ.

У випадку вирівнювання нівелірних мереж і кутів в мережі полігонометрії професор В.В. Попов запропонував спрощені правила складання нормальних рівнянь за допомогою креслення мережі. Суть правил наступна:

а) квадратичні коефіцієнти нормальних рівнянь в рядку - j дорівнюють сумі ваг ходів, які сходяться у вузлі з тим же номером - j;

б) не квадратичні коефіцієнти, які розташовані в рядку - j та стовпці - h дорівнюють від'ємної ваги того же ходу, який з'єднує вузли з номерами – j та h;

в) вільні члени нормальних рівнянь отримують як суми величин $\pm p_i l_i$ тих ходів, які сходяться у вузлі –j, причому, якщо вузол є кінцевою точкою ходу, то ставиться позначка " + ", а якщо початковою точкою, то позначка " --".

Так, для схеми нівелірних ходів (рис.5.3) маємо нормальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned}
&Rp1\rightarrow \quad (p_1 + p_2 + p_6)\ \delta x_1 - p_2\delta x_2 - p_6\delta x_3 + b_1 = 0;\\
&Rp2 \rightarrow \quad -p_2\delta x_1 + (p_2 + p_3 + p_4)\,\delta x_2 - p_4\delta x_3 + b_2 = 0;\\
&Rp3 \rightarrow \quad -p_6\,\delta x_1 - p_4\,\delta x_2 + (p_4 + p_5 + p_6)\,\delta x_3 + b_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5.40)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= p_1\,l_1 + p_2 l_2 + p_6 l_6;\\
b_2 &= p_2\,l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4;\\
b_3 &= p_4\,l_4 + p_5 l_5 + p_6 l_6.
\end{aligned}\right\} \quad (5.41)$$

Значення

p_1 = 0,4; p_2= 1,27; p_3 = 1,72; p_4= 1,64; p_5 = 1,25; p_6= 1,04.
l_1 = 0; l_2 = -2,2см; l_3 =0; l_4 = -1,3см; l_5 = 0; l_6 = +0,9.

Тоді нормальні рівняння приймуть вид

$$\left.\begin{aligned}
&2{,}71\delta x_1 - 1{,}27\delta x_2 - 1{,}04\delta x_3 + 3{,}73 = 0;\\
&1{,}27\delta x_1 + 4{,}63\,\delta x_2 - 1{,}64\delta x_3 - 0{,}662 = 0;\\
&-1{,}04\,\delta x_1 - 1{,}64\,\delta x_2 + 3{,}93\delta x_3 - 3{,}07 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

і вони однакові з отриманими раніше(табл.5.24).

Вказані правила тотожні формулам складання матриці N системи нормальних рівнянь. Діагональні елементи цієї матриці дорівнюють $N_{jj} = \Sigma_{i\epsilon j} p_i$ (5.42)

де запис $i\epsilon j$ позначає належність і – го ходу j – му вузлу.

Недіагональні елементи $N_{jh} = \Sigma_{i\epsilon(j,k)j} \pm p_i$, (5.43)

Вектор вільних членів b_j має елементи .

$$b_j = \sum_{i\epsilon j} \pm p_i \; l_i \; . \qquad (5.44)$$

ГЛАВА 6. ДОДАТКОВІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. .

Ці способи доцільно застосовувати при розв'язанні великої кількості нормальних рівнянь.

6.1.СПОСІБ КРАКОВ'ЯНІВ (КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ).

Спосіб Краков'янів в літературі ще відомий як спосіб Холецького або квадратних коренів, або червоних чисел. В ньому застосований метод послідовного виключення невідомих, як і в схемі Гаусса. Але коефіцієнти еквівалентної системи, які називають Краков'яни - k_{ij}, отримують без проміжних обчислень, іншим методом, який далі розглянемо. Відомо, що матриця системи нормальних рівнянь

$$A\,\delta x + b = 0 \qquad (6.1)$$

реалізується через добуток $A = T^T\,T$, (6.2)

де матриця $T = \begin{bmatrix} \sqrt{[aa]} & \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} & \dots & \dots \frac{[ag]}{\sqrt{[aa]}} \\ & \sqrt{[bb.1]} & \dots & \dots \frac{[bg.1]}{\sqrt{[bb.1]}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \sqrt{[gg.(k-1)]} \end{bmatrix}$. (6.3)

При цьому замість системи (6.1) маємо систему рівнянь

$$T^T\,Z = -\,b, \qquad (6.4)$$

$$Z = T\,\delta x \qquad (6.5)$$

і вектор $\delta x = T^{-1}\,Z$, (6.6)

де Z - перетворений в схемі розв'язання вектор – b способом квадратних коренів. Розв'язання системи нормальних рівнянь виду $A\,\delta x = b$ (6.7)

способом квадратних коренів з попутним оберненням матриці A витрачає менше обсягу пам'яті ЕОМ, ніж спосіб Гаусса і тому є більш ефективним.

Приклад 6.1. Для трьох нормальних рівнянь схема обчислень наведена в табл.6.1. .

Для контролю обчислень в схемі додається сумарний стовпець S = Ae + b, (6.8)

де вектор $e = (1 \quad 1 \quad 1)^T$. (6.9)

Розв'язання системи нормальних рівнянь методом квадратних коренів виконується в табл.6.1 за наступними правилами: .

- елементи k_{ij}, Z_i, S_i обчислюють послідовно по рядках згідно наведених формул, а після обчислення усього рядку виконують контроль 1 різності між Σ_i і S_i, яка допускається у межах декількох одиниць останнього знаку;

- невідомі x_i визначаються у стовпцях 2,3,4 за допомогою стовпця 5 (Z) за формулами:

$$\sum_{j=i}^{k} \boldsymbol{k_{ij}} + \boldsymbol{Z_i} = \boldsymbol{\Sigma_i}\ ; \qquad (6.10)$$

$$\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{Z_k}\ \boldsymbol{k_{kk}^{-1}}, \qquad .$$

$$\boldsymbol{x_i} = \left(\boldsymbol{Z_i} - \sum_{j=i+1}^{k} \boldsymbol{k_{ij}\, x_j}\right) \boldsymbol{k_{ii}^{-1}}\ ; \qquad (6.11)$$

- аналогічно за допомогою стовпця – 6 (S) за мірою отримання невідомих x_i обчислюють контрольні величини $\overline{x_i}$ і

Позначення	Коефіцієнти нормальних рівнянь	Контроль 1

виконують контроль 2: x_i - $\overline{x_i}$ = 1; (6.12)

Таблиця 6.1. Схема розв'язання нормальних рівнянь методом квадратних коренів (Краков'янів). .

	a]	b]	c]	l]	s]	
1	2	3	4	5	6	7
[a	[aa] 2,583	[ab] -1,167	[ac] -0,250	[al] 1,684	[as] 2,850	
[b		[bb] 2,833	[bc] -1,000	[bl] -0,417	[bs] 0,249	
		$[bb.1]$ 2,306	[bc.1] -1,113	[bl.1] 0,344	[bs.1] 0,667	
[c			[cc] 1,887	[cl] -1,942	[cs] -1,315	
			$[cc.2]$ 1,326	[cl.2] 1,613	[cs.2] 0,285	
Обчислення коефіцієнтів - Краков'янів						
k_{ii}	k_i=k_{ii}^{-1}	k_{i2}	k_{i3}	z_i	s_i	Σ_i
$\sqrt{[aa]}$= k_{11} =1,607	k_1=k_{11}^{-1} 0,6223	-[ab] k_1 -0,726	-[ac] k_1 -0,156	-[al] k_1 1,048	-[as] k_1 1,774	- $\Sigma_1 k_1$ 1,773
k_{22}=1,518 =$\sqrt{[bb.1]}$	k_2=k_{22}^{-1} 0,6588		-[bc.1]k_2 -0,733	-[bl.1] k_2 0,227	-[bs.1] k_2 1,013	- $(\Sigma_2.1)k_2$ 1,012
k_{33} =1,151 =$\sqrt{[cc.2]}$	k_3=k_{33}^{-1} 0,8688			-[cl.2] k_3 -1,400	-[cs.2] k_3 -0,248	- $(\Sigma_3.2)k_3$ - 0,249
Формули обчислень	**основних невідомих - x_i**			**коефіцієнтів матриці Q_{ij}**		
	x_1	x_2	x_3	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}
x_3=$k_3 z_3$; $x_2 = k_2(z_2 - k_{22}x_3)$; $x_1 = k_1(z_1$ -$k_{13}x_3$-$k_{13}x_3)$.				$Q_{33} = k_3^2 = 0{,}755$. $Q_{32} = k_3^2\, k_{23}\, k_2 = 0{,}364$. $Q_{31} = (k_3^2\, k_{13} + Q_{32}\, k_{12})k_1 = 0{,}238$ $Q_{22} = (k_2 + Q_{32}\, k_{23})k_2 = 0{,}610$. $Q_{21} = (Q_{32}\, k_{13} + Q_{22}\, k_{12})k_1 = 0{,}311$ $Q_{11} = (k_1 + Q_{31}\, k_{13} + Q_{21}\, k_{12})k_1 = 0{,}551$		
Значення:	0,336	-0,437	-1,216			
Формули обчислень	**контрольних невідомих - $\overline{x_i}$**					
	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$			
$\overline{x_3}$=$k_3 s_3$; $\overline{x_2} = k_2(s_2 - k_{22}\overline{x_3})$; $\overline{x_1} = k_1(s_1$ -$\overline{x_3}\, k_{13}$ - $\overline{x_2}\, k_{13})$.						
Значення	1,337	0,563	-0,215			
Контроль 2	-1,001	-1,000	-1,001			
Матриця	$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} =$			$\begin{pmatrix} 0,551 & 0,311 & 0,238 \\ 0,311 & 0,610 & 0,364 \\ 0,238 & 0,364 & 0,755 \end{pmatrix}$		
Контроль 3	1,000	1,000	1,000			

- обчислюють проміжні суми в стовпцях 1,4,5,6,7 і отримують: .

$[bb.1]$= 2,833- $\frac{1{,}167^2}{2{,}583}$ = 2,306; [bc.1]= -1,0- $\frac{(-1{,}167)(-0{,}25)}{2{,}583}$ = -1,113;

[bl.1] = -0,417 - $\frac{(-1,167)\cdot 1,684}{2,583}$ = 0,344; $\sqrt{[bb.1]}$ = 1,518;

-[bc.1] k_2 = - 0,733; -[bl.1] k_2 = 0,227; -[bs.1] k_2 = 1,013 і т.д.

$[cc.2]$= 1,887 - $\frac{(-0,25)^2}{2,583}$ - $\frac{(-1,113)^2}{2,306}$ = 1,326;

[cl.2] = -1,942 - $\frac{(-0,25)\cdot 1,684}{2,583}$ - $\frac{(-1,113)\cdot 0,344}{2,306}$ = 1,613; $\sqrt{[cc.2]}$ = 1,151;

[cl.2] k_3 = 1,401; [cs.2] $k_3 = 0,248$; $(\Sigma_3.2)k_3$= 0,249.

Елементи матриці Q зручно обчислювати по рядках, починаючи з останньої, як і в способі Ганзена.

При цьому в матриці Q, бо вона симетрична, і тому в кожному рядку необхідно обчислювати елементи Q_{ij} при i ≥ j.

. Після обчислення елементів кожного рядку здійснюють контроль $A_i Q_j \approx 1$, де A_i- i – й рядок матриці A (i = j). Так, в нашому прикладі вагові коефіцієнти дорівнюють :

$Q_{33} = k_3^2$= $0,8688^2$ = 0,755; .

$Q_{32} = k_3^2\ k_{23}\ k_2$ = 0,755 · 0,733 · 0,6588= 0,364; .

Q_{31} =$(k_3^2\ k_{13}$ + $Q_{32}\ k_{12})k_1$ = 0,6223 (0,755· 0,156 + .
+0,364·0,726) = 0,238; .

Q_{22} =$(k_2$+ $Q_{32}k_{23})k_2$ = 0,6588 (0,6588+0,364·0,733) = 0,610.
Q_{21}= ($Q_{32}\ k_{13}$ + $Q_{22}\ k_{12})k_1$= 0,6223 (0,364·0,156 + .
+0,610·0,726) = 0,311; .

Q_{11}= $(k_1$+$Q_{31}k_{13}$+$Q_{21}k_{12})k_1$= 0,6223 (0,6223 + 0,238·0,156 + + 0,311·0,726) = 0,551. . .

Контрольні обчислення для кожного рядку матриці Q виконуються аналогічно, як і в формулі (4.35) , тобто

$$[ac]Q_{13}+[bc]Q_{23}+[cc]Q_{33} = 1; \quad .$$

$$[ab]Q_{12}+[bb]Q_{22}+[bc]Q_{23} = 1; \quad .$$

$$[aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13} = 1. \quad .$$

Отримані праві частини цих рівнянь доцільно записати у спеціальному рядку ‘’ Контроль 3 ’’. Розходження повинні бути у межах 0.002 – 0.003. .

Метод квадратних коренів, як і метод Гаусса, можна застосовувати для розв’язання систем рівнянь, в яких матриця **A** може бути як позитивна,так і негативна.

Приклад 6.2.Розв’язання систему нормальних рівнянь табл. 6.2. методом квадратних коренів та оцінімо точність вирівняної функції – F [10]. Таблиця 6.2

a]		*b*]	*c*]	*l*]	*s*]	Конт-роль	F	Σ
[pa [pb [pc [pl [ps	3,60	-1,17 4,88	-1,22 -1,25 3,81	+12, 36 + 5,05 -16,37 121,26	+13,57 +7,51 -15,03 +122,30 128,35	+13,57 + 7,51 -15,03 +122,30 +128,35	1 0 0	+2,21 +3,46 +0,34 1, 0 0

Відмітимо, що алгоритми [pll.k], [pss.k] та $\frac{1}{P_F}$ обчислюються аналогічно тому, як це робиться в схемі Гаусса. Таблиця 6.3.

Визначення похибок, які виникають при розв'язанні трьох нормальних рівнянь за схемою Гаусса

Вспо можні	δx_1	δx_2	δx_3	L	S	Конт-роль1	F	Σ	Конт-роль3
k_1= 0,5270	3,60	-1,17	-1,22	12,36	13,57	13,57	1,00	2,21	
		4,88	-1,25	5,05	7,51	7,51	0	3,46	
k_2= 0,4714			3,81	-16,37	-15,03	-15,03	0	0,34	
				121,26	122,30	122,30			
k_3= 0,5981	1,897	-0,62	-0,64	6,514	7,152	7,151	0,527	1,165	1,165
		2,121	-0,78	4,275	5,620	5,620	0,153	1,970	1,970
Неві-домі			1,672	-5,303	-3,631	-3,631	0,274	1,566	1,566
				32,43	32,44	32,43	-0,38	-0,34	-0,34
					32,44		-0,03	-0,33	-0,33
	-2,64	-0,86	3,172	$Q_{33} = k_3^2 = 0,5981^2$ =0,3577.					
Конт-роль2	-3,64	-1,86	2,172	$Q_{32} = k_3^2\, k_{23} k_2$ =0,3577·0,776· 0,4714= 0,1308.					
	1,00	1,00	1,00	$Q_{31} = (k_3^2\, k_{13} + Q_{32}\, k_{12}) k_1$ = =(0,3577·0,643+0,1308·0,617)0,527= 0,1637.					
Q =	0,376	0,132	0,164	$Q_{22} = (k_2 + Q_{32}\, k_{23}) k_2$ = =(0,4714+ 0,1308·0,776) 0,4714 = 0,2701.					
	0,132	0,270	0,131	$Q_{21} = (Q_{32}\, k_{13} + Q_{22}\, k_{12}) k_1$= =(0,1308·0,643+0,2701·0,617)·0,527 = 0,1321.					
	0,164	0,131	0,358	$Q_{11} = (k_1 + Q_{31}\, k_{13} + Q_{21}\, k_{12}) k_1$= =(0,527+0,1637·0,643+0,1321·0,617)·0,527 = 0,3761.					

При розв'язанні системи нормальних рівнянь **неминучі похибки обчислень, які поділяються на два види.**

1. Похибки через неминучі округлення при обчисленнях і тому замість точних невідомих x_i отримаємо

$$x_i' = x_i + \delta x_i \,. \qquad (6.13)$$

Підставляючи x_i' у вихідну систему рівнянь, замість вільних членів b_i отримаємо вільні член

$$b_i' = b_i + \delta b_i \,. \qquad (6.14)$$

Якщо нев'язки δb_i перевищують 1-2 одиниці останньої цифри вільних членів, то слід уточнити це розв'язання

шляхом обчислення додаткового стовпця δb і знаходження поправки $\delta_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{p})}$. Це уточнення повторюють доки поправки $\delta_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{p})}$ в p – ому кроці стануть незначними.

2.Похибки, які виникають через помилки в коефіцієнтах і вільних членах вихідної системи і які не можуть бути усунені. Однак у цьому випадку можна обчислити похибку отримання невідомих x_i.

Допустимо, що відомі максимальні похибки коефіцієнтів і вільних членів, які позначимо через $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$; тоді можна показати, що максимальне перекручення вільних членів (максимальна нев'язка) складе однакову в кожному рівнянні величину

$$\mathrm{d} = \Delta\alpha \sum_{i=1}^{k} |x_i| + \Delta\beta. \qquad (6.15)$$

Тоді приписують до системи рівнянь стовпець Δ, який складають з одиниць, розглядують його як стовпець вільних членів - b і отримують невідомі $\overline{\Delta x_1}$, ..., $\overline{\Delta x_k}$.

Ці величини обчислюють так же, як і δx_i, але так як позначка похибок $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$ невідомі, то розраховуючи на самий несприятливий випадок, ми повинні оперувати тільки з модулями всіх чисел,що участують в обчисленнях.

Таким чином при кількості рівнянь k = 3.

$$\overline{\Delta x_3} = \frac{\Delta_3 . 2}{[pcc.2]};$$

$$\overline{\Delta x_2} = \frac{\Delta_2.1}{[pbb.1]} + \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\overline{\Delta x_3};$$

$$\overline{\Delta \boldsymbol{x_1}} = \frac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{paa}]} - \frac{[\boldsymbol{pab}]}{[\boldsymbol{paa}]}\overline{\Delta x_2} + \frac{[\boldsymbol{pac}]}{[\boldsymbol{paa}]}\overline{\Delta x_3}\,. \qquad (6.16)$$

Остаточно отримаємо не усунені похибки обчислення кожного невідомого за формулою $\Delta x_i = \mathrm{d}\,\overline{\Delta \boldsymbol{x_i}}$. (6.17)

Далі розглянемо визначення похибок на прикладі розв'язанні системи трьох нормальних рівнянь виду

$4{,}15x_1 + 1{,}98x_2 + 1{,}95x_3 - 3{,}20 = 0;$

$1{,}98x_1 + 3{,}02x_2 + 0{,}99x_3 - 2{,}60 = 0;$

$1{,}95x_1 + 0{,}99x_2 + 3{,}01x_3 - 2{,}10 = 0$

при $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0{,}005$.

Таблиця 6.4

Визначення та усунення похибок розв'язання системи нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

У результаті розв'язання отримані значення Δ, d, $\overline{\Delta \boldsymbol{x_i}}$ та усунені похибки обчислення кожного невідомого Δx_i .

x_1	x_2	x_3	l	s	Контроль	Δ
4,15	**1.980**	**1,950**	**-3,200**	**4,880**		**1**
-1,000	**-0,477**	**-0,470**	**0,771**	**-1,176**	**-1,176**	**0,241**
	2,080	**0,060**	**-1,070**	**1,060**	**1,070**	**1,480**
	-1,000	**-0,029**	**0,514**	**-0,510**	**-0,515**	**0,712**
		2,090	**-0,560**	**1,530**	**1,530**	**1,510**
		-1,000	**0,268**	**-0,732**	**-0,732**	**0,723**
x_i=0404 **$\overline{x_i}$= 0,599**	**0,506** **-0,489**	**0,268** **-0,732**	$= \sum_{i=1}^{3}\lvert x_i\rvert = 1{,}178.$			
1,003	**0,995**	**1,000**	$\mathrm{d} = \Delta\alpha \sum_{i=1}^{3}\lvert x_i\rvert + \Delta\beta =$ $= 0{,}005\cdot 1{,}2 + 0{,}005 = 0{,}011$			
$\overline{\Delta x_i}$ 0,93 **Δx_i0,010**	**0,73** **0,008**	**0,72** **0,008**				

6.2. СПОСОБИ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Способи наближень (способи ітерацій) використовують при розв'язанні великої кількості нормальних рівнянь, замість прямих способів, тобто способів Гаусса і квадратних коренів. .

В прямих способах розв'язання невідомі отримують шляхом виконання кінцевої заздалегідь відомої кількості арифметичних операцій. .

Способи наближень засновані на поступовому уточненні невідомих, які виконуються до тих пір, поки максимальна різниця $\left|m_j^{(m)} - m_j^{(m-1)}\right|$ буде менше наперед заданого позитивного числа ε, величина якого визначається необхідною точністю обчислень.

Кількість наближень –р при цьому заздалегідь вказати неможливо. Обчислення невідомих $x_j^{(m)}$ у кожному – m наближенні вимогає значно менше обсягу обчислень, ніж отримання невідомих у прямих методах. Ефективність способів ітерацій, отже цілком визначається кількістю наближень, яке залежить від швидкості сходження процесу. .

Обсяг обчислень в прямих методах збільшується прикладне пропорційно кубу кількості рівнянь, тому способи ітерацій для розв'язання великих систем рівнянь частіше являються більш ефективними.

6.2.1. Спосіб простої ітерації. .

Поперед обчислень систему рівнянь Ax = b необхідно перетворити до вигляду зручному для ітерацій, тобто

$$x = \alpha x + \beta \ . \qquad (6.18)$$

Нехай дана система нормальних рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x_1+[ab]x_2 + \cdots + [ag]x_k + [al] = 0; \\ [ab]x_1+[bb]x_2 + \cdots + [bg]x_k + [bl] = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ag]\, x_1+[bg]x_2 \ +\ldots..+[gg]x_k + [gl] = 0. \end{array}\right\} \qquad (6.19)$$

Так, як всі діагональні коефіцієнти нерівні нулю, то кожне j–е рівняння можна розв'язати відносно x_j таким чином:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ 0 \cdot x_1 \ - \frac{[ab]}{[aa]}\, x_2 - \cdots - \frac{[ag]}{[aa]} x_k - \frac{[al]}{[aa]}; \\ x_2 = \ -\frac{[ab]}{[bb]}\, x_1 - 0 \ \cdot x_2 - \cdots - \frac{[ag]}{[bb]} x_k - \frac{[bl]}{[bb]}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = -\ \frac{[ag]}{[gg]}\, x_1 - \frac{[bg]}{[gg]} x_2 \ \ -\ldots..- \ 0 \cdot x_k - \frac{[gl]}{[gg]}, \end{array}\right\} \qquad (6.20)$$

де вектори β і α :

$$\beta = -\begin{pmatrix} \frac{[al]}{[aa]} \\ \frac{[bl]}{[bb]} \\ \vdots \\ \frac{[gl]}{[gg]} \end{pmatrix}; \ (6.21) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{[ab]}{[aa]} & \ldots & -\frac{[ag]}{[aa]} \\ -\frac{[ab]}{[bb]} & 0 & \ldots & -\frac{[ag]}{[bb]} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ -\frac{[ag]}{[gg]} & -\frac{[bg]}{[gg]} & \ldots & 0 \end{pmatrix}. (6.22)$$

Рівняння (6.21) і (6.22) являють собою матричний запис системи рівнянь (6.20).

Далі поступово находимо вектори x_j: .

- нульове наближення приймають рівним вектору вільних членів, тобто $x^{(0)} = \beta$; (6.22)

- поступово в першому наближенні находимо вектори

$$x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta; \qquad (6.23)$$

- в другому наближення $x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta$; (6.24)

- в **m** наближенні $x^{(m)} = \alpha x^{(m-1)} + \beta$. (6.25)

У докладному запису формули наближень мають вид

$$x_j^{(0)} = b_j; \qquad (6.26)$$

$$x_j^{(m)} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, x_j^{(m-1)} + \beta_i. \qquad (6.27)$$

Розглянутий спосіб поступових наближень носить назву **простої ітерації**. Він швидко сходиться, якщо елементи матриці $\boldsymbol{\alpha}$ невеликі за абсолютною величиною. Достатні умови, коли сходиться цей процес, наступні:

$$1)\ \|\alpha\|_1 = max_i \sum_{i=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1, \qquad (6.28)$$

або

$$2)\ \|\alpha\|_2 = max_j \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{ij}| < 1, \qquad (6.29)$$

або

$$3)\ \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{ij}|^2} < 1. \qquad (6.30)$$

Величини $\|\alpha\|_1$, $\|\alpha\|_2$ називають відповідно першою і другою нормою матриці $\boldsymbol{\alpha}$, вони являють максимальну суму модулів елементів матриці $\boldsymbol{\alpha}$ по рядках або стовпцях. Третя норма $\|\alpha\|_3$ - це сума квадратів усіх її елементів.

Процес сходиться, якщо діагональні елементи матриці А системи перебільшують суму модулів недіагональних елементів для кожного рядку або для кожного стовпця. В якості прикладу розв'яжемо систему нормальних рівнянь .

$$\begin{pmatrix} 2{,}583 & -1{,}167 & -0{,}250 \\ -1{,}167 & 2{,}833 & -1{,}000 \\ -0{,}250 & -1{,}000 & 1{,}887 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1{,}684 \\ 0{,}417 \\ 1{,}942 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.31)$$

Перевіримо, що процес буде сходитися, так як $2{,}583 > 1{,}417$; $2{,}833 > 2{,}167$; $1{,}887 > 1{,}250$.

Обчислення способом простої ітерації. Таблиця 6.5.

α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	$x_j^{(0)} = \beta_i$	$x_j^{(1)}$	$x_j^{(2)}$	$x_j^{(3)}$
0	0,452	0,097	0,652	0,5	0,46	0,41
0,412	0	0,353	-0,147	-0,2	-0,29	-0,38
0,132	0,530	0	-1,029	-1,0	-1,12	-1,18

Продовження таблиці 6.5.

$x_j^{(4)}$	$x_j^{(5)}$	$x_j^{(6)}$	$x_j^{(7)}$	$x_j^{(8)}$	$x_j^{(9)}$	$x_j^{(10)}$	$x_j^{(11)}$
0,37	0,36	0,35	0,34	0,34	0,338	0,338	0,337
-0,39	-0,41	-0,42	-0,43	-0,434	-0,435	-0,437	-0,437
-1,19	-1,20	-1,20	-1,21	-1,212	-1,215	-1,215	-1,216

Так як $max\left|m_j^{(11)} - m_j^{(10)}\right| = 0{,}001$, то обчислення закінчімо. Значення невідомих отримані такими же, як і при розв'язанні нормальних рівнянь за схемою квадратних коренів (п.6.1). Відмітимо, що так, як остаточний результат не залежить від початкового наближення, то точність обчислень доцільно збільшувати за мірою покращення умов, коли процес сходиться. .

.

6.2.2. Метод ітерацій Зейделя.

Видозміною способу простої ітерації є **метод Зейделя**, який для системи нормальних рівнянь завжди сходиться.

Відміною цього методу є те, що при обчисленні $x_j^{(m)}$ використаються значення $x_i^{(m)}$ (i = 1, 2, …., j -1), які вже отримані в цьому же наближенні. Формули для обчислення мають вид .

$$x_1^{(m)} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j}\, x_j^{(m-1)} + \beta_1 x_2^{(m)} = .$$

$$= \alpha_{21}\; x_1^{(m)} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_{2j}\, x_j^{(m-1)} + \beta_2; .$$

..... .

$$x_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\; x_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\, x_j^{(m-1)} + \beta_i;$$

. …….. .

$$x_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj}\; x_j^{(m)} + \alpha_{kk} x_k^{(m-1)} + \beta_k.$$

Наприклад, для k = 3 маємо .

$$x_1^{(m)} = \alpha_{11} x_1^{(m-1)} + \alpha_{12} x_2^{(m-1)} + \alpha_{13} x_3^{(m-1)} + \beta_1;$$

$$x_2^{(m)} = \alpha_{21} x_1^{(m)} + \alpha_{22} x_2^{(m-1)} + \alpha_{23} x_3^{(m-1)} + \beta_2;$$

$$x_3^{(m)} = \alpha_{31} x_1^{(m)} + \alpha_{32} x_2^{(m-1)} + \alpha_{33} x_3^{(m-1)} + \beta_3;$$

В табл.6.5 наведені результати розв’язання системи методом Зейделя. Таблиця 6.6

α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	β_i	$x_j^{(1)}$	$x_j^{(2)}$
0	0,452	0,097	0,652	0,5	0,41
0,412	0	0,353	-0,147	-0,3	-0,31
0,132	0,530	0	-1,029	-1,1	-1,14

Продовження таблиці 6.6.

$x_j^{(3)}$	$x_j^{(4)}$	$x_j^{(5)}$	$x_j^{(6)}$	$x_j^{(7)}$	$x_j^{(8)}$
0,40 -0,38 -1,18	0,37 -0,41 -1,20	0,38 -0,43 -1,21	0,34 -0,434 -1,214	0,338 -0,436 -1,215	0,337 -0,437 -1,216

Отримані результати однакові зі способом простої ітерації, хоча кількість наближень склало значно менше.

ГЛАВА 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНОГО СПОСОБУ ПРИ ОБРОБЦІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ.

7.1. НЕОБХІДНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНОГО СПОСОБУ.

Оброблення експериментальних залежностей щільно пов'язане із застосуванням методу найменших квадратів.

Нехай робиться випробування, з метою якого маємо результати дослідження залежностей деякої фізичної величини У від фізичної величини Х, причому припускається, що У і Х пов'язані функціональною залежністю

$$У = \varphi(X). \qquad [3]$$

У результаті спостережень отримані пари чисел

$$(x_i \;\; y_i) \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Про форму залежності судять, виходячи із сутності задачі або зовнішнього вигляду експериментальних залежностей. .

Наприклад, експериментальні точки, що зображені на рис. 7.1, уявляють прямолінійну залежність виду

$$y = a\,x + b, \qquad (7.1)$$

а на рис. 7.2 – поліном другої степені виду

$$y = a\,x^2 + b\,x + c. \qquad (7.2)$$

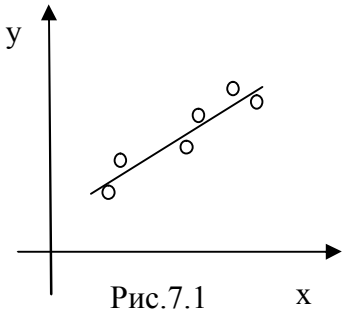


Рис.7.1

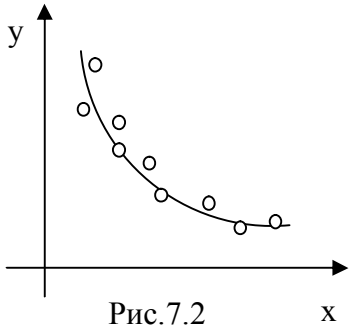


Рис.7.2

У загальному випадку можна говорити про підбір поліному степені n -1, який задає криву, яка проходить через всі n точок $(x_i\ y_i)$. Але побудування такого поліному недоцільно, бо існуюча залежність буде перекручена випадковими похибками спостережень. .

Для згладжування випадкових ухилів саме і служить метод найменших квадратів. З його допомогою визначають параметри **a, b, c** поліномів згладжування.

7.2.ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ.

Для прямолінійної залежності y = a x + b маємо рівняння поправок виду $a_i\ \delta x + b_i \delta y + l_i = v_i$. (7.3)

Для нашого випадку система умовних рівнянь буде

$$\left.\begin{array}{l} a x_1 + b - y_1 = v_1; \\ a x_2 + b - y_2 = v_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a x_n + b - y_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (7.4)$$

. . (n > 2).

Тут роль невідомих грають два параметри a і b, а роль вимірів l_i – величини y_i. Коефіцієнти при a і b утворюють

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}, \quad A^T L = \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Тому маємо систему нормальних рівнянь з двома невідомими .

$$\left.\begin{aligned} [x^2]\, a + [x]b - [xy] = 0, \\ [x]a + n\,b - [y] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.6)$$

Розв'язання виконуємо за допомогою оберненої матриці .

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

де $$Q = \frac{1}{[x^2]n - [x]^2} \begin{pmatrix} n & -[x] \\ -[x] & [x^2] \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Звідки

$$a = \frac{n[xy] - [x][y]}{[x^2]n - [x]^2}, \quad (7.9) \quad b = \frac{-[x][xy] + [y][x^2]}{[x^2]n - [x]^2}. \quad (7.10)$$

Приклад 7.1. Визначення параметрів прямолінійної залежності результатів дослідження.

Нехай маємо пари результатів спостережень (x_i y_i), які уявлені в табл.7.1 та на графіку у вигляді точок (рис.7.1). Далі обчислимо: .

$[x^2] = 385$, $[xy] = 200{,}9$, $[x^2]n - [x]^2 = 825$.

Графік показує, що можна припустити функціональну залежність **y = a x + b**

Таблиця 7.1.

N спосте-реження	x_i	y_i	x^2	xy	v_i
1	1	2,8	1	2,8	-0,16
2	2	2,7	4	5,4	0,11
3	3	2,9	9	8,7	0,08
4	4	3,3	16	13,2	-0,16
5	5	3,2	25	16,0	0,11
6	6	3,4	36	20,4	0,08
7	7	3,6	49	25,2	0,05
8	8	3,9	64	31,2	-0,08
9	9	4,0	81	36,0	-0,02
10	10	4,2	100	42,0	-0,04
Σ	55	34,0	385	200,9	-0,03

. Тоді з формул (7.9), (7.10) маємо .

$$a = \frac{2009-1870}{825} = 0{,}168; \qquad b = \frac{-11049{,}5+13090}{825} = 2{,}473$$

і рівняння зв'язку $y = 0{,}168\,x + 2{,}473$.

Далі обчислимо ухилення від прямої (табл.7.1) .

$$v_i = 0{,}168\,x_i + 2{,}473 - y_i \quad .$$

та здійснюємо контроль на основі запису .

$$[xv] = -\,0{,}18 \approx 0, \qquad [v] = -\,0{,}03 \approx 0. \quad .$$

Для оцінки точності обчислимо .

$$[v^2] = 0{,}0991; \qquad m = \sqrt{\frac{0{,}0991}{10-2}} = 0{,}11.$$

Згідно формули (4,23) $m_a = m\sqrt{Q_{11}}$ і $m_b = m\sqrt{Q_{22}}$,

де $Q_{11} = \frac{n}{[x^2]n - [x]^2} = \frac{10}{825} = 0{,}0121;$.

$Q_{22} = \frac{[x^2]}{[x^2]n - [x]^2} = \frac{385}{825} = 0{,}467.$ Тому

$m_a = 0{,}11\sqrt{0{,}0121} = 0{,}012;\ m_b = 0{,}11\sqrt{0{,}467} = 0{,}068.$

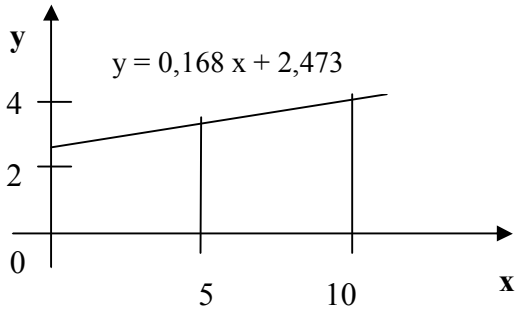


Рис. 7.3. Графік прямолінійної залежності y = φ(x).

7.3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПАРАБОЛІЧНОЇ ФУНКЦІЇ.

Якщо маємо зв'язок між перемінними величинами x і y у вигляді криволінійної залежності y = f (x), то в якості лінії регресії приймемо параболу другого порядку вид

$$y = a + b\,x + c\,x^2. \qquad (7.11)$$

Для визначення коефіцієнтів регресії a, b, c складемо

рівняння поправок $a + b\,x_i + c\,x_i^2 - y_i = v_i$. (7.12)

При мінімумі функції $[vv]$ за допомогою методу найменших квадратів перейдемо до системи нормальних рівнянь виду

$$\left.\begin{aligned} &n\,a + [x]b + [x^2]c - [y] = 0;\\ &[x]a + [x^2]b + [x^3]\,c - [xy] = 0;\\ &[x^2]a + [x^3]b + [x^4]\,c - [x^2y] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

Розв'яжемо цю систему і отримаємо параметри a, b, c.

Приклад 7.2. За результатами досліджень маємо пари спостережень $(x_i\, y_i)$, які уявлені в табл. 7.2 і на графіку рис.7.2.

Таблиця 7.2. Вихідні дані і коефіцієнти нормальних рівнянь.

n	1	2	3	4	5
x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
y	0,1	0	0,4	0,3	0,8
x^2	0,16	0,09	0,04	0,01	0
$\boldsymbol{x^3}$	-0,064	-0,027	-0,008	-0,001	0
$\boldsymbol{x^4}$	0,0256	0,0081	0,0016	0,0001	0
$\boldsymbol{xy}$	-0,04	0	-0,08	-0,03	0
$\boldsymbol{x^2y}$	0,016	0	0,016	0,003	0
$\boldsymbol{v_i}$	-0,205	0,125	-0,047	0,278	0

Продовження таблиці 7.2

6	7	8	9	10	**Σ**	**n**
0,1	0,2	0,4	0,5	0,8	**1,0**	[x]
0,9	1,5	1,2	2,5	2,3	**10,0**	[y]
0,01	0,04	0,16	0,25	0,64	**1,40**	$[x^2]$
0,001	0,008	0,064	0,125	0,512	**0,610**	$[\boldsymbol{x^3}]$
0,0001	0,0016	0,0256	0,0625	0,4096	**0,5348**	$[\boldsymbol{x^4}]$
0,09	0,060	0,48	1,25	1,84	**3,81**	$[\boldsymbol{xy}]$
0,009	0,060	0,192	0,625	1,472	**2,393**	$[\boldsymbol{x^2y}]$
0,12	-0,26	0,46	-0,63	0,18	**0,02**	$[v^2]$=

.

Таблиця7.3.

Розв’язання нормальних рівнянь за схемою Гаусса.

№ рядку	a	b	c	y	s	Контроль1
1	10	1,0	1,4	-10	2,4	2,4
2	-1	-0,10	-0,14	1,0	-0,24	-0,24
3		1,4	0,61	-3,81	-1,80	-1,80
4		1,30	0,47	-2,81	-2,04	-2,04
5		-1	-0,36	2,16	0,80	0,80
6			0,5348	-2,393	0,1518	0,1518
7			0,1696	0,0222	0,1918	0,1918
8			-1	-0,1309	-1,131	-1,131
a, b, c	0,80	2,21	-0,131			
$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$	-0,20	1,21	-1,131			
Контроль2	1,00	1,00	1,00			
Контроль3	Коефіцієнти матриці Q_{ij}					
1,000	0,046	0,144	-0,616	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}
1,004	0,144	1,532	-2,124	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}
1,004	-0,616	-2,124	5,90	Q_{31}	Q_{32}	Q_{33}

Система нормальних рівнянь має вид .

$$\left.\begin{aligned} 10\,a + b + 1{,}4\,c - 10 &= 0; \\ 1{,}4\,b + 0{,}61c - 3{,}81 &= 0; \\ 0{,}5348c - 2{,}393 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a &= 0{,}80; \\ b &= 2{,}21; \\ c &= -0{,}131. \end{aligned}$$

Рівняння регресії має вигляд

$$y = 0{,}80 + 2{,}21\,x - 0{,}13x^2. \qquad (7.14)$$

Далі обчислимо ухилення $\boldsymbol{v_i}$ (табл.7.2) за формулою

$$\boldsymbol{v_i} = 0{,}80 + 2{,}21\,x_i - 0{,}13{x_i}^2 - y_i$$

та здійснюємо контроль $[v] = 0{,}02 \approx 0$. Для оцінки точності обчислимо $[v^2] = 0{,}84$ і $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}} = \sqrt{\frac{0{,}84}{10-3}} = 0{,}35$.

Згідно формули (4,23) середні квадратичні похибки визначення параметрів можна обчислити за формулами $m_a = \mathrm{m}\sqrt{Q_{11}}$, $m_b = \mathrm{m}\sqrt{Q_{22}}$ і $m_c = \mathrm{m}\sqrt{Q_{33}}$ або

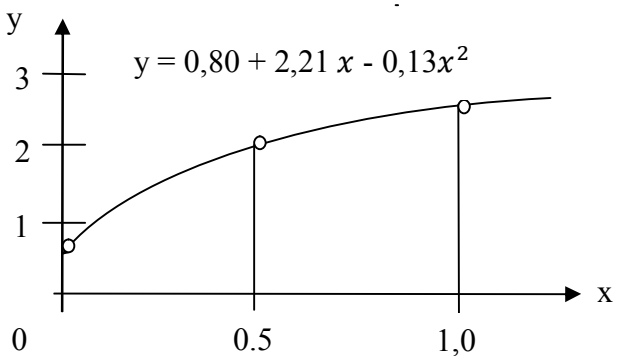


Рис.7.4. Графік параболічної регресії y = φ(x).

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{N}}; \qquad m_b = m_c = \frac{m}{\sqrt{0{,}5N}}. \qquad (7.15)$$

У нашому випадку $m_a = 0{,}11$; $m_b = m_c = 0{,}16$.

Параметри апроксимації вважаються визначені надійно, якщо їх гранична похибка не перевищує 0,1 від величини параметра, тобто

$$0{,}1a \geq t\, m_a; \qquad 0{,}1b \geq t\, m_b; \qquad 0{,}1c \geq t\, m_c, \qquad (7.16)$$

де t- параметр вибирається із таблиць функції Лапласа або Ст'юдента залежно від заданої ймовірності P. Так при ймовірності P= 0,95 t = 2,04.

Тоді t m_a = 0,22 і t m_b= 0,32. Отже 0,1 величини кожного з параметрів апроксимації **a, b, c** не перебільшують граничної похибки і тому вважаються визначеними надійно.

7.4. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ.

Маємо періодичну функцію виду

$$Y = a + b \sin x + c \cos x,$$

де x змінюється від 0 до 2 kn через рівні проміжки $l = \frac{\pi}{2}$; n – число парне, причому k – число ціле. Припустимо виконують спостереження періодичних функцій, а число спостережень буде N = 2kn.

Умовне рівняння поправок має вид

$$a + b \sin x_i + c \cos x_i - y_i = v_i \qquad (i = 1, N). \qquad (7.17)$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь будуть (7.18)

$$\left.\begin{array}{l} N_{11} = 2k\,n = N; \quad N_{12} = k \sum_{i=0}^{2\pi l} \sin x_i; \quad N_{13} = k \sum_{i=0}^{2\pi l} \cos x_i; \\ N_{22} = k \sum_{i=0}^{2\pi l} \sin^2 x_i; \quad N_{13} = k \sum_{i=0}^{2\pi l} \sin x_i \cos x_i; \\ N_{33} = k \sum_{i=0}^{2\pi l} \cos^2 x_i. \\ L_1 = -\sum_{i=1}^{N} y_i; \quad L_2 = -\sum_{i=1}^{N} y_i \sin x_i; \quad L_3 = -\sum_{i=1}^{N} y_i \cos x_i \end{array}\right\}$$

Нормальні рівні мають вид

$$\left.\begin{array}{l} Na + [\sin x]\ k\ b + [\cos x]\ k\ c - [y] = 0; \\ . \quad [sin^2 x]\ k\ b + [\sin x \cos x] k\ c - [y \sin x] = 0; \\ . \quad [cos^2\ x]\ k\ c - [y \cos x] = 0. \end{array}\right\} \qquad (7.19)$$

Якщо значення x змінюється через рівні проміжки l

(де n – число парне), то значення аргументу x розташовують симетрично відносно осей координат. Тому

$\sum_{i=0}^{2\pi l} \sin x_i = \sum_{i=0}^{2\pi l} \cos x_i = \mathrm{k} \sum_{i=0}^{2\pi l} \sin x_i \cos x_i = 0,$.

$\mathrm{k} \sum_{i=0}^{2\pi l} \sin^2 x_i = \mathrm{k} \sum_{i=0}^{2\pi l} \cos^2 x_i = \frac{1}{2}\mathrm{N}.$.

і нормальні рівняння приймуть вид .

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Na} - [\mathrm{y}] = 0; \\ &\frac{1}{2}\mathrm{N\,b} - [\mathrm{y}\sin x] = 0; \\ &\frac{1}{2}\mathrm{N\,c} - [\mathrm{y}\cos x] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.20)$$

Звідки невідомі параметри дорівнюють

$$\mathrm{a} = \frac{[\mathrm{y}]}{N}; \qquad \mathrm{b} = \frac{2[\mathrm{y}\sin x]}{N}; \qquad \mathrm{c} = \frac{2[\mathrm{y}\cos x]}{N}. \qquad (7.21)$$

Обчислення параметрів аналогічні п.7.3. .

Відповідно сума .

$$[v^2] = [\mathrm{yy}] - \mathrm{a}[\mathrm{y}] - \mathrm{b}[\mathrm{y}\sin x] - \mathrm{c}[\mathrm{y}\cos x] \qquad (7.22)$$

або $$[v^2] = [\mathrm{yy}] - \frac{[\mathrm{y}]^2}{N} - \frac{N}{2}(b^2 + \mathrm{c}^2). \qquad (7.23)$$

Із рівняння (7,19) визначимо ваги параметрів

$$p_a = \mathrm{N}; \qquad p_b = \frac{1}{2}\mathrm{N}; \qquad p_c = \frac{1}{2}\mathrm{N}. \qquad (7.24)$$

Середню квадратичну похибку визначення ординати y обчислимо за формулою $\mathrm{m} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}}$. .

Середні квадратичні похибки визначення параметрів обчисляють за формулами .

$m_a = \frac{m}{\sqrt{N}}$; $m_b = m_c = \frac{m}{\sqrt{0,5N}}$. .

Параметри апроксимації вважаються визначені надійно, якщо їх гранична похибка не перевищує 0,1 від величини параметра, тобто

0,1a ≥ t m_a; 0,1b ≥ t m_b; 0,1c ≥ t m_c,

де t- параметр вибирається із таблиць функції Лапласа або Ст'юдента залежно від заданої ймовірності P.

7.5. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ.

Процес осідання фундаментів при зведенні та експлуатації інженерних споруд дуже часто можна описати **логарифмічною функцією** [2] (рис.7.5). Апроксимація логарифмічною функцією виконується за формулою:

$$y = k \ln x. \qquad (7.25)$$

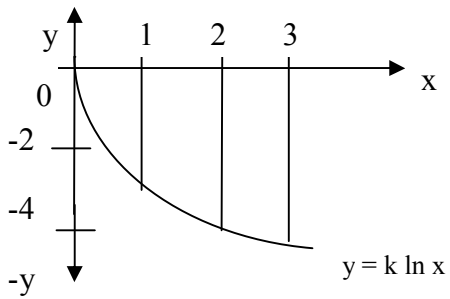


Рис. 7.5

Невідомий параметр – це коефіцієнт k. Параметричне рівняння поправок визначається за формулою

$$v_i = a_i \text{ k} + l_i \quad \text{або} \quad v_i = a_i \text{ k} - y_i, \qquad (7.26)$$

де $a_i = \ln x_i$; $l_i = - y_i$

У результаті отримаємо одне нормальне рівняння виду

$$[aa] \text{ k} + [a\ l] = 0, \qquad (7.27)$$

де $[aa] = [\ln^2 x_i]$; $[a\ l] = [-y_i \ln x_i]$.

Коефіцієнт **k** логарифмічної функції, визначимо за формулою

$$\text{k} = -\frac{[a\ l]}{[aa]} = -\frac{[-y_i \ln x_i]}{[\ln^2 x_i]}. \qquad (7.28)$$

За формулою (7.26) обчисляють поправки $\boldsymbol{v_i}$ а також середню квадратичну похибку

$$m_k = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \qquad (7.29)$$

У випадку, коли спостереження за осіданням фундаментів проводилось з деяким запізненням, то криву апроксимації визначають за допомогою рівняння

$$\text{y} = k_1 + k_2 \ln x \qquad (7.30)$$

Параметричні рівняння поправок мають вид

$$v_i = a_{i1}\ k_1 + a_{i2}\ k_2 + l_i, \qquad (7.31)$$

де $a_{i1} = 1$; $a_{i2} = \ln x_i$; $l_i = - y_i$

і тоді

$$v_i = k_1 + \ln x_i\ k_2 - y_i. \qquad (7.34)$$

Звідки отримаємо систему нормальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 + [a\ l] = 0; \\ &[ab]\, k_1 + [bb]\, k_2 + [b\ l] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.35)$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь обчисляються за формулами: $[aa] = \text{N}$; $[ab] = -[\ln x]$; $[bb] = [\ln^2 x]$;

$$[a\ l] = -\ [\ y]; \quad [b\ l] = [\ -\ y \ln x\ ].$$

Із розв'язання нормальних рівнянь (7.35) отримаємо значення коефіцієнтів k_1 та k_2, а також рівняння апроксимації $y_i = k_1 + k_2 \ln x_i$. (7.36)

Ваги коефіцієнтів k_1 та k_2 обчисляють за формулами:

$$p_{k_1} = \mathrm{N} - \frac{[\ln x]^2}{[\ln^2 x]}; \qquad p_{k_2} = [\ln^2 x] - \frac{[\ln x]^2}{N}. \quad (7.37)$$

За формулами (7.34) визначають поправки v_i та обчисляють середні квадратичні похибки визначення коефіцієнтів апроксимації

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}} \quad \text{і} \quad m_{k_1} = \frac{m}{\sqrt{p_{k_1}}}, \qquad m_{k_2} = \frac{m}{\sqrt{p_{k_2}}}. \qquad (7.38)$$

У випадку коли спостереження за процесом осідання фундаментів починають з нульового циклу, при відсутньому навантаженні на ґрунт, тоді для нульового циклу при значенні осідання по абсцисі $x_0 = 0$ і ординаті теж рівній нулю ($y_0 = 0$) функцію (7.27) треба звести до

вигляду $y = k \ln (x + 1)$. (7.39)

Звідки за формулою (7.28) матиме .

. $a_i = \ln(x_i + 1)$, $l_i = -\ y_i$.

і відповідно отримаємо коефіцієнти умовного рівняння . $a_i = \ln(x_i + 1)$; $l_i = -\ y_i$. та відповідно - коефіцієнти нормального рівняння .

$$[aa\ ] = [\ln^2(x_i + 1)]; \qquad [a\ l] = [-y_i \ln(x_i + 1)].$$

Шуканий коефіцієнт k визначиться за формулою

$$k = -\frac{[a\,l]}{[aa]} = -\frac{[-y_i\,(\ln x_i + 1)]}{[\ln^2(x_i + 1)]}. \qquad (7.40)$$

Поправки v_i обчислюють за формулою

$$v_i = k\ln(x_i + 1) - y_i. \qquad (7.41)$$

Середню квадратичну похибку визначення коефіцієнта k обчислюють за формулою (7.31).

Якщо до початку спостережень виникли деформація ґрунту і при нульовому циклі, коли $x_0 = 0$, а ордината прийме деяке значення $y_0 = k$, то апроксимацію можна виконати за функцією $y = k_1 + k_2 \ln(x + 1)$. (7.42)

Приймемо за наближені значення параметрів $k_1^0 = 0$ і $k_1^0 = 0$, відповідно отримаємо:

- параметричні рівняння поправок

$$v_i = k_1 + k_2 \ln(x_i + 1) - y_i\,; \qquad (7.43)$$

- коефіцієнти нормальних рівнянь

$[aa] = N$; $[ab] = -[\ln(x_i + 1)]$; $[bb] = [\ln^2(x_i + 1)]$;

$[al] = -[y_i]$; $[b\,l] = [-y_i \ln(x_i + 1)]$.

– нормальні рівняння .

$$\left.\begin{aligned} &N k_1 + [\ln(x_i + 1)]\,k_2 + [-y_i] = 0; \\ &[\ln(x_i + 1)]\,k_1 + [\ln^2(x_i + 1)]\,k_2 + [-y_i \ln(x_i + 1)] = 0. \end{aligned}\right\} (7.44)$$

Після обчислення коефіцієнтів k_1 і k_2 складають рівняння апроксимації за формулою (7.42), обчислюють поправки $\boldsymbol{v_i}$ за формулою (7.43) та виконують оцінку точності

за формулами (7.38). Ваги коефіцієнтів k_1 і k_2 обчислюють за формулами: .

$$p_{k_1} = \mathrm{N} - \frac{[\ln(x+1)]^2}{[\ln^2(x+1)]}; \quad p_{k_2} = [\ln^2(x+1)] - \frac{[\ln(x+1)]^2}{N}. \quad (7.45)$$

7.6. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ.

При розв'язанні практичних інженерних задач залежність між змінними величинами (явищами) може визначитися **степеневою функцією** [2]. Коли одна із величин ординати x визначається з незначною похибкою і слід рахуватись тільки з похибками іншої змінної величини y, то степеневу функцією можна визначити рівняннями (рис.7.6)

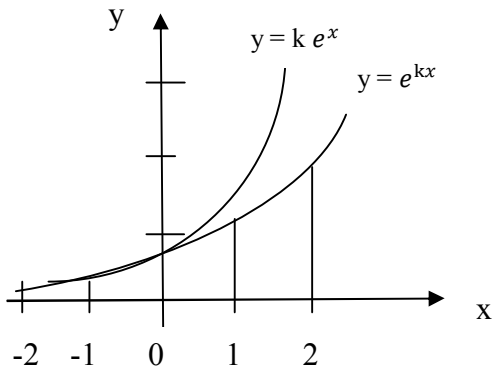


Рис. 7.6. Графік функцій a) y = k e^x; b) y = e^{kx}.

Задача розв'язується через наближені значення параметрів k^0 = 0, або через середні значення координат x_0 та y_0.

Тоді для наведених функцій маємо:

a) $k^0 = \frac{y_0}{e^{x_0}}$; b) $k^0 = \frac{\ln y_0}{x_0}$, (7.47)

оскільки $\ln y_0 = k^0\ x \ln \mathrm{e} = k^0 x$.

При апроксимації за рівнянням (7.46, а) маємо параметричні рівняння поправок:

а) при $k^0 = 0$ $v_i = e^{x_i}\ k - y_i$. (7.48)

Тоді $a_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)_0 = e^{x_i}$; $l_i = -\ y_i$.

Відповідно отримаємо коефіцієнти нормального рівняння

$[aa] = [\ e^{2x_i}]$; $[al] = [-\ y_i\ e^x]$

та нормальне рівняння має вид $[aa]k + [al] = 0$

або $\mathrm{k} = \frac{[al]}{[aa]} = \frac{[-\ y_i\ e^x]}{[\ e^{2x_i}]}$. (7.49)

Якщо визначено наближене значення параметра k^0 за формулою (7.47,а), то $v_i = e^{x_i}\ \tau + l_i$, (7.50)

де $a_i = e^{x_i}$; $l_i = e^{x_i}\ k^0 - y_i$.

Нормальні рівняння та шуканий параметр k визначаються за формулами:

$[aa] = [\ e^{2x_i}]$; $[al] = [l\ e^x]$; $[aa]\ \tau + [al] = 0$.

$\tau = \frac{[al]}{[aa]} = \frac{[l e^{x_i}]}{[\ e^{2x_i}]}$; $k = k^0 + \tau$. (7.51)

Далі обчислюють поправки v_i за формулами (7.48), (7.50) і

виконують оцінку точності $m_k = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$. (7.52)

Якщо за умовами випробування результати нульового циклу вимірювань звести до початку координат, коли x =0 і y = 0, то слід застосовувати функцію:

$$y = k\,(1 - e^x). \qquad (7.53)$$

Відповідно отримаємо формули для обчислень:

$$v_i = (1 - e^{x_i})\,k - y_i;$$

$$a_{i1} = (1 - e^{x_i}); \qquad l_i = -y_i;$$

$$[aa] = [(1 - e^x)^2]; \qquad [al] = [-y_i(1 - e^x)];$$

$$k = \frac{[-y_i(1-e^x)]}{[(1-e^x)^2]}.$$

Можна визначити наближене значення параметра k^0 для центральних координат x_0 та y_0. Тоді .

$$k^0 = \frac{y_0}{(1-e^{x_0})}; \qquad v_i = (1 - e^{x_i})\,\tau - y_i;$$

$$a_{i1} = (1 - e^{x_i}); \qquad l_i = (1 - e^{x_0})\,k^0 - y_0;$$

$$[aa] = [(1 - e^x)^2]; \qquad [al] = [a_1 l];$$

$$[aa]\,\tau + [a_1 l] = 0; \qquad \tau = \frac{[a_1 l]}{[aa]}; \qquad k = k^0 + \tau.$$

Існують різні варіанти впливу параметра k на вигляд функціональної залежності між досліджуваними величинами x та y, наприклад:

$$y = k_1 + k_2\, e^x. \qquad (7.54)$$

У разі коли $k_1^0 = 0$ та $k_2^0 = 0$, отримаємо:

$$v_i = k_1 + e^{x_i}\, k_2 - y_i;$$

$a_{i1} = 1$; $\quad a_{i2} = e^{x_i}$; $\quad l_i = -\, y_i$;

$[aa] = N$; $\quad [ab] = [e^x]$; $\quad [bb] = [e^{2x}]$; $\quad [al] = [-\, y]$;

$[bl] = [-\, y\, e^x]$; $\quad k_1 = \frac{[-\, y]}{N}$; $\quad k_2 = \frac{[bl.1]}{[bb.1]}$.

Далі обчислюють поправки v_i та середні квадратичні похибки $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}$; $\quad m_{k_1} = \frac{m}{\sqrt{p_{k_1}}}$, $\quad m_{k_2} = \frac{m}{\sqrt{p_{k_2}}}$.

Ваги параметрів p_{k_1} та p_{k_2} обчислюють при розв'язанні нормальних рівнянь .

$$\left.\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]\, k_2 + [al] = 0; \\ [ab]k_1 + [bb]\, k_2 + [bl] = 0. \end{aligned}\right\}$$

При прогнозуванні осідань гідротехнічних споруд процес ущільнення ґрунтів поділяють на два періоди – первинне S_1 та вторинне S_2 осідання. Тоді повне споруди є сума цих величин – $S = S_1 + S_2$. Кінцеве осідання S_2 обумовлене виключно повзучістю ґрунту.

Прогнозування початкових і кінцевих осідань в часи t, тобто розрахунок швидкості осідань виконують за допомогою формули експоненціальної залежності виду

$$S_t = S_k\,(1 - e^{-\alpha t}), \qquad (7.55)$$

де S_t - величина первинного або вторинного осідання в будь – який момент часу t; S_k – кінцева величина первинного або вторинного осідання; α – параметр, що характеризує швидкість згасання первинного або вторинного осідання.

При заданій величини первинного або вторинного осідання S_k і результатах спостереження S_{t_1}, $S_{t_2,\ldots,}$, S_{t_n} в момент часу t_1, t_2, ……, t_n можна визначити функцію апроксимації для прогнозу процесу осідання споруди за формулою (7.55).

Оскільки S_k - постійне, то зведемо її до вигляду

$$S_k - S_{t_1} = S_k\, e^{-\alpha t}.$$

Позначимо $S_k - S_{t_1} = S_{\text{i}}$ і отримаємо

$$S_{\text{i}} = S_k\, e^{-\alpha t_{\text{i}}} \qquad (7.56)$$

або $\ln S_{\text{i}} = \ln\ S_k - \alpha t_{\text{i}} \ln \text{e}$, $\ln\ S_k - \ln S_{\text{i}} = \alpha t_{\text{i}}$.

Позначимо $\ln S_k - \ln S_{\text{i}} = y_i$ і отримаємо .

$$y_i = \alpha t_{\text{i}}. \qquad (7.57)$$

При наближеному значенні параметра згасання $\alpha^0 = 0$

отримаємо формули $v_i = \alpha t_{\text{i}} - y_i$; $a_{i1} = t_{\text{i}}$; $l_i = - y_i$;

$$[aa] = [t^2]; \qquad [al] = [-y]; \qquad \alpha = \frac{[-y]}{[t^2]}. \qquad (7.58)$$

Рівняння апроксимації визначається за формулою (7.55).

Різноманітність залежностей між випадковими величинами в експериментальних дослідженнях дозволяє застосувати стандартні математичні функції.

Після визначення рівняння апроксимації будують графік. Для цього задають значення абсцис $x_1, x_1, \ldots, x_n$, обчислюють відповідно значення ординат $y_1, y_1, \ldots, y_n$ і наносять їх на графік. Через отримані точки з координатами x_i, y_i проводять пряму або криву лінію апроксимації.

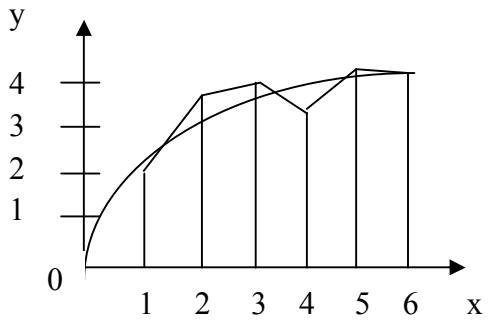


Рис. 7.7.

Контролем правильності апроксимації вважають, коли апроксимуюча лінія проходить між точками ломаною кривою за умовою, що сума квадратів відхилень окремих точок від кривої дорівнює мінімальному значенню, тобто $[v^2] = \min$.

7.7. ОБРОБЛЕННЯ РЯДУ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ, ПЕРЕКРУЧЕНИХ СИСТЕМАТИЧНИМИ ПОХИБКАМИ.

Припустимо виконано n – вимірів однієї і тієї же величини і отримані результати $\boldsymbol{y_i}$, які перекручені

систематичними похибками **ic**, де **c** – const, тобто

$$y_i = \delta x + \text{ic}. \qquad (7.59)$$

Необхідно із результатів вимірів визначити вирівняне значення величини X і оцінити систематичну похибку.

У цьому випадку рівняння поправок буде

$$v_i = \delta x + \text{ic} + l_i,$$

де

$$l_i = x^0 - y_i. \qquad (7.60)$$

В якості приблизного значення можна прийняти $x^0 = 0$ або інше зручне для обчислень значення, близьке до y_i.

Так як матриця коефіцієнтів рівнянь поправок має вид

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & n \end{pmatrix}, \qquad (7.61)$$

то отримаємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$\text{N} = A^T\text{A} = \begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} \end{pmatrix}. \qquad (7.62)$$

Вектор вільних членів буде .

$$b = A^T L = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} l_i \\ \sum_{i=1}^{n} i l_i \end{pmatrix}. \qquad (7.63)$$

Розв'язання отримаємо за допомогою оберненої матриці

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} & -\frac{6}{n(n-1)} \\ -\frac{6}{n(n-1)} & \frac{12}{n(n^2-1)} \end{pmatrix} \qquad (7.64)$$

за формулою $\begin{pmatrix} \delta x \\ c \end{pmatrix} = -Q\,b.$ (7.65)

Середні квадратичні похибки

$$\boldsymbol{m_x} = m\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}},\ \boldsymbol{m_c} = m\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}},\quad \text{де } \mathbf{m} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}. \quad (7.66)$$

Задача 7.3. В табл.7.4 наведені 24 значення виміру зенітної віддалі на одному із пунктів тріангуляції теодолітом типу 3Т2КП [4]. Припускаючи, що виміри виконані рівномірно за часом і вплив систематичної похибки пропорційний зміні часу, отримаємо найбільш надійне значення виміряного кута, оцінимо систематичну похибку, точність вимірів і результатів. .

Вихідні дані. Таблиця 7.4.

№ прийому-і	Значення вимірів - y_i	№ прийому-і	Значення вимірів $-y_i$	№ прийому-і	Значення вимірів -y_i
1	$90^0 15' 27{,}5''$	9	$90^0 15' 37{,}3''$	17	$90^0 15' 35{,}5''$
2	29,7	10	33,6	18	38,8
3	29,7	11	31,7	19	33, 3
4	30,9	12	33,2	20	32,1
5	34,6	13	37,9	21	38,7
6	34,6	14	34,9	22	39,1
7	31,3	15	35,3	23	39,4
8	33,5	16	27,2	24	39,9

Розв'язання. В якості приблизного значення приймемо величину $x^0 = 90^0 15' 20{,}0''$. Тоді знайдемо $\sum_{i=1}^{n} l_i$= - 339,2; $\sum_{i=1}^{n} il_i$= - 4642,4, а

матриця Q = $\begin{pmatrix} 0{,}177536 & -0{,}010870 \\ -0{,}010870 & 0{,}000870 \end{pmatrix}$.

У результаті розв'язання (7.65) маємо такі значення

$\begin{pmatrix} \delta x \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}76'' \\ 0{,}35'' \end{pmatrix}$ і $x = x^0 + \delta x = 90^0 15' 29{,}76''$. 1

Вважаємо це найбільш надійним значення кута, який віднесений до початкового моменту вимірювань.

Величина $[v^2]$, що обчислена за відхиленнями окремих значень кута від значення $\boldsymbol{x}$ склала $[v^2]$ = 173,7. Тому точність вимірювань визначимо середніми квадратичними похибками, які склали **m** = $\sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{173{,}7}{22}}$ = 2,81″;

$\boldsymbol{m_x}$= 2,81$\sqrt{0{,}178}$ = 1,18″; $\boldsymbol{m_c}$=2,81$\sqrt{0{,}000870}$= 0,08″.

Зауважимо, що якщо розв'язувати цю задачу без урахування наявності систематичних похибок, то отримаємо $x = 90^0 15' 34{,}3''$ і m = 3,72″, що не відповідає точності вимірів даним теодолітом.

7.8. РОЗРАХУНКОВО - ГРАФІЧНА РОБОТА №1.

Задача 1. Вирівняти горизонтальні кути, які виміряні на пункті О способом " в усіх комбінаціях " (приклад 3.2, рис.3.1). Виконати оцінку точності вирівняних невідомих та їх функцій. Результати вимірювання кутів наве-

дені в табл. 3.1. Для розв'язання задачи значення 1, 2, 3 кутів треба **замінити** відповідно до варіанту N на величину, яка дорівнює $\boldsymbol{\beta_i = \beta'_i + 0{,}1\ a \cdot N}$, .
де $\boldsymbol{\beta'_i}$ - значення кута 1,2,3 в табл. 3.1; a = ± 1; N - номер варіанту, який задано студенту, $\boldsymbol{\beta_i}$ **-** виправлений кут.

Порядок вирівнювання кутів.

1.Вибір незалежних параметрів і складання рівнянь зв'язку. **2.** Складання рівнянь поправок за формулою 3.17. **3**.Вибір приблизних значень невідомих, тобто виміряних значень кутів; **4**. Обчислення вільних членів - l_i як різності приблизних мінус виміряних значень кутів; **5**. Складання таблиць коефіцієнтів рівнянь поправок (табл.3.2) і коефіцієнтів нормальних рівнянь (табл.3.3); **6**. Розв'язання нормальних рівнянь за скороченою або повною схемою Гаусса, виконання контролів розв'язання та визначення невідомих поправок - $\boldsymbol{\delta x_i}$; **7**. Визначення поправок до виміряних кутів (табл.3.1); **8**. Виконання остаточного контролю вирівнювання (табл.3.1).

Оцінка точності вирівняних невідомих та їх функцій, яка розглянута в п. 4.2; 4.3; 4.4; 4.6; 4.7, складає наступні питання.

9. Оцінювання точності вагових коефіцієнтів способами діагоналей і додаткових граф (п.4.2 і 4.3; табл.4.1) та способом Ганзена (п. 4.4). .
10. Оцінювання точності функцій вирівняних невідомих способами матриці вагових коефіцієнтів (п. 4.6; табл.4.3) та додаткових стовпців (п. 4.7; табл.4.4).

Задача 2. Виконати вирівнювання дирекційних кутів мережі тріангуляції (задача та рис.5.1). Оцінити точність вирівняних дирекційних кутів та горизонтального кута $\boldsymbol{x'_6 = \alpha'_3 - \alpha'_2}$. Вихідні дирекціоні кути: $\boldsymbol{\alpha_{OA} = 0}$, $\boldsymbol{\alpha_{OB} = 135°40'19,\ 5''}$. Значення виміряних кутів мережі наведені в табл.5.1.

Значення виміряних кутів, які наведені в табл..5.1, необхідно **замінити** відповідно до варіанту N на величину

$$\boldsymbol{\beta_i = \beta'_i + 0{,}1 \cdot a \cdot N},$$

де $\boldsymbol{\beta'_i}$ - значення виміряного кута в таблиці; **a = ± 1; N** - номер варіанту, заданий студенту, $\boldsymbol{\beta_i}$ **-** виправлений кут.

Порядок вирівнювання і оцінки точності (приклад 5.1).

1. Складання рівнянь поправок.
2. Обчислення наближених значень дирекційних кутів сторін - α_i та вільних членів - l_i.
3. Складання коефіцієнтів умовних рівнянь.
4. Складання коефіцієнтів нормальних рівнянь (табл. 5.3).
5. Розв'язання нормальних рівнянь (табл. 5.4), обчислення невідомих і виконання контролів.
6. Складання матриці коефіцієнтів Q_{ij} (табл. 5.4).
7. Обчислення поправок - v_i (табл. 5.2).
8. Обчислення вирівняних дирекційних кутів, виконання контролів (табл.. 5.1).
9. Остаточний контроль вирівнювання.
10. Визначення середньої квадратичної похибки вирівняних дирекційних кутів.
11. Визначення оберненої ваги функції (табл.5.4) та середньої квадратичної похибки функції (вирівняного кута 6).

Задача 3. Виконати вирівнювання мережі трилатерації параметричним способом(рис. 5.2). Оцінити точність вирівняних координат пунктів С і Д, довжини - S і дирекційного кута сторони СД - α.

Вихідні координати пунктів А,О,В та приблизні координати пунктів Д,С наведені в табл.5.10. В табл.5.10,а наведені виміряні віддалеміром довжини сторін, які необхідно **замінити** відповідно до варіанту **N** на величину $\boldsymbol{S_i = S'_i + 0{,}001 \cdot a \cdot N}$, .
де $\boldsymbol{S'_i}$- значення виміряної довжини в таблиці; **a** = ±1; **N** – номер варіанту, який задано студенту; $\boldsymbol{S_i}$ – замінене значення виміряної довжини.

Порядок вирівнювання і оцінки точності (приклад 5.3).
1. Складання рівнянь поправок, обчислення наближених довжин сторін - S_i та вільних членів - l_i. .
2. Визначення коефіцієнтів та складання умовних рівнянь поправок (табл. 5.12). .
3. Обчислення коефіцієнтів та складання нормальних рівнянь (табл.5.13). .
4. Розв'язання нормальних рівнянь, виконання контролів, обчислення невідомих параметрів. .
5. Обчислення вагових коефіцієнтів Q_{ij}, з контролем.
6. Складання нормальних рівнянь із застосуванням матриць c_i, Δ_k, Δ_s. .
7. Перетворення матриць коефіцієнтів нормальних рівнянь в діагональні та недіагональні блоки (табл.5.15). .
8. Складання матриць коефіцієнтів та вільних членів нормальних рівнянь. .

9.Обчислення поправок -v_i, з контролем (табл. 5.10). .
10. Обчислення вирівняних координат пунктів С і Д.
11. Остаточний контроль вирівнювання мережі. .
12. Оцінка точності функцій: вирівняної довжини сторони СД - $F_{SСД}$, вирівняного дирекційного кута сторони - $F_{\alpha СД}$.
13. Обчислення середніх квадратичних похибок вирівняних координат пунктів С і Д та функцій $F_{SСД}$, і $F_{\alpha СД}$.
14 . Обчислення вирівняних значень дирекційних кутів сторін (табл. 5.17). .

Задача 4. Виконати вирівнювання параметричним способом нівелірної мережі, яка опирається на три вихідні марки. Також оцінити точність визначення висот трьох вузлових реперів та результатів польових вимірювань. .

Схема мережи показана на рис.5.3. Напрямки прокладення нівелірних ходів вказані стрілками. .

Вихідні дані: відмітки вузлових реперів, перевищення і довжини нівелірних ходів, які наведені в таблиці 21. Значення перевищень та довжини ходів необхідно змінити відповідно до варіанту N на величину: .

- для перевищення,м $\boldsymbol{h_i = h'_i + 0{,}001 \cdot a \cdot N;}$
- для довжина ходу,км $\boldsymbol{L_i = L'_i + 0{,}01 \cdot a \cdot N,}$

де $\boldsymbol{h'_i}$ та $\boldsymbol{L'_i}$ **-** значення перевищення, які дані в табл. 21; **a** = ±1; **N** – номер варіанту, який задано студенту; $\boldsymbol{h_i}$ та $\boldsymbol{L_i}$ **-** змінені значення перевищення та довжини ходу за варіантом . При вирівнюванні потрібно визначити:

- відмітки вузлових реперів і величини перевищень;
- точність результатів польових вимірювань;

- середню квадратичну похибку одиниці ваги – μ та її похибку m_μ; - середні квадратичні похибки вирівняних: вузлових реперів - m_i, функції - m_F та перевищення нівелірного ходу на довжину 1 км - $m_{км}$.

Порядок вирівнювання і оцінки точності (задача 5.5).

1. Оцінювання якості вимірювань і перевірка відповідності встановлених допусків та класу нівелювання. .
2. Вибирання необхідних невідомих, визначення найближчих значень параметрів. .
3. Складання параметричних рівнянь зв'язку та рівнянь поправок. .
4. Визначення коефіцієнтів рівнянь поправок та коефіцієнтів нормальних рівнянь. .
5. Складання та розв'язання системи нормальних рівнянь, з контролем обчислення (табл.5.27). .
6. Обчислення вирівняних невідомих – відміток реперів 1,2,3 та перевищень (табл.5.28).
7. Оцінювання точності визначення невідомих методом додаткових стовпців та вагових коефіцієнтів (табл.5.27).
8. Оцінювання точності вирівняної функції F = $\overline{h_2}$ за допомогою вагових коефіцієнтів. .
9. Оцінювання точності результатів вирівнювання.
10. Визначення довірчих інтервалів вирівняної функції F – відміток реперів 1, 2, 3, перевищень середніх квадратичних похибок одиниці ваги та функції. .
11. Складання системи нормальних рівнянь способом проф. В.В. Попова та порівняння з раніше знайденими в п.6 нормальними рівняннями. Зробіть з цього висновок.

7.9. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ.

Глава 1. .

1.Суть сумісного вирівнювання кількох виміряних величин
2.Задачи вирівнювання кількох виміряних величин.
3.Мета, умова і причина виникнення задачи вирівнювання.
4.Математичний вираз принципу найменших квадратів.
5.Переваги методу найменших квадратів перед іншими.
6 Задачі і способи сумісного вирівнювання геодезичних вимірювань. .
7.Які виміри називають необхідними та надлишковими?
8.Що називають математичною матрицею чисел?
9.Які матриці використовують в геодезії?
10.Якій порядок складання та множення матриць?
11.Якій порядок транспонування матриць?
12.Обернена та одинична матриці, зв'язок між ними?
13.Матрична форма системи лінійних рівнянь?
14.Порядок диференціювання матричних виразів?

Глава 2. .

15.Суть параметричного способу вирівнювання? .
16.Параметричні рівняння зв’язку? .
17. Параметричні рівняння поправок, їх види?
18.Параметричне рівняння поправок для нівелірного ходу між двома сусідніми пунктами 1 і 2? .
19. Параметричне рівняння поправок для сторони трилатерації між пунктами А і В? .
20. Параметричне рівняння поправок для горизонтального кута на пункті А між напрямками на пункти В і С ?
21. Параметричне рівняння поправок для напрямку з пункту А на пункт В ? .

22. Параметричне рівняння поправок для дирекційних кутів двох сторін АВ і АС, які утворюють кут? .
23. Параметричні рівняння поправок для трьох кутів плоского трикутника? .
24. Скласти параметричні рівняння поправок для трьох нівелірних ходів з однією вузловою точкою? .
25.Привести доведення отримання системи нормальних рівнянь у загальному виді? .
26.Запишіть систему нормальних рівнянь в матричному вигляді для рівноточних і нерівноточних вимірів? .
27.Які властивості лінійної системи нормальних рівнянь?
28. Яка послідовність дій при вирівнювання параметричним способом? .

Глава 3.

29. Суть розв'язання системи нормаль них рівнянь способом К. Гаусса? .
30.Правила розкриття символів Гаусса - $[bb.1]$, $[bc.1]$, $[bl.1]$, $[cc.2]$, $[cl.2]$? .
31. Як контролюють правильність складання рівнянь поправок? .
32. . Як контролюють правильність складання нормальних рівнянь? .
33. Як контролюють правильність розв'язання нормальних рівнянь? .

Глава 4. .

34.Як визначають точність обчислення елементів схеми Гаусса? .
35.Які параметри в геодезичних мережах приймаються для оцінювання точності їх визначення? .

36. Який вид має матриця оберненої ваги Q? .

37.Запишіть кореляційну матрицю невідомих параметрів **t** у випадку незалежних параметрів? .

38. Запишіть дисперсію невідомого параметра **t** та коефіцієнта кореляції **r** між параметрами t_i та t_j? .

39. Перелічите способи визначення вагових коефіцієнтів?

40. Суть способу "додаткових граф" визначення вагових коефіцієнтів? .

41. Порядок і контроль визначення матриці вагових коефіцієнтів? .

42. Порядок визначення коефіцієнтів Q в схемі Гаусса?

43.Суть способу діагоналей визначення вагових коефіцієнтів ? .

44. Спосіб Ганзена визначення вагових коефіцієнтів, контроль їх визначення? .

45. Способи оцінки точності функцій вирівняних величин?

46. Оцінювання точності вирівняної функції способом матриці вагових коефіцієнтів? .

47. Оцінювання точності вирівняної функції способом додаткових стовпців? .

Глава 5. .

48. Порядок вирівнювання дирекційних кутів сторін мережі тріангуляції параметричним способом? .

49. Порядок вирівнювання мережі трилатерації параметричним способом? .

50. Порядок вирівнювання нерівноточних вимірів геодезичної мережі параметричним способом? .

51.Порядок вирівнювання опорної нівелірної мережі параметричним способом? .

Глава 6. .

52. Суть розв'язання системи нормальних рівнянь способом Краков'янів (квадратичних коренів)?

53.Як обчислюють похибки розв'язання системи нормальних рівнянь? .

54. Метод простої ітерації розв'язання системи нормальних рівнянь? .

55.Метод Зейделя розв'язання системи нормальних рівнянь? .

Глава 7. .

56.Суть оброблення експериментальних залежностей пара - метричним способом? .

57. Порядок визначення параметрів прямолінійної функції?

58. Порядок визначення параметрів параболічної функції?

59. Порядок визначення параметрів періодичної функції?

60.Порядок визначення параметрів логарифмічної функції?

61. Порядок визначення параметрів степеневої функції?

62.Порядок оброблення ряду геодезичних вимірів, які перекручені систематичними похибками? .

ГЛАВА 8. КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ.

8.1. СУТЬ КОРЕЛАТНОГО СПОСОБУ.

Суть вирівнювання корелатним способом складається у тому, що задачу находження мінімуму функції залежних перемінних $[pv^2]$ розв'язують способом Лагранжа, при цьому вводять допоміжні множники незалежних умовних рівнянь. Нехай виміряне **n** величин $X_1, \ldots, X_n$, які пов'язані між собою незалежними умовними рівняннями

виду $\boldsymbol{\varphi_j}(X_1, \ldots, X_n) = \mathbf{0}$. (j = 1,2,….., r)

або
$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 (X_1, \ldots, X_n) = 0; \\ &\varphi_2 (X_1, \ldots, X_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_r (X_1, \ldots, X_n) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

. Для подальшого розгляду необхідно щоб в рівняннях (8.1) в правих частинах стояли нулі. Нехай для величини X_i отримані результати вимірів, $x_1, \ldots, x_n$ з вагами відповідно $p_1, \ldots, p_n$. Так як значення x_i обтяжені похибками вимірів, то при підстановці цих результатів в ліві частини умовних рівнянь, в правих їх частинах, як правило, отримуються не нулі, а нев'язки – W, які є істинними похибками функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. . Відповідно рівняння мають вид $\boldsymbol{\varphi_j (x_1, \ldots, x_n) = W_j}$ (j = 1,2,….., r)

або
$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\varphi_1 (x_1, \ldots, x_n) = W_1;} \\ &\boldsymbol{\varphi_2 (x_1, \ldots, x_n) = W_2;} \\ &\boldsymbol{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ &\boldsymbol{\varphi_r(x_1, \ldots, x_n) = W_r.} \end{aligned}\right\} \quad (8.2)$$

При вирівнюванні вимірювань насамперед ставиться вимога усунути всі нев'язки. Тому виправлені результати вимірів повинні задовольняти рівностям .

$\boldsymbol{\varphi_j (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = 0}$ (j = 1,2,….., r)

або
$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\varphi_1 (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = 0;} \\ &\boldsymbol{\varphi_2 (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = 0;} \\ &\boldsymbol{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ &\boldsymbol{\varphi_r(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = 0.} \end{aligned}\right\} \quad (8.3)$$

Приведемо (8.3) до лінійного виду шляхом розкладання в ряд Тейлора і при цьому в якості приблизного значення

приймемо $x_i^0 = x_i$, де x_i - виміряне значення і тоді отримаємо $\varphi_j\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}\right)(X_i - x_i) = 0$. (8.4)

Введемо позначення $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_i}\right) = a_i$, $\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial X_i}\right) = b_i, \ldots$, $\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial X_i}\right) = g_i$,

$w_j = \varphi_j\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (8.5)

і рахуючи, що різності $(x_i - X_i) = \Delta_i$ є істинні помилки вимірів, замість (8.4) запишемо .

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i}(-\Delta_i) + \boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{0}, \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b_i}(-\Delta_i) + \boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{0}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g_i}(-\Delta_i) + \boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{0}, \end{array}\right\} \quad (8.6)$$

Система (8.6), яка складається із r- рівнянь з n- невідомими має безліч розв'язань відносно Δ_i. Тому вона не може бути розв'язана однозначно. Із всієї безлічі розв'язань виберемо такі невідомі $\boldsymbol{(-\Delta_i) \approx v_i}$, (8.7)

які задовольняють умові $\Phi = [pv^2] = \min$, якщо перемінні $v_1, \ldots, v_n$ пов'язані між собою рівняннями (8.3). **Цю задачу на умовний екстремум в корелатному способі розв'язують за правилами вченого Лагранжа через невизначені множники умовних рівнянь.** Нагадаємо, що в параметричному способі ця же задача на умовний екстремум розв'язується за допомогою допоміжних незалежних невідомих, що дозволяє перейти від умовного екстремуму до абсолютного. **Функція Лагранжа має вид**

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = [pv^2] + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r, \quad (8.8)$$

де $\varphi_j = \varphi_j\ (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)$ (j = 1,2,….., r) і $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0$. .

Введення r- невизначених множників λ_1 λ_2, …….., λ_r дозволяє розглядувати функцію Лагранжа як функцію незалежних перемінних. Тоді шукані значення поправок v_i повинні задовольняти рівностям виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \quad (\text{i} = 1, \ldots\ldots, \text{n}) \qquad (8.9)$$

На основі рівностей (8.3) і (8.8) одержимо (n + r) рівнянь з (n + r) невідомими (поправками v_1, ….,v_n і невизначеними множниками λ_1 λ_2, …….., λ_r). Тобто таку схему розв'язання має ця задача. .

Однак, якщо умовні рівняння будуть мати нелінійний вид, то задача стане практично нерозв'язаною, бо математика не дає способів розв'язання систем нелінійних рівнянь довільного виду. Для того, щоб зробити задачу вирівнювання розв'язаною і отримати алгоритм її розв'язання, приведемо рівності (8.3) до лінійного виду, скориставшись тим, що поправки - v_i завжди достатньо малі. .

. Нехтуючи нелінійними членами розкладання функції

φ_j в ряд Тейлора, запишемо $\varphi_j\ (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) =$

$$=\varphi_j\ (x_1, \ldots, x_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right) v_1 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right) v_n. \qquad (8.10)$$

Позначимо $$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) = a_{ij} \qquad (8.11)$$

і рахуючи рівності (8.11), одержимо .

$$a_{1j} v_1 + \ldots\ldots + a_{nj} v_n + w_j = 0 \qquad (\text{j} = 1,2,\ldots.., \text{r}) \qquad (8.12)$$

тобто $$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a_{11}v_1+\ldots\ldots+a_{n1}v_n+w_1=0}; \\ \boldsymbol{a_{12}v_1+\ldots\ldots+a_{n2}v_n+w_2=0}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{1r}v_1+\ldots\ldots+a_{nr}v_n+w_r=0} \end{array}\right\} \quad (8.13)$$

або скорочено $$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{[a_1v]+w_1=0}; \\ \boldsymbol{[a_2v]+w_2=0}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{[a_rv]+w_r=0.} \end{array}\right\} \quad (8.14)$$

Рівності (8.12), (8.13) називають **умовними рівняннями поправок**. **Нев'язки w_j є вільними членами** цих рівнянь.

Якщо умовні рівняння будуть із самого початку задані в лінійному виді, то формула (8.10) не потрібна, бо коефіцієнти a_{i1}, ….., a_{ir} будуть відомі.

Тепер задачу, яка розв'язується, можна сформулювати так. Треба знайти мінімум функції $[pv^2]$, якщо пемінні v_i пов'язані між собою рівняннями (8.13).

Для зручності обчислень множники Лагранжа позначимо як: $\lambda_1=-2k_1$, $\lambda_2=-2k_2$, ……., $\lambda_r=-2k_r$. Множники k_1, k_2, … … , k_r називають **корелатами**.

Функція Лагранжа тепер прийме вид $\boldsymbol{\Phi(v_1,\ldots,v_n)=}$

$$\boldsymbol{=[pv^2]-2k_1\{[a_1v]+w_1\}-\ldots-2k_r\{[a_rv]+w_r\}.} \quad (8.15)$$

Далі запишемо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}=2p_iv_i-2k_1\,a_{i1}-2k_2\,a_{i2}-\ldots-2k_r\,a_{ir}=0.$$

Звідки

$v_i = \pi_i a_{i1} k_1 + \pi_i\ a_{i2} k_2 + \ldots + \pi_i a_{ir} k_r$ (i = 1,…, n), (8.16)

де $\pi_i = \frac{1}{p_i}$ або

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \cdots + a_{ir} k_r\right). \qquad (8.17)$$

Рівності (8.16 і 8.17) називають **корелатним рівняннями поправок.** Із цих рівностей знайдемо шукані поправки v_i після того, як будуть відомі корелати k_j. Запишемо систему рівностей (8.16) .

$$v_i = \pi_i a_{i1} k_1 + \pi_i a_{i2} k_2 + \ldots + \pi_i a_{ir} k_r, \qquad (i = 1,\ldots, n).$$

Помножимо всі рівності почергово на $a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{ir}$ (i = 1,…, n) і кожний раз складемо їх. Тоді одержимо

$$\left.\begin{array}{l} [a_1 v] = [\pi\ a_1 a_1]\ k_1 + [\pi\ a_1 a_2]\ k_2 + \ldots + [\pi\ a_1 a_r] k_r; \\ [a_2 v] = [\pi\ a_1 a_2]\ k_1 + [\pi a_2 a_2]\ k_2 + \ldots + [\pi\ a_2 a_r] k_r; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_r v] = [\pi\ a_1 a_r]\ k_1 + [\pi\ a_2 a_r]\ k_2 + \ldots + [\pi\ a_r a_r] k_r \end{array}\right\}$$

Рахуючи тепер рівності (8.14), одержимо рівняння

$$\left.\begin{array}{l} [\pi a_1 a_1]\ k_1 + [\pi a_1 a_2]\ k_2 + \ldots + [\pi a_1 a_r] k_r + w_1 = 0; \\ [\pi a_1 a_2]\ k_1 + [\pi a_2 a_2]\ k_2 + \ldots + [\pi a_2 a_r] k_r + w_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\pi a_1 a_r]\ k_1 + [\pi a_2 a_r]\ k_2 + \ldots + [\pi a_r a_r] k_r + w_r = 0. \end{array}\right\} \quad (8.18)$$

З рівностей (8.18) бачимо, що вони являють собою

систему нормальних рівнянь корелат, в якій число рівнянь – **r** дорівнює числу невідомих. В символах Гаусса система (8.18) має вид:

- для нерівноточних вимірів

$$\left.\begin{array}{l} [\pi aa]k_1+[\pi ab]k_2+\ldots\ldots+[\pi ag]k_r + w_1 = 0; \\ [\pi ab]k_1+[\pi bb]k_2+\ldots\ldots+[\pi bg]k_r + w_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\pi ag]k_1+[\pi bg]k_2+\ldots\ldots+ [\pi gg]k_r + w_r = 0, \end{array}\right\} \quad (8.19)$$

- для рівноточних вимірів

$$\left.\begin{array}{l} [aa]k_1+[ab]k_2+\ldots\ldots+[ag]k_r + w_1 = 0; \\ [ab]k_1+[bb]k_2+\ldots\ldots+[bg]k_r + w_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ag]k_1+[bg]k_2+\ldots\ldots+ [gg]k_r + w_r = 0, \end{array}\right\} \quad (8.20)$$

де $\pi_i = \frac{1}{p_i}$ - обернена вага.

Одержані із розв'язання рівнянь корелати k_j звертаються до рівностей (8.17), за допомогою яких знаходять шукані поправки v_i до результатів вимірів, робиться також оцінка точності отриманих результатів.

Корелатний і параметричний способи рівноцінні між собою, дають однакові результати, але корелатний спосіб є більш складний при програмуванні на ЕОМ, тому його застосовують для вирівнювання окремих геодезичних фігур та обмежених мереж з невеликим обсягом обчислень.

8.2. ПОРЯДОК ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

Задачу вирівнювання корелатним способом розв'язують у наступному порядку. .

1. Установлюють систему результатів вимірів $x_1, \ldots, x_n$ з вагами відповідно $p_1, \ldots, p_n$ таким же чином, як і в пара - метричному способі.

2. Вибирають і складають умовні рівняння (8.13) таким чином, щоб вони задовольняли наступним вимогам:

. а) рівняння повинні бути незалежні, тобто ні одно з них не повинно бути наслідком інших; .

. б) число умовних рівнянь - **r** повинно дорівнювати (n - k), де n- число всіх вимірів, k – число необхідних величин. Причому треба вибирати рівняння більш простого виду.

. При невиконанні першої вимоги задача стане невизначеною, при r < (n - k) деякі рівняння не будуть враховані, а отже і залишаться деякі нев'язки після вирівнювання.

3. За формулами (8,2) і (8.12) обчислюють вільні члени і коефіцієнти умовних рівнянь поправок. При цьому необхідно привести коефіцієнти і поправки в умовних рівняннях до величин одного порядку, вводячи відповідні розмірності для функції $\boldsymbol{\varphi}$, як і при складанні параметричних рівнянь. .

4. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь корелат за допомогою таблиці коефіцієнтів. Різниця таблиць коефіцієнтів при корелатному і параметричному способах, по – перше у тому, що коефіцієнти умовних рівнянь поправок в першому способі розташовують в графах зверху униз, а коефіцієнти параметричних рівнянь поправок – по горизонтальних рядках. Крім того, відсутня графа – l, бо вільними членами нормальних рівнянь корелат є вільні члени умовних рівнянь.

Значення нев'язок $\boldsymbol{w_j}$ виписують в рядку під коефіцієнтами, в графі відповідного умовного рівняння. Зауважимо також, що в нормальних рівняннях корелат фігурують не ваги - p_i, а обернені ваги - π_i. .

5. Розв'язують нормальні рівняння і отримують корелати – k_j.

6. Виписують попередньо значення корелат у заголовні відповідних граф таблиці коефіцієнтів, обчислюють поправки - v_i за формулами (8.16) і (8,17). .

7. Обчислюють вирівняні значення виміряних величин .

$$\boldsymbol{x_i{}' = x_i + v_i},$$.

після чого виконують остаточні контрольні обчислення, які заключні в підстановці вирівняних значень $x_i{}'$ в умовні рівняння (8.2); при відсутності похибок в обчисленнях ці рівняння повинні задовольнятися. .

Практично важливо також додержуватися наступного порядку виконання таблиці коефіцієнтів. В перші зліва цієї таблиці треба виписувати коефіцієнти більш простих рівнянь з меншим числом членів з коефіцієнтами, які дорівнюють ±1. В праві графи виписують коефіцієнти більш складних рівнянь. Це полегшує розв'язання нормальних рівнянь. Проілюструємо названі формули прикладами, які були наведені вище.

8.3. ПРИКЛАДИ ВИРІВНЮВАННЯ ВИМІРЯНИХ КУТІВ ТРИКУТНИКА КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ. .

Задача 8.1. В трикутнику, в якому відомі координати пункту А, сторона(АВ) – **c** і її дирекційного кута α_{AB}, виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення положення вершини С (рис.2.6; задача 2.1) і отримані результати вимірів x_1, x_2, x_3. Розглянемо три випадки вирівнювання кутів корелатним способом.

Перший випадок, коли виміри кутів рівноточні. Розв'язання будемо виконувати у послідовності, яка вказана в темі 8.2. .

1. Так як n = 3, k =2 (число необхідних величин), то повинно бути складено одне умовне рівняння

$$x_1' + x_2' + x_3' - 180° = 0. \quad .$$

2. Всі коефіцієнти умовних рівнянь дорівнюють одиниці, вільний член рівняння дорівнює

$$w = x_1 + x_2 + x_3 - 180°. \quad .$$

3. Напишемо умовне рівняння поправок

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \quad .$$

4.Єдина корелата визначиться із рівняння .

$$[aa]k + w = 0. \quad .$$

тобто $3k + w = 0$ і

звідки $k = -\frac{w}{3}$. .

5. Поправки отримаємо за формулами (8.16), (8.17), рахують при цьому, що $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ і виміри рівноточні, отже $v_1 = -\frac{1}{3}w$; $v_2 = -\frac{1}{3}w$; $v_3 = -\frac{1}{3}w$.

Поправки отримані такі же, як в параметричному способі.

Другий випадок, коли виміри кутів нерівноточні, тобто з вагами p_1, p_2, p_3. Обернені ваги позначимо відповідно π_1, π_2, π_3.

Умовне рівняння поправок буде таке ж, як у першому ви

падку, але при складанні рівняння корелати треба рахувати ваги (рівняння 8.19). Напишемо це рівняння, рахуючи умову, що $[\pi\, a_1 a_1] = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$.

$$(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\, k + w = 0$$

і звідки $k = -\dfrac{w}{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3} = -\dfrac{w}{\sum \pi}$.

Поправки отримуємо за формулами (8.16)

$$v_1 = -\frac{\pi_1}{\sum \pi} w; \qquad v_2 = -\frac{\pi_2}{\sum \pi} w; \qquad v_3 = -\frac{\pi_3}{\sum \pi} w.$$

Поправки отримані такі же, як в параметричному способі.

Додаток до другого випадку, коли виміряні три кути нерівноточні на одному пункті між трьома напрямками і отримані результати вимірів x_1, x_2, x_3 з вагами p_1, p_2, p_3 відповідно.

Для визначення взаємного положення трьох напрямків необхідно знати два кута. Тому маємо один надлишковий вимір і виникає задача вирівнювання.

Умовне рівняння має вид $x_1' + x_2' - x_3' = 0$.

Вільний член рівняння $w = x_1 + x_2 - x_3$.

Умовне рівняння поправок $v_1 + v_2 - v_3 + w = 0$.

Рівняння корелати $(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\, k + w = 0$, звідки $k = -\dfrac{w}{\sum \pi}$. Поправки до результатів вимірів дорівнюють

$$v_1 = -\frac{\pi_1}{\sum \pi} w; \qquad v_2 = -\frac{\pi_2}{\sum \pi} w; \qquad v_3 = -\frac{\pi_3}{\sum \pi} w.$$

Третій випадок, коли дана сторона с = АВ = 1000,000 м і виміряні інші дві сторони і три кути. Позначення виміряних величин показано на рис. 8.1.

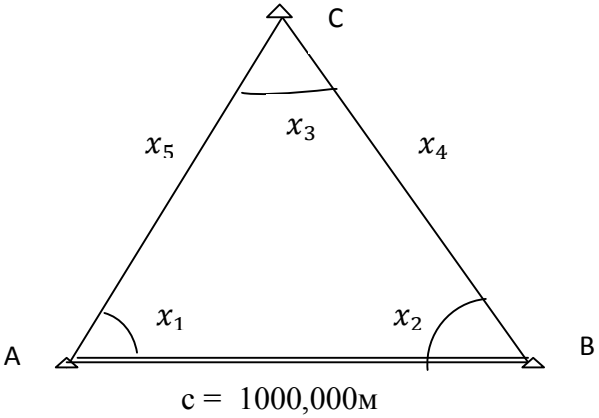


Рис.2.7

Отримані наступні результати вимірів: .

x_1= $46^0\ 25'\ 13''$ з вагою $p_1 = 1$;

$x_2 = 68^0\ 01'\ 25''$ з вагою p_2 = 1;

x_3= $65^0\ 33'\ 07''$ з вагою $p_3 = 1$;

x_4= 79588,1 см з вагою p_4=4,7;

$x_5 = 101866{,}0$ см. з вагою p_5=3,4.

Складемо умовні рівняння. Так як число необхідних величин k = 2, а число всіх вимірів n = 5, то число умовних рівнянь буде r = n – k = 5 – 2 = 3. .

Виберемо умовні рівняння найбільш простого виду

$x_1' + x_2' + x_3' - 180° = 0;$.

c $\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'} - x_4' = 0;$ c $\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'} - x_5' = 0.$

Логарифмуючи друге і третє рівняння отримаємо

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = x_1' + x_2' + x_3' - 180° = 0; \\ &\varphi_2 = \lg c + \lg \sin x_1' - \lg \sin x_3' - \lg x_4' = 0; \\ &\varphi_3 = \lg c + \lg \sin x_2' - \lg \sin x_3' - \lg x_5' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.21)$$

Підставимо в рівняння (8.21) результати вимірів і отримаємо вільні члени

$w_1 = 46^0\ 25'\ 13'' + 68^0\ 01'\ 25'' + 65^0\ 33'\ 07'' - 180° = -15{,}0'';$

$w_2 = \lg 100000 + \lg \sin 46^0\ 25'\ 13'' - \lg \sin 65^0\ 33'\ 07'' - \lg 79588{,}1 =$

$= 5{,}000\ 000 + 9{,}859\ 988 - 9{,}959\ 202 - 4{,}900\ 848 = -62{,}0 \cdot 10^{-6};$

$w_3 = \lg 100000 + \lg \sin 68^0\ 01'\ 25'' - \lg \sin 65^0\ 33'\ 07'' - \lg 101866{,}0 =$

$= 5{,}000\ 000 + 9{,}967\ 238 - 9{,}959\ 202 - 5{,}008\ 029 = +7{,}0 \cdot 10^{-6}.$

Коефіцієнти першого умовного рівняння поправок дорівнюють +1. Коефіцієнти другого і третього рівнянь вигідно отримати, як відношення приростів

$$\frac{\Delta \lg x}{\Delta x},$$.

де Δx- різність сусідніх значень аргументів. .

Так як $\Delta \boldsymbol{x}$ в таблиці логарифмів достатнє малі величини, то можна згадати, що $\frac{dy}{dx} = \lim_{n \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Таким чином, коефіцієнти останніх двох умовних рівнянь одержані за допомогою таблиць логарифмів як

зміна логарифма на одиницю аргументу, тобто на **1″**для lg sin і на **1 см** для lg x_4' і lg x_5'.

Для зручності обчислень вільні члени w_2 і w_3, а також коефіцієнти рівнянь φ_2 = 0 і φ_3= 0 (тобто змінні логарифмів) будемо виражати в одиницях 6 – го знаку мантиси логарифмів (обчислення виконуються з 6 – ти значними логарифмами на мікрокалькуляторах). .

Коефіцієнти виписані в табл. 8.1. Нормальні рівняння розв'язані способом Гаусса в табл. 8.2.

Таблиця 8.1 Коефіцієнти умовних рівняння поправок.

№ виміру	$\pi = \frac{1}{p}$	a_{i1} k_1= +3,11	a_{i2} k_2= +5,33	a_{i3} k_3= -1,67	s	v
1	1	+1,0	+2,0		3,0	+13,8″
2	1	+1,0	-1,0	+0,8	+1,8	+1,8″
3	1	+1,0		-1,0	-1,0	-0,6″
4	0,21		-5,5		-5,5	-6,2 см
5	0,29			-4,3	-4,3	+2,1
w		**-15,0**	**-62,0**	**+7,0**	**-70,0**	
$[\pi a_1]$		3,0	+1,0	-0,20	+3,80	
$[\pi a_2]$		+1,0	11,37	+1,0	+13,37	
$[\pi a_3]$		-0,20	+1,0	+7,0	+7,80	

Підставимо отримані корелати(табл.8.2) в суму нормальних рівнянь (суми коефіцієнтів і Σw дані в графі –s (табл.8.1).

+3,80 · 3,114 + 13,37 ·5,327 – 7,80 ·1,674 – 70,000 = 0,002.

Остаточною похибкою 0,002 можна знехтувати.
.

Таблиця 8.2

Розв'язання нормальних рівнянь способом Гаусса.

Дії	k_1	k_2	k_3	w	s	Кон-троль
a E.1	3,00 -1	1,00 -0,333	-0,20 0,667	-15,00 5,00	-11,20 3,733	3,734
b b.1 E.2		11,37 11,037 -1	+1,00 1,067 -0,097	-62,0 -57,00 5,165	-48,63 -44,900 4,068	4,068
c c.2 E.3			7,0 6,883 -1	7,0 11,524 -1,674	14,80 18,405 -2,674	-2,674
k_i $\overline{k_i}$	3,114 2,113	5,327 4,327	-1,674 -2,674			
k_i-$\overline{k_i}$	1,001	1,000	1,000			

Корелати тепер випишемо в графи a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} табл.8.1 та обчислимо за формулою (8.16) поправки v_i. Всі отримані результати розв'язань в цьому пункті відповідають результатам, які отримані в параметричному способі і цим підтверджується еквівалентність двох основних способів вирівнювання.

8.4. РОЗВ'ЯЗАННЯ УМОВНИХ І НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОРЕЛАТ.

Запишемо систему нормальних рівнянь корелат для випадку рівноточних вимірів :

$$\left.\begin{aligned} &[aa]k_1+[ab]k_2+\ldots\ldots+[ag]k_r + w_1 = 0; \\ &[ab]k_1+[bb]k_2+\ldots\ldots+[bg]k_r + w_2 = 0; \\ & \end{aligned}\right\} \quad .$$

…… .

$[ag]k_1$+$[bg]k_2$+……+ $[gg]k_r$ + w_r = 0, (8.22)

і для випадку нерівноточних вимірів: .

$$\left.\begin{array}{l} [\pi aa]k_1+[\pi ab]k_2+\ldots\ldots+[\pi ag]k_r + w_1 = 0; \\ [\pi ab]k_1+[\pi bb]k_2+\ldots\ldots+[\pi bg]k_r + w_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$[\pi ag]k_1$+$[\pi bg]k_2$+……+ $[\pi gg]k_r$ + w_r = 0, (8,23)

де $\pi_i = \frac{1}{p_i}$ - обернена вага. .

Вид аналогічної системи, що виникає в параметричному способі, вона за виглядом відрізняється лише вільними членами, які тепер не пов'язані з коефіцієнтами a_i, b_i,..., g_i і виміряними величинами x_i. Величини w_j, що обчислені за формулою (8.2) та уявляють собою приблизні значення функції φ_j, називають нев′язками умовних рівнянь.

В матричній формі умовні рівняння (8.12) записують у вигляді BV + W = 0, (8.24)

а нормальні рівняння NK + W = 0, (8.25)

де матриця $N = BP^{-1}B^T = \begin{bmatrix} [\pi aa] & [\pi ab] & \cdots & [\pi ag] \\ [\pi ab] & [\pi bb] & \cdots & [\pi bg] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [\pi ag] & [\pi bg] & \cdots & [\pi gg] \end{bmatrix}$.(8.26)

Вектор поправок $V = P^{-1}B^TK$, (8.27)

що відповідає рівностям (8.16). В теорії корелатного способу вирівнювання доводиться,що величина $[pv^2]$ за основною формулою дорівнює .

$$-[pv^2] = -\frac{w_1^2}{[\pi aa]} - \frac{[w_2.1]^2}{[\pi bb.1]} - \ldots - \frac{[w_r.(r-1)]^2}{[\pi gg.(r-1)]} = [w_{r+1}.r], \quad (8.28)$$

і за контрольною формулою $-[pv^2] = [w] - \frac{[w_1 \Sigma_1]}{[\pi aa]} - \frac{[w_2 .1][\Sigma_2.1]}{[\pi bb .1]} - \ldots - \frac{[w_r .(r-1)][\Sigma_r .(r-1)]}{[\pi gg .(r-1)]} = [\Sigma_{r+1}. r]$ (8.29)

або скорочено $-[pv^2] = [w_{r+1} . r] = [\Sigma_{r+1} . r]$, (8.30) де

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 = [\pi aa] + [\pi ab] + \ldots\ldots + [\pi ag] + w_1 = [\pi as'] + w_1, \\ \Sigma_2 = [\pi ab] + [\pi bb] + \ldots\ldots + [\pi bg] + w_2 = [\pi bs'] + w_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_r = [\pi ag] + [\pi bg] + \ldots\ldots + [\pi gg] + w_r = [\pi gs'] + w_r, \end{array}\right\} \quad (8.31)$$

а суми $s'_i = a_i + b_i + \ldots\ldots\ldots + g_i$. (8.32)

Алгоритми з однією літерою $[w_2 .1]$, $[w_3 .2]$….. розкриваються точно так же, як і алгоритми $[f_2 .1]$, $[f_3 .2]$ і т.д. в параметричному способі вирівнювання, наприклад

$$[w_2 .1] = w_2 - \frac{[\pi ab]}{[\pi aa]} w_1, \quad (8.33)$$

$$[w_3 .2] = w_3 - \frac{[\pi ac] w_1}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bc.1][w_2.1]}{[\pi bb.1]} \quad \text{і т. д.} \quad (8.34)$$

Розкриття алгоритмів $[\Sigma_2 .1]$, $[\Sigma_3 .2]$……виконується за формулами $[\Sigma_2 .1] = \Sigma_2 - \frac{\Sigma_1 w_1}{[\pi aa]}$. (8.35)

$$[\Sigma_3 .2] = \Sigma_3 - \frac{\Sigma_1 w_1}{[\pi aa]} - \frac{[\Sigma_2 .1][w_2.1]}{[\pi bb.1]} \quad \text{і т. д.} \quad (8.36)$$

подібно тому, як розкриваються аналогічні алгоритми в параметричному способі. Якщо умовно позначити $w_1 = [pal]$ і $\Sigma_1 = [pas]$; $w_2 = [pbl]$ і $\Sigma_2 = [pbs]$, ……. $w_r = [pgl]$ і $\Sigma_r = [pgs]$; $w_{r+1} = [pll] = 0$ і $\Sigma_{r+1} = [pls] = [w]$.(8.37) то алгоритми $[w_2 .1]$, $[w_3 .2]$ і т.д., $[\Sigma_2 .1]$, $[\Sigma_3 .2]$ і т.д. розкриватимуться також, як алгоритми $[pbl.1]$, $[pcl.2]$і т.д.,

$[pbs.1]$, $[pcs.2]$ і т.д. в параметричному способі вирівнювання. Тоді замість (9.9) умовно можна записати -

$[pv^2] = [pll.k]$ і - $[pv^2] = [pls.k]$. (8.38)

Таблиця 8.3 коефіцієнти умовних рівняння поправок.

№ виміру	a_i b_i …… g_i	s'_i	v_i
1	a_1 b_1 …… g_1	s'_1	v_1
2	a_2 b_2 …… g_2	s'_2	v_2
….	……	…….	…..
n	a_n b_n …… g_n	s'_n	v_n
	k_1 k_2 k_3		$[v^2]$

Таблиця 8.4 коефіцієнтів нормальних рівнянь.

	a] b]…… g] s']	Контроль	w_j	Σ_j
[a	$[aa][ab]$….$[ag]$ $[as]$		w_1	Σ_1
[b	$[bb]$….$[bg]$ $[bs]$		w_2	Σ_2
….	……		….	…..
[g	$[gg]$ $[gs]$		w_r	Σ_r

Таблиця 8.5.Розв’язання нормальних рівнянь за схемою Гаусса

Допоміжні	k_1 k_2….. …. k_r	w_j Σ_j	Контроль 1
a $\frac{1}{[aa]}$ E_1	$[aa]$ $[ab]$…….. $[ag]$ -1 $-\frac{[ab]}{[aa]}$ …….. $-\frac{[ag]}{[aa]}$	w_1 Σ_1 $-\frac{w_1}{[aa]}$ $-\frac{\Sigma_1}{[aa]}$	
в в.1 $\frac{1}{[bb.1]}$ E_2	$[bb]$…….$[bg]$ $[bb.1]$….$[bg.1]$ -1 $-\frac{[bg.1]}{[bb.1]}$	w_2 Σ_2 $[w_2.1]$ $[\Sigma_2.1]$ $-\frac{[w_2.1]}{[bb.1]}$ $-\frac{[\Sigma_2.1]}{[bb.1]}$	
……	……	…….	
g $g.(r-1)$	$[gg]$ $[gg.(r-1)]$ -1	w_r Σ_r $[w_r.(r-1)][\Sigma_r(r-1)]$	

$\frac{1}{[gg.(r-1)]}$ E_3		$-\frac{[w_r.(r-1)]}{[gg.(r-1)]}$ - $\frac{[\Sigma_r.(r-1)]}{[gg.(r-1)]}$	
Контроль2 k_i - $\overline{k_1}$ = 1	$\frac{k_1}{k_1}$ $\frac{k_2}{k_2}$ …… … $\frac{k_r}{k_r}$ …… 1,0 1,0 1,0	$[w_{r+1}.r] = [\Sigma_{r+1}.r]=$ $= -[pv^2]$.	

З урахуванням цього схеми складання нормальних рівнянь і їх розв'язання методом Гаусса для рівноточних ви

мірів наведена в табл. 8.3; 8.4; 8.5. Рівності

$$[w_{r+1}.r]=[\Sigma_{r+1}.r]$$

є остаточним контролем перетворення в схемі Гаусса. Після обчислення поправок v_i, які записуються в останній стовпець табл. 8.5, виконуються контролі

$$[pv^2] = - [w_{r+1}.r]; \qquad [pv^2] = - [kw], \qquad (8.39)$$

які підтверджують правильність обчислення поправок v_i.

Остаточним контролем розв'язання задачі є виконання рівностей

$$\varphi_j\ (x_1', x_2', \ldots\ldots, x_n') = 0, \qquad (8.40)$$

де $x_i' = x_i + v_i$ – вирівняні значення виміряних величин.

Іншими словами, нев'язки всіх умовних рівнянь, що обчислені за вирівняними результатами вимірів, повинні дорівнювати нулеві. Часто застосовують такі контрольні

формули: $[av]= - w_1$, $[bv]= - w_2$, ……., $[gv]= - w_r$. (8.41)

Слід проте зауважити, що вони контролюють лише правильність обчислення поправок. .

Однак, якщо в обчисленні коефіцієнтів умовних рівнянь допущені помилки, що особливо ймовірно, коли вихідні

функції (8.1) нелінійні, геодезична мережа опиниться не вирівняною навіть при додержанні рівностей (8.41).

Понад стовпцями $\boldsymbol{w}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ в табл.8.5 роблять такі ж перетворення, як і під стовпцями $\boldsymbol{l}$ і **s** у параметричному способі.

Корелати k_j обчислюються точно так само, як і невідомі δx_j і за такими ж формулами. Допоміжні величини $\overline{k_j}$ обчислюються по стовпцю Σ точно так само, як і $\overline{\delta x_j}$, тобто обчислення виконуються аналогічно, як і в параметричному способі за виключенням, що стовпці $\boldsymbol{l}$ і **s** замінюються стовпцями w і Σ. .

У випадку нерівноточних вимірів схема складання нормальних рівнянь виконується згідно прикладів, які вказані в табл.8.6 та 8.7 для r = 3, а розв'язання нормальних рівнянь виконуються так само, як і у випадку рівноточних вимірів. Таблиця 8.6

№ виміру	a_i b_i c_i s'_i	$\pi_i = \frac{1}{p_i}$	$\pi_i a_i$ $\pi_i b_i$ $\pi_i c_i$ $\pi_i s'_i$	v_i	$\pi_i v_i$
1	a_1 b_1 c_1 s'_1	π_1	$\pi_1 a_1$ $\pi_1 b_1$ $\pi_1 c_1$ $\pi_1 s'_1$	v_1	$\pi_1 v_1$
2	a_1 b_1 c_1 s'_1	π_2	$\pi_2 a_2$ $\pi_2 b_2$ $\pi_2 c_2$ $\pi_2 s'_2$	v_2	$\pi_2 v_2$
...	……	…..	……	….	……
n	a_1 b_1 c_1 s'_1	π_n	$\pi_n a_n$ $\pi_n b_n$ $\pi_n c_n$ $\pi_n s'_n$	v_n	$\pi_n v_n$

Таблиця 8.7.

	a] b] c] s']	Контроль	w_j	Σ_j
[π a	[πaa] [πab] [πac] [πas]		w_1	Σ_1
[π b	[πbb] [πbc] [πbs]		w_2	Σ_2
[π c	[πcc] [πcs]		w_3	Σ_3

8.5. ПІДРАХУНОК ДОПУСТИМИХ НЕВ'ЯЗОК УМОВНИХ РІВНЯНЬ.

Корелатний спосіб вирівнювання у порівнянні з параметричним способом володіє тієї перевагою, що дозволяє попутно з виконанням вирівнювання, виявляти присутність перевищуючих допуски похибок вимірювань через обчислення значень допустимих нев'язок. Для цього перепишемо вираз (8.6) в матричній формі

$$B(-\Delta) + W = 0, \qquad (8.42)$$

звідки слідує

$$W = B\,\Delta. \qquad (8.43)$$

Так як кореляційна матриця вектора істинних похибок вимірів - K_Δ, як і самих вимірів, дорівнює .

$$K_\Delta = \sigma_0^2\, p^{-1}, \qquad (8.44)$$

де p^{-1} - матриця обернених ваг вимірів, σ_0^2- дисперсія одиниці ваги, то застосовуючи узагальнену теорему оцінювання точності, отримаємо для функції (8.43) вираз

$$K_w = \sigma_0^2\, B\, p^{-1} B^T, \qquad (8.44)$$

або з урахуванням (8.26) $K_w = \sigma_0^2\, N$. (8.45)

Іншими словами кореляційна матриця нев'язок дорівнює матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь, помноженої на дисперсію одиниці ваги. Із визначення кореляційної матриці слідує, що її діагональні елементи дорівнюють

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{w_1}^2 &= \sigma_0^2\,[\pi aa], \\ \sigma_{w_2}^2 &= \sigma_0^2\,[\pi bb], \end{aligned}\right\} \quad . \quad .$$

…… .

$$\sigma_{w_r}^2 = \sigma_0^2\ [\pi g g]. \qquad (8.46)$$

і являють собою дисперсії нев'язок. Через те, що виміри, як правило, підкоряються нормальному закону розподілу,

то можна побудувати довірчі інтервали для математичних сподівань нев'язок .

$$w_j - t\,\sigma_{w_j} \leq M_{w_j} \leq w_j + t\,\sigma_{w_j}. \qquad (8.47)$$

. При відсутності систематичних похибок величини $M_{w_j} = 0$ із формули (8.43) $M_{w_j} = BM_\Delta = 0$, якщо $M_\Delta = 0$. Тоді із формули (8.47) слідує .

$$|w_j| \leq t\,\sigma_{w_j} \quad \text{або} \quad W_{\text{гр.}} = \pm\, t\,\sigma_{w_j}, \qquad (8.48)$$

де σ_{w_j}- визначається згідно рівнянням (8.46). .

Нагадуємо, що коефіцієнт t вибирають рівним 2; 2,5 або 3, що відповідає ймовірності P рівної 0,95; 0,987; 0,997 відповідно. .

Відмітимо, що для розв'язанні поставленої задачи необхідно знати величину σ_0 або σ (при рівноточних вимірах), в якості яких можна прийняти середні квадратичні похибки, якщо вони отримані надійно, наприклад при попередній обробці вимірів або із попереднього досвіду вимірювань.

Практично в корелатному способі перед розв'язанням нормальних рівнянь за формулою (8.48) обчислюють гра-

ничні допустимі нев'язки $W_{\text{гр.}}$ і порівнюють з нев'язками W_j. Якщо $W_j \leq W_{\text{гр.}}$, то обчислення продовжують, у протилежному випадку відшукують похибки вимірів і їх виправляють. .

Приклад. Перевірити допустимість нев'язки W_j = 70 мм нівелірного полігону, який складений із трьох ходів з вагами $p_i = \frac{1}{L_i}$, де L_1= 5 км, L_2= 7 км, L_3= 10 км, якщо середніє квадратичне відхилення на 1 км ходу σ_0 = 5 мм, t = 2 і ймовірності β = 0,95. .

Розв'язання. Квадратичний коефіцієнт нормального рівняння, відповідного цьому полігону, буде .

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = L_1 + L_2 + L_3 = 22$. .

Допустима нев'язка $W_{\text{гр.}} = 2 \cdot 5\sqrt{22} \approx 50$ мм. Відповідь: **нев'язка недопустима**. .

8.6. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ВИРІВНЯНІ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

Нехай в процесі вирівнювання потрібно оцінити точність функції $F' = F'(x_1', x_2', ..., x_n')$, (8.49)

де $x_{\text{i}}' = x_{\text{i}} + v_i$ - вирівняні результати вимірів. Приведемо функцію (8.49) до лінійного виду шляхом розкладання в ряд Тейлора і отримаємо $F' = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i v_i$, (8.50)

де позначено $f_0 = F'(x_1', x_2', ..., x_n')$, $f_i = \frac{\partial F'}{\partial x_{\text{i}}'}$. (8.51)

В теорії корелатного способу доводиться, що обернена вага вирівняної функції має вид алгоритму Гаусса (8.52)

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}_{F'}} = [\pi ff.r] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf.1]^2}{[\pi bb.1]} - \ldots - \frac{[\pi gf.(r-1)]^2}{[\pi gg.(r-1)]},$$

причому $$[\pi ff] = \frac{1}{P_F} \qquad (8.53)$$

є обернена вага функції, яка обчислена за не вирівняними вимірами. Якщо алгоритм (8.52) не залежить від того, як вибрана функція, тобто за якими вимірами вона обчислена, то для виразу (8.53) будемо одержувати різні значення у залежності від вибору вимірів. .

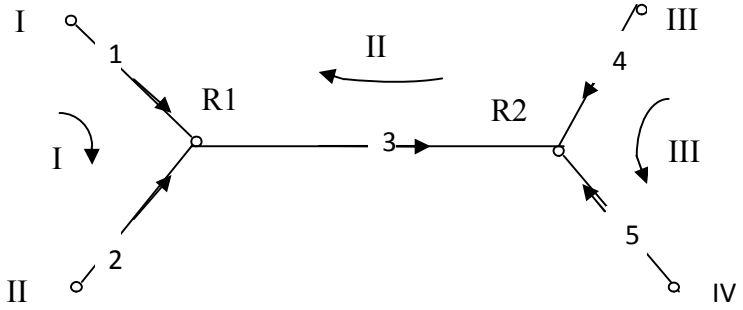


Рис.8.1. Схема нівелірної мережі.

Наприклад, для оберненої ваги вирівняної відмітки репера R1 нівелірної мережі отримаємо одне і теж значення, якщо обчислити її від відміток марок I, II, III, IV, тоді, коли формула (8.53) зможе дати різні значення.

Помітимо також, що завжди $$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}_{F'}} \leq \frac{1}{P_F}. \qquad (8.54)$$

Для контролю обчислення $\frac{1}{P_{F'}}$ застосовується формула

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}_{F'}} = [\pi fs.r] = [\pi fs] - \frac{[\pi af][\pi as]}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf.1][\pi bs.1]}{[\pi bb.1]} - \ldots\ldots -$$

$$- \frac{[\pi gf.(r-1)][\pi gs.(r-1)]}{[\pi gg.(r-1)]}, \qquad (8.55)$$

де $[\pi as] = [\pi aa] + [\pi ab] + \ldots + [\pi ag] + [\pi af]$,

$[\pi bs] = [\pi ab] + [\pi bb] + \ldots + [\pi bg] + [\pi bf]$,

……..

$[\pi gs] = [\pi ag] + [\pi bg] + \ldots + [\pi gg] + [\pi gf]$, (8.56)

і

$s_1 = s_1' + f_1 = a_1 + b_1 + \ldots\ldots + g_1 + f_1$,

$s_2 = s_2' + f_2 = a_2 + b_2 + \ldots\ldots + g_2 + f_2$,

……

$s_n = s_n' + f_n = a_n + b_n + \ldots\ldots + g_n + f_n$. (8.57)

Як видно, в корелатному способі суми (8.57) відрізняються від $\boldsymbol{s}_i$ (3.9) тим, що замість вільних членів $\boldsymbol{l}_i$ в них фігурують коефіцієнти функції $\boldsymbol{f}_i$.

З урахуванням цього схеми для складання нормальних рівнянь мають той же вид, що і в параметричному способі вирівнювання, однак з тією різницею, що стовпець - $\boldsymbol{l}_i$ замінюється стовпцем **f,** а стовпець коефіцієнтів функцій – стовпцем нев'язок – **w**. Проілюструємо порядок вирівнювання корелатним способом з оцінкою точності функцій наступним прикладом.

8.6.1. Приклад вирівнювання виміряних кутів при вставці пункту в жорсткий кут тріангуляції.

Дано тріангуляційне побудування у вигляді вставки пункту С в жорсткий кут ВАД, який утворений сторонами тріангуляції АВ і АД з відомими дирекційними кутами $\alpha_{\text{АВ}}$ і $\alpha_{\text{АД}}$ (рис.8.2). При вставці пункту виміряне шість кутів. Необхідно: виконати вирівнювання цього побудування корелатним способом та знайти поправки до кутів – v_i і обернену вагу функції $F' = \alpha'_{\text{АС}} = f_0 + v_1$ вирівняного дирекційного кута сторони α'_{ac}.

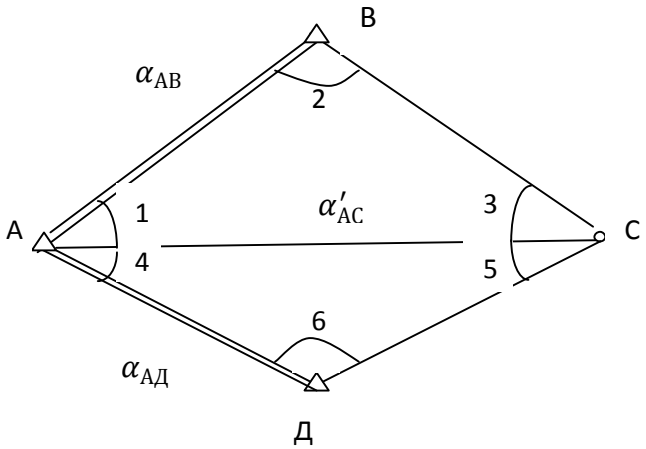


Рис. 8.2. Схема вставки пункту С в жорсткий кут ВАД тріангуляції .

Розв'язання. Рахуючи, що виміряне всього 6 кутів, при необхідній кількості k = 3 кутів і тоді надлишкове виміряне r = n – k = 3 кутів. Тому маємо три геометричні умови, а саме:

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle\ \text{А В С:} & 1 + 2 + 3 - 180° = w_1, \\ \triangle\ \text{А Д С:} & 4 + 5 + 6 - 180° = w_2, \\ \text{Ь В А Д:} & 1 + 4 - (\alpha_{\text{АД}} - \alpha_{\text{АВ}}) = w_3. \end{array}\right\}$$

Згідно вихідних даних, нев'язки склали:

w_1= 6,0″, w_2= -2,2″, w_3= 4,0″. .

Тому умовні рівняння мають вид $v_1 + v_2 + v_3 + 6{,}0'' = 0$;

. $v_4 + v_5 + v_6 - 2{,}2'' = 0$;

. $v_1 + v_4 + 4{,}0'' = 0$.

. Складання і розв'язання умовних та нормальних рівнянь виконуємо в табл.8.8; 8.9; 8.10.

Таблиця 8.8. Коефіцієнти умовних рівнянь. $v_i = a_i\, k_1 + b_i k_2 + c_i k_3$

№ кута	Коефіцієнти				s_i	v_i
	a_i	b_i	c_i	f_i		
1	1		1	1	3	-3,4″
2	1				1	-1,3
3	1				1	-1,3
4		1	1		2	-0,6
5		1			1	1,4
6		1			1	1,4
k_j	-1,32	1,42	-2,05		$[vv]$ = 19,22	

Таблиця 8.9. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

+ Запис

—

	a]	b]	c]	f]	s]	Контроль	W	Σ
[a	3	0	1	1	5	5	6,0	10,0
[b		3	1	0	4	4	-2,2	1,8
[c			2	1	5	5	4,0	8,0
[f				1	3	3	Σ 7,8	

Таблиця 8.10. Розв'язання рівнянь. + Запис

—

В табл.8.9 і 8.10 стрілками показано порядок виконання контролю. Так в табл.8.9 для того,щоб отримати стовпець Σ, в кожному рядку із чисел стовпця “Контроль“ необхідно відняти числа стовпця f і додати числа стовпця нев’язок **w**. Поправки v_i обчислені в табл.8.8. . Остаточним контролем вирівнювання є рівності .

. $v_1 + v_2 + v_3 = -w_1 = -6{,}0''$; .

. . $v_4 + v_5 + v_6 = -w_2 = +2{,}2''$; .

. . $v_1 + v_4 = -w_3 = -4{,}0''$.

і співвідношення $[vv] = -[kw] = -19{,}22$ (табл.8.8 і 8.10).

Для обчислення середньої квадратичної похибки вирівняної функції $P_{F'} = \alpha'_{\text{AC}}$ застосується формула .

$$m_{F'} = \text{m}\sqrt{\frac{1}{P_{F'}}}, \quad .$$

де $\frac{1}{P_{F'}}$ обернена вага функції, отримана в табл.8.10 рівною

$^1/_{k_j}$	k_1	k_2	k_3	w	Σ	Контр 1	f	s	Контр. 2
0,333	3,00 -1	0 0	1,00 - 0,33	6,00 -2,00	10,0 -3,33	10,00 -3,333	1,00 -0,33	5,00 -1,67	5,00 -1,67
0,333		3,00 -1	1,00 -0,33	-2,20 0,733	1,80 -0,60	1,80 -0,600	0 0	4,00 -1,33	4,00 -1,333
0,752			1,33 -1	2,73 -2,05	4,07 -3,06	4,06 -3,05	0,67 -0,50	2,00 -1,50	2,00 -1,50
k_j	-1,32	1,42	-2,05	-19,22	-19,16		0,329	0,327	
$\overline{k_j}$	-2,31	0,42	-3,06	$[w_4.3]$	$[\Sigma_4.3]$		$1/P_F$		
	0,99	0,99	1,01	Контроль 3: $(k_j - \overline{k_j})$					

$\frac{1}{P_{F'}}$ = 0,329, а середні квадратичні похибки складають

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{19,22}{3}} = 2,5''; \quad .$$

$$. \quad m_{F'} = 2,5\sqrt{0,329} = 1,4''. \quad .$$

Відмітимо, що ці значення отримані ненадійно через мале число надлишкових вимірів (r = 3). .

ГЛАВА 9. ДЕЯКІ ВИДИ УМОВНИХ РІВНЯНЬ В ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ.

В геодезичних мережах залежно від виміряних величин між ними виникають різні математичні зв'язки. У залежності від різних математичних зв'язків виникають і різні умовні рівняння поправок за таким правилом:

1. Для обраної математичної умові складають умовне рівняння зв'язку, яке запишемо формулою загального виду

$$\varphi_i\ (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = 0. \qquad (9.1)$$

2. Обчислюють значення коефіцієнтів умовних рівнянь поправок

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}\right)_0. \qquad (9.2)$$

3. Обчислюють нев'язку $w_i = \varphi_i\ (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, (9.3)
де x_i – значення виміряних величин. .

4. Визначають умовне рівняння поправок .

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ v_i + w_i = 0. \qquad (9.4)$$

9.1.ВИСОТНІ (НІВЕЛІРНІ) МЕРЕЖІ. .

У висотних геодезичних мережах виникають математичні зв'язки (умови) в полігонах, число яких співпадає з числом надлишкових вимірів і дорівнює r = l – k, де l – число ходів, k – число вузлових точок.

Полігони можуть бути розімкнені, які опираються на вихідні пункти або замкнені. У загальному виді умовне рівняння має вид $\sum_{i\epsilon j} \pm v_i + w_j = 0.$ (9.5)

де $\sum_{i,j=1}^{n} v_i$ - сума поправок до тих перевищень, які входять у даній полігон. Умовні рівняння називають полігонними або умовами полігонів. Рівняння зв'язку визначаються за формулами: .

- для замкнених полігонів $\sum_{i\epsilon j} \Sigma \pm h_i' = 0,$ (9.6)

- для розімкнених полігонів $\Sigma \pm h_i'$ - ($H_к - H_п$), (9.7)

де h_i' - вирівняні значення перевищень, $H_к, H_п$ - відмітки кінцевій та початковій точок розімкненого полігону.

Рівняння зв'язку (9.6), (9.7) показують, що коефіцієнти a_{ij} у висотних мережах дорівнюють ±1 або 0. Відповідно нев'язки полігонних умов для розімкнених полігонів визначаються за формулою

$$w_j = \Sigma \pm h_i + H_п - H_к , \qquad (9.8)$$

для замкнених полігонів $H_п = H_к$, тому $w_j = \Sigma\, h_i$, де h_i - виміряне значення перевищення. Відмітимо також,

що полігони не повинні бути лінійно залежні один від одного, тобто ні один з них не повинний бути комбінацією інших.

9.2. МЕТОД ПОЛІГОНІВ ПРОФ. В.В. ПОПОВА ПРИ ВИРІВНЮВАННІ НІВЕЛІРНИХ І ПОЛІГОНОМЕТРИЧНИХ МЕРЕЖ.

У випадку, якщо полігонні умовні рівняння мають коефіцієнти ±1 або 0, нормальні рівняння можна отримувати без складання умовних рівнянь. При цьому схему мережі попередньо підготовляють. Для цього вимерують на всі ходи від 1 до l і полігони від 1 до $r = l - m$, де m число вузлових точок.

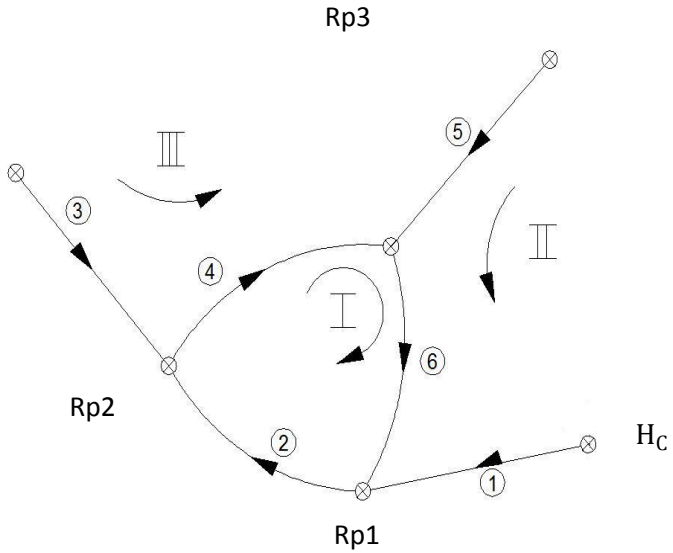


Рис.9.1. Схема нівелірних ходів.

Необхідно також вибрати напрямки ходів і полігонів, по яким будуть підсумовуватися перевищення і випи-

суватися виміряні величини (сума кутів або перевищень) і обернені ваги ходів, за якими можна прийняти число кутів або довжини ходів. Після цього, нормальні рівняння складають за простими і зручними правилами, які запропонував проф. В.В. Попов: .

. **а) квадратичні коефіцієнти нормальних рівнянь в рядку j дорівнюють сумі обернених ваг ходів, які належать j – му полігону;** .

. **б) не квадратичні коефіцієнти, які розташовані в рядку - h і стовбці j, дорівнюють оберненої ваги ходу, який належить полігонам h і j, причому взятої з позначкою “ + “, якщо напрямки цих ходів співпадають і “ - “ у протилежному випадку;** .

. **в) вільний член j – го нормального рівняння дорівнює нев’язке j – го полігону.**

Ясно, що кожному j– му полігону (умовному рівнянню) відповідає j- а корелата. Так для мережі (рис.9.1) маємо такі нормальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned}&(\pi_2+\pi_4+\pi_6)k_1+\pi_6k_2+\pi_4k_3+w_1=0;\\&\pi_6k_1+(\pi_1+\pi_5+\pi_6)k_2-\pi_5k_3+w_2=0;\\&\pi_4k_1-\pi_5k_2+(\pi_3+\pi_4+\pi_5)k_3+w_3=0,\end{aligned}\right\} \qquad (9.10)$$

де $\pi_j=\frac{N_j}{c}$ або $\pi_j=\frac{L_j}{c}$; N_i - кількість штативів в j– му нівелірному ході або кутів –в полігонометричному ході; L_j - довжина ходу або полігону; С – постійний коефіцієнт.

Потім розв'язують нормальні рівняння, одержують всі корелати k_j. Далі обчислюють поправки до суми виміряних у кожному ході перевищень (а в полігонометричному ході – кутів) за правилом: **поправка v_i дорівнює оберненої ваги π_j, помноженої на суму корелат тих полігонів, яким належить j –й хід, причому, якщо напрямок ходу і полігону не співпадають, то корелата береться з оберненою позначкою**. .

Так для мережі (рис.9.1) поправки обчислюються за формулами: $v_1 = \pi_1(k_1 + k_2)$; $v_2 = \pi_2 k_1$; $v_3 = \pi_2 (k_1 + k_3)$; $v_4 = \pi_4(k_1 + k_3)$; $v_5 = \pi_5(k_2 - k_3)$; $v_6 = \pi_6(k_1 + k_2)$. (9.11)

Для оцінки точності відміток вузлів вибирають ваговий полігон від вихідної точки до вузла, який оцінюється. Додатковий стовпець в схемі Гаусса тоді одержується за тими же правилами, за якими складаються нормальні рівняння. Наприклад, якщо для оцінки точності вузла Rp1 вибрати полігон, який співпадає з першим ходом, то отримаємо $[\pi af] = 0$; $[\pi bf] = -\pi_1$; $[\pi cf] = 0$; $[\pi ff] = \pi_1$. (9.12)

Обернену вагу вирівняної функції можна отримати: - за основною формулою .

$$\frac{1}{P_F} = [\pi ff.3] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf.1]^2}{[\pi bb.1]} - \frac{[\pi cf.2]^2}{[\pi cc.2]} \qquad (9.13)$$ і

- за контрольною формулою (9.14)

$$\frac{1}{P_F} = [\pi fs.3] = [\pi fs] - \frac{[\pi af][\pi as]}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf.1][\pi bs.1]}{[\pi bb.1]} - \frac{[\pi cf.2][\pi cs.2]}{[\pi cc.2]}.$$

Середні квадратичні похибки визначаються: .

- для рівноточних вимірів за формулою $m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$; (9.15)

-одиниці ваги для нерівноточних вимірів $\mu = \sqrt{\frac{[Pvv]}{r}}$; (9.16)

-функції вирівняних величин $m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}$; (9.17)

- окремих нерівноточних вимірів $m_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}$. (9.18)

Вирівнювання мережі полігонометричних ходів робиться в два етапи: окремо вирівнюють кути і окремо - прирости координат Δx та Δy.

Обернені ваги при вирівнюванні кутів визначають через кількість кутів, а при вирівнюванні приростів координат Δx та Δy - через довжини ходів. .

Після визначення поправок до перевищень в нівелірних ходах мережі і до кутів та приростів координат в ходах мережі полігонометрії, виконують вирівнювання розімкнених ходів між вихідними пунктами і вузловими точками та між вузловими точками.

9.3. МЕРЕЖІ ТРІАНГУЛЯЦІЇ.

В мережах тріангуляції розрізняють лінійні (кутові) та нелінійні (синусні) умовні рівняння. .

Для зручності в мережах тріангуляції, полігонометрії та трилатерації умовні рівняння зв’язку виражають функцією від нев’язки W за формулою

$$\varphi_i = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = W_i. \qquad (9.19)$$

Оскільки коефіцієнти умовних рівнянь поправок a_{ij} визначають через похідні від наближених значень виміряних величин, то їх можна визначати за формулою

$$a_{ij} = \frac{\partial W_i}{\partial x_i}. \qquad (9.20)$$

Формула (9.19) одночасно використовується і для обчислення нев'язки умовного рівняння W_i. Разом з тим в корелатному способі вирівнювання виміряні кути планових мереж визначають арабськими числами 1,2,….,n згідно з номером виміряного кута. Поправки до виміряних величин позначають v_i $(i = 1, n)$.

9.3.1. Лінійні умовні рівняння.

1. *Умовне рівняння фігури*. .

Воно виникає в замкненій фігурі (рис.9.2), коли існує умова суми усіх кутів плоского трикутника.

$$1 + 2 + 3 - 180° = W_ф, \qquad (9.21)$$

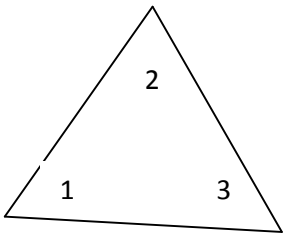


Рис. 9.2

Згідно з формулою (9.20) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$. За формулою (9.4) умовне рівняння фігури (трикутника) буде

$$v_1 + v_2 + v_3 + W_ф = 0, \qquad (9.22)$$

де v_i (i = 1,2,3) – поправки до виміряних кутів.

В спеціальних інженерно – геодезичних мережах використовують також фігури чотирикутників. Для них відповідно будемо мати:

- умовне рівняння зв'язку 1+2+3 + 4 - 360° = $W_ф$, (9.23)
- умовне рівняння поправок $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + W_ф = 0$. (9.24)

2. *Умовне рівняння горизонту.*

Воно виникає на пунктах, на яких окремо виміряні всі кути (рис.9.3).

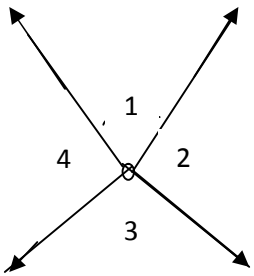


Рис.9.3

Аналогічно з умовними рівняннями фігур, отримаємо:

- умовне рівняння зв'язку 1 + 2 + 3 + 4 - 360° = $W_г$; (9.25)
- умовне рівняння поправок $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + W_г = 0$. (9.26)

Примітка: *Умовне рівняння горизонту* не виникає, коли на пункті кути виміряні способом кругових прийомів.

3. *Умовне рівняння жорсткого кута.*

b)

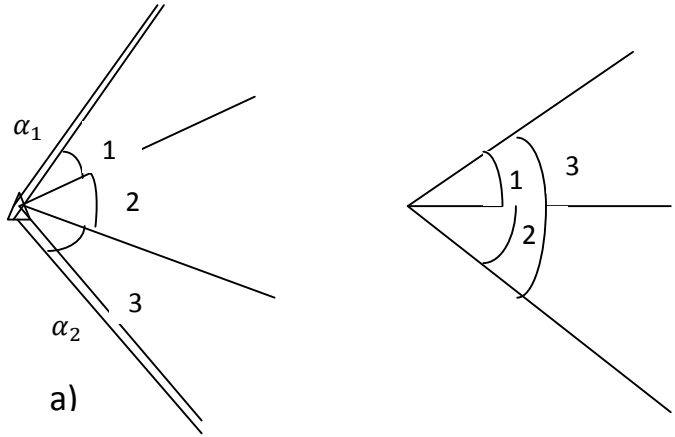


Рис.9.4.

Цю умову ще називають умовою суми кутів на станції (рис.9.4). Згідно рис.9.4,а маємо умовне рівняння зв'язку виду $1 + 2 + 3 - (\alpha_2 - \alpha_1) = W_c$ (9.26)

де α_1, α_2 - жорсткі дирекціоні кути;

- умовне рівняння поправок $v_1 + v_2 + v_3 + W_c = 0$. (9.27)

Відповідно для рис. 9.4,b отримаємо умовні рівняння зв'язку та поправок за формулами:

$$1 + 2 - 3 = W_c, \qquad (9.28)$$

$$v_1 + v_2 - v_3 + W_c = 0. \qquad (9.29)$$

4. *Умовне рівняння дирекційних кутів.*

Воно виникає в мережах тріангуляції з жорсткими дирекційними кутами сторін, які не мають спільних пунктів (рис.9.5).

△

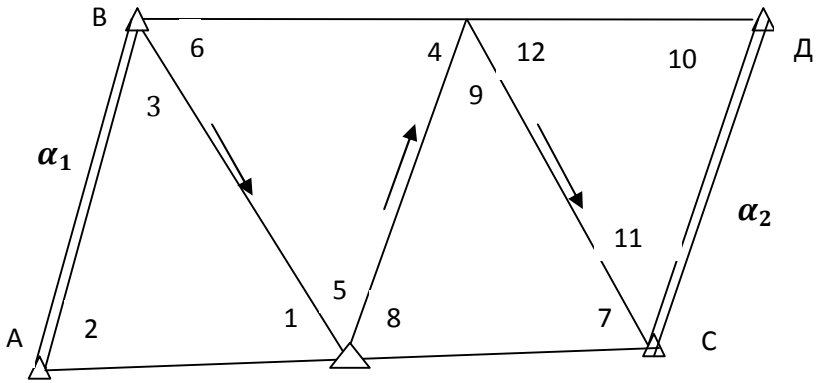


Рис.9.5

Умовне рівняння зв'язку визначається за формулою передачі дирекційного кута α_1 від вихідної сторони АВ до дирекційного кута α_2вихідної сторони СД. .

На практиці ця робота простіше робиться, за так званою, ходовою лінією, яка позначена стрілками. При цьому із всіх можливих варіантів передачі дирекційних кутів від α_1 до α_2 в цьому варіанту буде використано найменша кількість кутів, що спрощує обсяг обчислень при вирівнюванні. При обчисленні використовуються праві та ліві виміряні кути відносно ходової лінії. Згідно рис.9.5 маємо :

- умовне рівняння зв'язку .

α_1 - 3 ±180° +5 ±180° - 9 ±180° +11 ±180° - α_2= W_α, (9.30)

- умовне рівняння поправок дирекційних кутів .

$$- v_3 + v_5 - v_9 + v_{11} + W_\alpha = 0. \qquad (9.31)$$

Якщо дирекційний кут α_2 був визначений (рис.9.6), то отримаємо: .

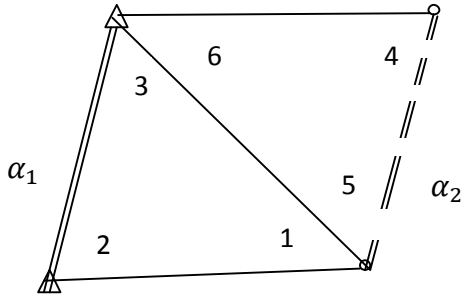


Рис. 9.6.

– умовне рівняння зв'язку .

$$\alpha_1 - 3 \pm 180° + 5 \pm 180° - \alpha_2 = W_\alpha, \qquad (9.32)$$

- умовне рівняння поправок .

$$- v_3 + v_5 - v_{\alpha_2} + W_\alpha = 0, \qquad (9.33)$$

де v_{α_2} - поправка до визначеного дирекційного кута,

$\frac{\partial W_\alpha}{\partial \alpha_2} = -1$. Вагу визначеного дирекційного кута обчислюють за формулою $P_\alpha = \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2}$, (9.34)

де m_β^2 , m_α^2 – відповідно дисперсії вимірювання кута і визначення дирекційного кута в мережі тріангуляції.

Зазначимо, що умовне рівняння жорсткого кута (рис.9.4) можна приймати як окремий випадок умовного рівняння дирекційних кутів. В суспільній мережі тріангуляції між декілька дирекційними кутами вихідних сторін $N_{дк}$ складають умовні рівняння зв'язку найкоротшими ходовими лініями. Число їх буде на одне менше від кількості дирекційних кутів N_α і тоді $N_{дк} = N_\alpha - 1$.

. Всі ці умовні рівняння називають кутовими. Їх число підраховують за формулою $r_1 = n - l$, (9.35) де n – число всіх кутів, l - число сторін, дирекціоні кути яких визначаються. Так в мережі (рис.9.5) $r_1 = 12 - 7 = 5$.

Зауважимо, що якщо в мережі виміряні напрямки, то в умовних рівняннях, поправки до кутів необхідно виразити через різності поправок напрямків.

9.3.2. Нелінійні (синусні) умовні рівняння.

5. Базисне умовне рівняння. .

Воно виникає в мережі тріангуляції, яка має два і більше виміряних або вихідних сторін (базисів). Математична умова полягає у тому, щоб довжина одного базису (сторони), обчислена за вирівняними кутами від іншого базису дорівнювала її заданому значенню. При математичних обчисленнях використовують відому із тригонометрії формулу синусів. Тому і умовне рівняння поправок часто називають ***синусним***.

Так, наприклад, для мережі. яка наведена на рис. 9.7, послідовно по трикутниках отримаємо довжини, застосовуючи теорему синусів кутів

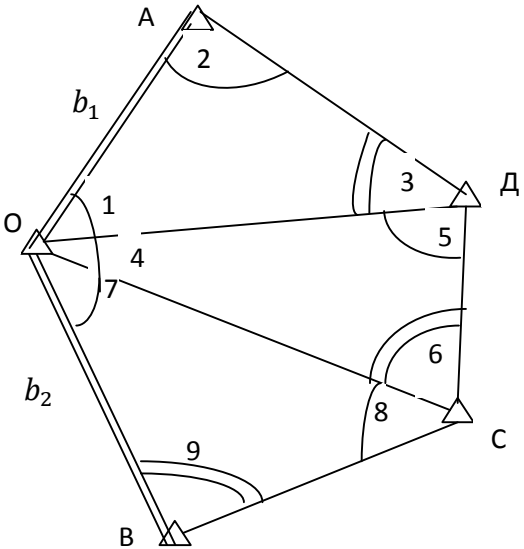


Рис.9.7.

$S_{OD}=b_1\frac{\sin 2}{\sin 3}$; (9.36) $S_{OC}=S_{OD}\frac{\sin 5}{\sin 6}$; (9.37) $b_2=S_{OC}\frac{\sin 9}{\sin 8}$. (9.38)

Після з'єднання формул (9.36), (9.37) і (9.38) приходимо

до виразу $$\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{\sin 2\sin 5\sin 8}{\sin 3\sin 6\sin 9}=1 \qquad (9.39)$$

або, після логарифмування, отримаємо .

$$\log b_1-\log b_2+\sum_{i=2,5,8}\log\sin\beta_i-\sum_{i=3,6,9}\log\sin\beta_i=0, \qquad (9.40)$$

яке уявляє собою вихідне рівняння зв'язку .

$$\varphi_i\,(\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots,\beta_n)=0 \quad .$$

і яке має нелінійний вигляд на відміну від усіх попередніх випадків. Коефіцієнти приведеного до лінійного виду

умовного рівняння згідно позначенню (8.5) знайдемо за формулою .

$$a_i = \pm\left(\frac{\partial \log \beta_i}{\partial \beta_i}\right) = \pm \frac{M}{\rho''} \cdot \frac{\cos \beta_i}{\sin \beta_i} = \pm \frac{M}{\rho''} \operatorname{ctg} \beta_i, \quad (9.41)$$

де M = 0,43 – модуль переходу від десятинних логарифмів до натуральних, а знаменник ρ'' = 206264,8″ уведений за тою причиною, що в геодезії поправки до кутів обчислюють у кутовій мірі (в секундах).

Величина $$\frac{M}{\rho''} \operatorname{ctg} \beta_i = \Delta_i \quad (9.42)$$

(але не плутати з істинними похибками). Так як

$$\log \sin(\beta_i + 1'') = \log \sin \beta_i + \frac{M}{\rho''} \operatorname{ctg} \beta_i,$$ то величина

$$\Delta_i = \log \sin(\beta_i + 1'') - \log \sin \beta_i \quad (9.43)$$

є зміна логарифма синуса кута зі зміною кута на одну секунду і може бути отримана з тригонометричних функцій сучасних обчислювальних мікрокалькуляторів. Зазвичай достатньо Δ_i виражати у шостому знаку логарифма. Після лінеаризації виразу (9.40) матиме умовне рівняння

$$\Delta_2 v_2 + \Delta_5 v_5 + \Delta_8 v_8 - \Delta_3 v_3 - \Delta_6 v_6 - \Delta_9 v_9 + W_b = 0. \quad (9.44)$$

Сформулюємо правило складання базисного умовного рівняння: **1**) вибираємо напрямок підходу від базису b_1 до базису b_2, **2**) послідовно у кожному трикутнику помічаємо одною дугою кути, які лежать проти передній по ходу сторони і двома дугами кути, які лежать проти задній по ходу стороні (ці кути називаються зв’язуючи), **3**) пишемо умов-

не рівняння у загальному виді, ставляючи позначки (+) і (-) перед Δ_i відповідно тому, яким є кут β_i - переднім або заднім. Потім находимо величини Δ_i і обчислюємо

нев'язку $W_b = \log \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin 2 \sin 5 \sin 8}{\sin 3 \sin 6 \sin 9}$. (9.45)

Обчислення виконуємо в спеціальній таблиці. .

При обчисленні на мікрокалькуляторі зручніше використовувати вираз (9.44), який перетворений у виді .

$$\sum_{i=2,5,8} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i - \sum_{i=3,6,9} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i + \frac{\rho''}{M} W_b = 0, \qquad (9.46)$$

шляхом помноження на коефіцієнт .

$$k = \frac{\rho''}{M} = 4{,}749427 \cdot 10^5, \qquad (9.47)$$

або в загальному виді .

$$\sum_{i \epsilon s} \pm \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i + \overline{W_b} = 0, \qquad (9.48)$$

де через **s** позначено безліч кутів, які є зв'язуючи. .

Умовне рівняння (9.48) більш придатне при застосуванні мікрокалькуляторів і воно може служити також для контролю складання рівнянь (9.44). .

6. Полюсне умовне рівняння.

Воно виникає в мережі тріангуляції, в якої є замкнений ланцюг трикутників відносно будь-якої сторони (наприклад в **центральній системі**). Така фігура має точку (полюс) із якої находять напрямки до зовнішніх (контурних)

сторін (рис.9.8).

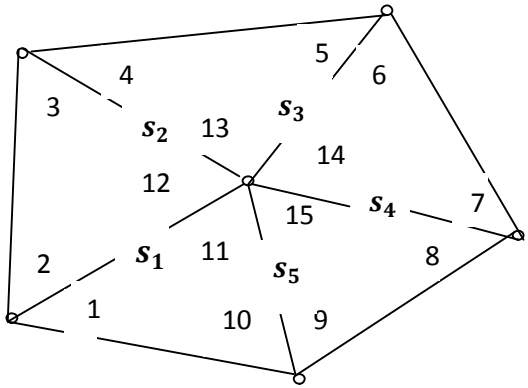


Рис.9.8.

Полюсне умовне рівняння складається так само, як і базисне, з тією лише різницею, що базиси b_1 і b_2 співпадають і їх довжини не беруть участі в обчисленні нев'язки полюсної умови $W_{\text{п}}$. Можна прийняти будь – яку із сторін замкненої фігури за вихідну (рис.9.8) і від нею за теоремою синусів через виміряні кути, поступово пройти через всі трикутники, обчислити їх сторони і знову повернутися до вихідної. Практично встановлено, що полюсне умовне рівняння буде більш простим, якщо за вихідну взяти одну із сторін, що виходить із точки полюса, наприклад s_1.

Для геодезичної фігури (рис.9.8) полюсне умовне рівняння зв'язку визначиться за формулою .

$$s_1 \cdot \frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}{\sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9 \cdot \sin 1} - s_1 = 0. \qquad (9.49)$$

Взагалі наближене значення довжини сторони $\boldsymbol{s_1}$ в мережі тріангуляції можна взяти довільним або обчислити за виміряними кутами трикутників від будь – якої вихідної базисної сторони і використовувати її в формулі (9.49).

Але, враховуючи подальше зведення нев'язки W до кутового виміру, аналогічно формулі (9.46) доцільно взяти довжину сторони $\boldsymbol{s_1} = \rho''$ і у формулі (9.49) зразу отримаємо нев'язку $W_{\text{п}}''$ в секундах.

Порівняння формул (9.39) і (9.49) показує, що полюсне умовне рівняння поправок буде подібним базисному і визначатися за таким же правилом. Так для наведеної фігури маємо

$$.\Delta_2 v_2+\Delta_4 v_4+\Delta_6 v_6+\Delta_8 v_8+\Delta_{10} v_{10} - \Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 - \Delta_5 v_5 - \Delta_7 v_7 -$$

$$-\Delta_9 v_9 + W_{\text{п}} = 0 \qquad (9.50)$$

або $\sum_{i=2,4,6,8,10} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i - \sum_{i=1,3,5,7,9} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i + \frac{\rho''}{M} W_{\text{п}} = 0$, (9.51)

або скорочено $\sum_{i=1}^{k} \pm \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i + \overline{W_{\text{п}}} = 0$, (9.52)

де β_i - номер кута в умовному рівнянню зв'язку; (+) позначка для кутів, які знаходяться у чисельнику, а (-) позначка для кутів, які знаходяться у знаменнику умовного рівняння поправок.

В геодезичному чотирикутнику також виникає полюсне умовне рівняння (рис.9.9). Якщо за полюс прийняти умовну точку перетину діагоналей чотирикутника, то отримаємо: .

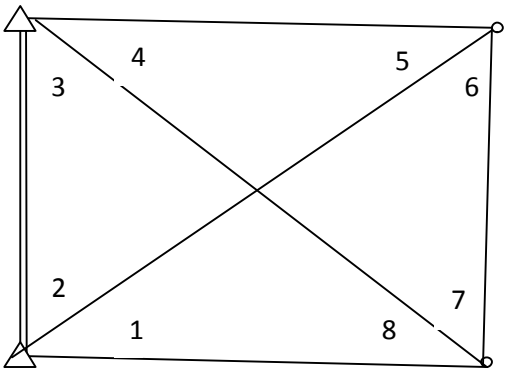


Рис. 9.9.

- умовне рівняння зв'язку .

$$\rho'' \cdot \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - \rho'' = W_{\text{п}}'' . \qquad (9.53)$$

- полюсне умовне рівняння поправок виду

$\Delta_1 v_1 + \Delta_3 v_3 + \Delta_5 v_8 + \Delta_7 v_7 - \Delta_2 v_2 - \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 - \Delta_8 v_8 + W_{\text{п}} = 0.$ (9.54)

або $\sum_{i=1,3,5,7} \Delta_i \, v_i - \sum_{i=2,4,6,8} \Delta_i \, v_i + W_{\text{п}} = 0,$ (9.55)

або $\sum_{i=1,3,5,7} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i - \sum_{i=2,4,6,8} \operatorname{ctg} \beta_i \, v_i + \frac{\rho''}{M} W_{\text{п}} = 0.$ (9.55)

Число синусних умовних рівнянь можна отримати за формулою $r_2 = \text{r} - r_1 = \text{n} - \text{k} - \text{n} + l = l - \text{k},$ (9.56)

де k – загальне число необхідних вимірів (при вирівнюванні виміряних кутів k дорівнює подвійному числу пунктів, які визначаються, а при вирівнюванні напрямків - потрійному їх числу плюс число вихідних пунктів). Наприклад, в мережі (рис.9.7) $r_2 = 5 - 4 = 1$ (базисне умовне рівняння), в мережі (рис.9.5) $r_2 = 7 - 4 = 3$ (одне базисне і два координатних умовних рівнянь).

В тріангуляційному побудуванні (рис.9.9) виникає r = 8 - 4 = 4 умовних рівняння, у тому числі r_1= 8 – 5 = 3 умовних рівнянь фігури, наприклад .

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_6 + v_7 + v_8 + w_1 = 0; \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_2 = 0; \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + w_3 = 0. \end{array}\right\} \qquad (9.57)$$

і одне (r_2= 5 – 4 = 1) полюсне умовне рівняння, наприклад

$$\sum_{i=1,3,5,7} \Delta_i v_i - \sum_{i=2,4,6,8} \Delta_i v_i + w = 0. \qquad (9.58)$$

Помилково думати, що замість полюсного умовного рівняння можна скласти ще одне умовне рівняння фігури виду $v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + w = 0.$ . .

Справа у тому, що всі умовні рівняння повинні бути лінійно незалежними. Існують умовні рівняння, які можна взаємно замінювати. Так, при побудуванні мережі тріангуляції (рис.9.5) умовні рівняння базисне і дирекційних кутів можна замінити двома координатними умовними рівняннями, які можна скласти від пункту В до С і навпаки. Але в усіх випадках слід намагатися до того, щоб умовні рівняння мали найбільш простий вигляд і містили як можна менше загальних вимірів,що приводить до зменшення обчислювальних похибок при розв’язанні нормальних рівнянь.

7. Координатні умовні рівняння.

Вони виникають в мережах тріангуляції між окремими s - ізольованими групами вихідних пунктів. На рис.9.10 наведено приклад мережі тріангуляції, яка має базисні сис-

теми із пунктів А, В, С та Д, Е. Як виняток, за базисну систему приймають один вихідний пункт F, коли він не має іншого суміжного вихідного пункту (на схемі відсутній).

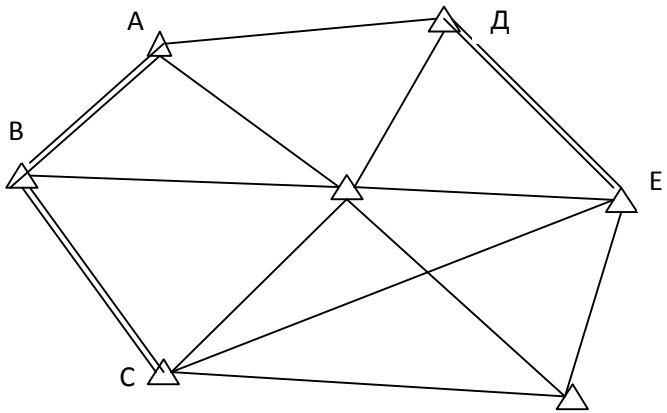


Рис. 9.10. Схема мережі тріангуляції.

Таким чином, на рис. 9.10 маємо дві координатні системи. Число координатних умовних рівнянь визначається за формулою $N_k = 2\ (S - 1)$, (9.59)
де S – число координатних систем в мережі тріангуляції.

Координатні умовні рівняння зв'язку складаються по осях абсцис та ординат при умові, що за вимірюваними кутами трикутників від координат однієї з точок координатної системи шляхом обчислень отримують координати будь – якого вихідного пункту другої координатної системи. При чому їх складають аналогічно умовам дирекційних кутів та базисних рівнянь за ходовою лінією, що забезпечує мінімальну кількість обчислень і найпростіші координатні умовні рівняння поправок.

Координатне умовне рівняння зв'язку між двома базисними системами виражають за формулами:

$$\left.\begin{aligned} X_n + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - X_k = W_x; \\ Y_n + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - Y_k = W_y, \end{aligned}\right\} \qquad (9.60)$$

де X_n, Y_n, X_k, Y_k - координати вихідних початкового і кінцевого пунктів тріангуляції; n – кількість сторін в ходовій лінії. Прирости координат сторін ходової лінії Δx_i, Δy_i визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_i = d_i \cos \alpha_i ; \\ \Delta y_i = d_i \sin \alpha_i, \end{aligned}\right\} \qquad (9.61)$$

де d_i- довжини сторін ходової лінії; α_i- дирекціоні кути сторін ходової лінії.

Після диференціювання (9.61) визначимо поправки до приростів координат за формулами

$$\left.\begin{aligned} v_{\Delta x_i} = \cos \alpha_i \, v_{d_i} - d_i \sin \alpha_i \, v_{\alpha_i}; \\ v_{\Delta y_i} = \sin \alpha_i \, v_{d_i} + d_i \cos \alpha_i \, v_{\alpha_i} \end{aligned}\right\} \qquad (9.62)$$

З рахуванням формул (9.61) і приведення поправок дирекційних кутів v_{α_i} до лінійного виду отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} v_{\Delta x_i} = \cos \alpha_i \, v_{d_i} - \Delta y_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''}; \\ v_{\Delta y_i} = \sin \alpha_i \, v_{d_i} + \Delta x_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''} \end{aligned}\right\} \qquad (9.63)$$

де v_{d_i} - поправки до сторін ходової лінії. Координатні умовні рівняння поправок згідно з формулою (9.60) будуть

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} v_{\Delta x} + W_x &= 0;\\ \sum_{i=1}^{n} v_{\Delta y} + W_y &= 0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (9.64)$$

або

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\alpha_i\, v_{d_i} - \Delta y_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''}\right) + W_x &= 0;\\ \sum_{i=1}^{n}\left(\sin\alpha_i\, v_{d_i} + \Delta x_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''}\right) + W_y &= 0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (9.65)$$

Координатні умовні рівняння поправок мають більш складний вигляд у порівнянні з базисними та полюсними. Тому при вирівнюванні слід для їх визначення користуватися довідниками з курсу “ Вища геодезія “ [17].

9.4. ПОЛІГОНОМЕТРИЧНІ МЕРЕЖІ.

В мережах полігонометрії виникають умови дирекційних кутів та координат.

Частіше всього їх складають для окремих ходів, які входять в мережу. Якщо маємо окремий розімкнений хід (рис.9.11), то в ньому виникає умова дирекційних кутів, рівняння зв’язку якої визначають за формулою .

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i - 180^\circ \cdot k - (\alpha_k - \alpha_п) = W_\beta. \qquad (9.66)$$

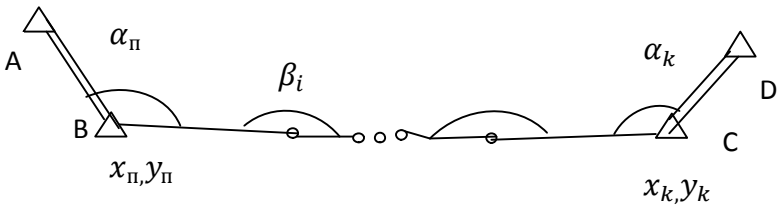


Рис.9.11.

Умовне рівняння поправок визначається за формулою

$$\sum_{i=1}^{n} v_{\beta_i} + W_\beta = 0, \qquad (9.67)$$

де v_{β_i} – поправки до виміряних кутів.

Координатні умовні рівняння зв'язку для окремого розімкненого полігонометричного ходу будуть

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - (X_k - X_n) = W_x; \\ &\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - (Y_k - Y_n) = W_y, \end{aligned}\right\} \qquad (9.68)$$

Відповідно умовні координатні рівняння поправок визначаються за формулами (9.65).

В складних мережах полігонометрії з вузловими точками виникають три умовні рівняння для кожного ходу. При цьому визначають наближені значення вузлових дирекційних напрямків α_i' та наближені значення вузлових точок X_i' та $У_i'$ Рівняння зв'язку для дирекційних кутів складається за формулою:
- при лівих виміряних кутах

$$W_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_л - 180° \cdot k + (\alpha_п - \alpha_k), \qquad (9.69)$$

- при правих виміряних кутах

$$W_\beta = -\sum_{i=1}^{n} \beta_п + 180° \cdot k + (\alpha_k - \alpha_п), \qquad (9.70)$$

де k = n -1, n – число виміряних кутів.

Відповідно умовні рівняння дирекційних кутів визначаються за формулами:
- при лівих кутах $\delta\alpha_п - \delta\alpha_k + \sum_{i=1}^{n} v_{\beta_{iл}} + W_\beta = 0$ (9.71)

- при правих кутах

$$\delta\alpha_{\text{п}} + \delta\alpha_k - \sum_{i=1}^{n} v_{\beta_{i\text{п}}} + W_\beta = 0, \qquad (9.72)$$

де $\delta\alpha_{\text{п}}$ і $\delta\alpha_k$- поправки до наближених значень дирекційних кутів вузлових напрямків.

Якщо $\alpha_{\text{п}}$ і α_k або один з них безпомилкові, то поправки $\delta\alpha_{\text{п}}$ і $\delta\alpha_k$ дорівнюють нулеві і в рівняннях (9.71) і (9.72) вони відсутні.

Умовні координатні рівняння зв'язку визначаються за формулами $W_x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - (X_k - X_n)$;

$$W_y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - (Y_k - Y_n), \qquad (9.73)$$

де - Y_n, X_n, X_k, Y_k – координати початкових і кінцевих вихідних і вузлових точок полігонометричного ходу.

Координатні умовні рівняння поправок визначаються за формулами

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i\, v_{\alpha_i} + \frac{1}{\rho''}\sum_{i=1}^{n} \eta_i\, v_{\beta_i} + \frac{1}{\rho''}\eta_n \delta\alpha_n - \frac{1}{\rho''}\eta_k \delta\alpha_k + \\ &+ \delta x_n - \delta x_k + \frac{1}{\rho''}\eta_k W_\beta + W_x = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\, v_{\alpha_i} - \frac{1}{\rho''}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, v_{\beta_i} - \frac{1}{\rho''}\xi_n \delta\alpha_n + \frac{1}{\rho''}\xi_k \delta\alpha_k + \\ &+ \delta y_n - \delta y_k + \frac{1}{\rho''}\xi_k W_\beta + W_y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.74)$$

де δx_n, δx_k, δy_n, δy_k- поправки до координат початкових і кінцевих пунктів;

$$\xi_{\text{і}} = X_{\text{і}} - X_{\text{ц}}; \quad \eta_i = Y_{\text{і}} - Y_{\text{ц}} \text{ - центральні координати.} \qquad (9.75)$$

Координати центру тяжіння ходу при рівноточно виміряних кутах визначаються за формулами

$$X_{ц} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \qquad Y_{ц} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (9.76)$$

Для дирекційних кутів вихідних сторін та координат вихідних пунктів поправки $\delta\alpha$, δx, δy дорівнюють нулю, тому в формулах (9.74) будуть відсутні члени, які їх містять. Системі умовних рівнянь (9.74) при безпомилкових $\alpha_{п}$, α_k і координатах кінцевих точок відповідає система нормальних рівнянь .

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n'}{P_\beta}\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{W_\beta} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{A}\boldsymbol{k_2} + \mathbf{C}\,\boldsymbol{k_3} + \overline{\boldsymbol{W_x}} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{C}\boldsymbol{k_2} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{k_3} + \overline{\boldsymbol{W_y}} = \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.76)$$

де коефіцієнти системи (9.76) .

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \left[\frac{\cos^2\alpha}{P_s}\right] + \frac{1}{P_\beta\,\rho^2}[\boldsymbol{\eta}^2], \\ &\mathbf{B} = \left[\frac{\sin^2\alpha}{P_s}\right] + \frac{1}{P_\beta\,\rho^2}[\boldsymbol{\xi}^2], \\ &\mathbf{C} = \left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{P_s}\right] - \frac{1}{P_\beta\,\rho^2}[\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{\xi}], \end{aligned}\right\} \qquad (9.77)$$

і нев'язки системи (9.76) дорівнюють .

$$\overline{W_x} = W_x + \frac{1}{\rho}\eta_k W_\beta, \qquad \overline{W_y} = W_y - \frac{1}{\rho}\xi_k W_\beta. \qquad (9.78)$$

Як видно з формул (9.78),перше нормальне рівняння не пов'язано з другим і третім через властивості центральних координат $[\eta] = [\xi] = 0$. .

9.5. МЕРЕЖІ ТРИЛАТЕРАЦІЇ.

Мережі трилатерації вирівнюють у більшості на ЕОМ параметричним способом через те, що умовні рівняння поправок в корелатному способі мають більш складний вид але в той же час число нормальних рівнянь в корелатному способі значно менше.

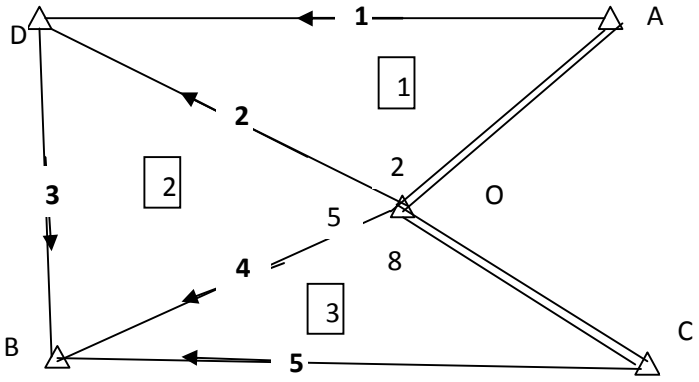


Рис. 5.2. Схема мережі трилатерації

Розглянемо, як вони складаються на прикладі простих побудованій. В мережі трилатерації (Рис.5.2) виникає одне умовне рівняння. Воно виражає вимогу .

$$v_2 + v_5 + v_8 + W = 0,$$

причому поправки кутів необхідно виразити через поправки виміряних сторін в кожному трикутнику. Це роблять за пропозицією угорського вченого – геодезиста **А. Тарці – Хорноха** на основі формул: .

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}\ , \qquad (9.79)$$

де $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ і проти сторони- **a** лежить кут $\boldsymbol{\alpha}$.

Логарифмуючи формулу (9.76), отримаємо

$$2\ \ln\cos\frac{\alpha}{2} = \ln s + \ln(s - a) - \ln b - \ln c,$$ а

після наступного диференціювання одержимо $-\,tg\frac{\alpha}{2}\frac{v_\alpha}{\rho''} =$

$$= \frac{\Delta_s - \Delta_{s-a}}{2}v_a + \frac{\Delta_s + \Delta_{s-a} - 2\Delta_b}{2}v_b + \frac{\Delta_s + \Delta_{s-a} - 2\Delta_c}{2}v_c,$$

де $\Delta_s = \frac{1}{s}$, $\Delta_{s-a} = \frac{1}{s-a}$, $\Delta_b = \frac{1}{b}$, $\Delta_c = \frac{1}{c}$.

Ці величини являють собою зміну натуральних логарифмів сторін зі зміною на одиницю їх довжини. Справді, можна написати . .

$$\ln(a + \Delta_a) = \ln a + \frac{1}{a}\Delta_a, \qquad .$$

звідки слідує $\ln(a + 1) - \ln a = \frac{1}{a}$. .

Ці величини можна найти за допомогою таблиці логарифмів або мікрокалькулятора. Позначимо $-\,tg\frac{\alpha}{2} = \Delta$ (це є зміна функції $\cos\frac{\alpha}{2}$ зі зміною кута $\frac{\alpha}{2}$ на $1''$) і отримаємо

Приклад вирівнювання мережі трилатерації. Таблиця 9.1.

№ три - кутників	№ сторін	Назва сторін	Позна – чення	Довжини сторін	Значення обчислених величин
	1	a		1832,120	-

1	OA 2	b c		1813,119 1526,358	$1/b$ = 0,552·10^{-3} $1/c$ = 0,655·10^{-3}
			s s - a	2585,799 753,678	$1/s$ = 0,387·10^{-3} $1/(s-a)$ =1,326·10^{-3}
			ccos $(\alpha/2)$ $\alpha/2$ 0,5(ρ/Δ)	0,839168 32°56′51,4″ -159·10^{-3}	η_a = 150 - η_c= - 64
2	3 2 4	a b c		1524,054 1526,358 1737,975	- $1/b$ = 0,655·10^{-3} $1/c$ = 0,575·10^{-3}
			s s – a ccos $(\alpha/2)$ $\alpha/2$ 0,5(ρ/Δ)	2394,194 870,140 0,886184 27°36′08,5″ -197·10^{-3}	$1/s$ = 0,418·10^{-3} $1/(s-a)$ =1,149·10^{-3} η_a = 144 η_b = - 51 η_c = - 82
3	5 4 OC	a b c	s s - a	3046,229 1737,975 2135,504	- $1/b$ = 0,575·10^{-3} $1/c$ = 0,468·10^{-3}
			s s – a ccos $(\alpha/2)$ $\alpha/2$ 0,5(ρ/Δ)	3459,854 413,625 0,620955 51°36′50,7″ - 82·10^{-3}	$1/s$ = 0,289·10^{-3} $1/(s-a)$ =2,418·10^{-3} η_a = 174 η_b = - 127 -

Обчислення поправок v_i до довжин сторін. Таблиця 9.2.

№ три - кутника	Коефіцієнти η_i				
	1	2	3	4	5
1 2 3	150	-64 -51	144	-82 -127	174
Σ	150	-115	144	-209	174
v_i мм	-1	+1	-1	+1	-1

$$v_\alpha = \frac{\rho''}{2\Delta}(\Delta_s - \Delta_{s-a})\, v_a + \frac{\rho''}{2\Delta}(\Delta_s + \Delta_{s-a} - 2\Delta_b)\, v_b + \qquad .$$

$+ \frac{\rho''}{2\Delta}(\Delta_s + \Delta_{s-a} - 2\Delta_c)\, v_c = \eta_a v_a + \eta_b v_b + \eta_c v_c.$ (9.80)

На мікрокалькуляторі обчислення зручно виконувати за допомогою табл. 9.1 і 9.2, які складені для трикутників мережі (рис. 5.2). Зауважимо, що коефіцієнти для вихідних сторін АО і ОС не обчислюються .

Таким чином, отримали умовне рівняння .

$$\Sigma\, \eta_i v_i + w = 0 \qquad (9.81)$$

або 1,50 v_1 -1,15 v_2 +1,44 v_3 -2,09 v_4 +1,75 v_5 +w $\cdot 10^{-2}$=0,

де нев'язка w = $\beta_2 + \beta_5 + \beta_8$ - ь.АОВ = 0,7″. .

Цьому умовному рівнянню відповідає наступне нормальне рівняння $[aa]$k + w $\cdot$ 10^{-2}= 0

. або 13,07 k + 0,7″ $\cdot 10^{-2}$= 0, звідки k = - 0,054$\cdot 10^{-2}$.

Поправки $v_i = \eta_i$k $\cdot 10^{-2}$ в мм наведені в табл.9.2.

. Для центральній системі трилатерації (рис.9.12) умовне рівняння складається також для кожного кута, тобто $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ +w = 0. .

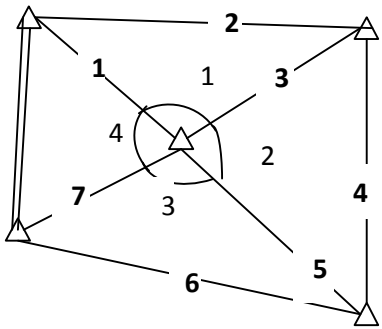


Рис. 9.12

В системі з діагоналями,які перетинаються (рис.9.13) умовне рівняння має вид $v_1 + v_2 - v_3$ +w = 0, яке можна скласти для будь – якої вершини.

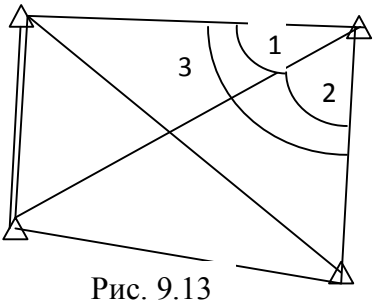


Рис. 9.13

ГЛАВА 10. РОЗВ′ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

10.1. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ КУТІВ , ВИМІРЯНИХ НА ГЕОДЕЗИЧНОМУ ПУНКТІ.

Виконати вирівнювання корелатним способом горизонтальних кутів, які виміряні на геодезичному пункті способом в усіх комбінаціях та обчислити середні квадратичні похибки виміряного та вирівняного значень шостого кута. Умова задачи прийнята з роботи [4].

Виміряні та вирівняні кути. Таблиця 10.1

№ кута	Позначення	Виміряні кути, x_i	Вирівняні кути x_i'
1	А ОВ	38°31′15,5″	38°31′15,6″
2	В ОС	46 07 30,0	46 07 29,9
3	С ОД	17 43 46,5	17 43 46,9
4	А ОС	84 38 45,0	84 38 45,5
5	В ОД	63 51 16,5	63 51 16,8
6	А ОД	102 22 33,0	102 22 32,4

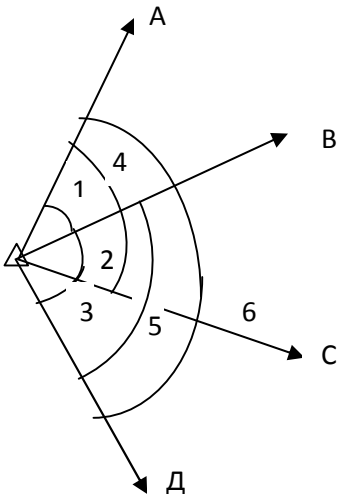


Рис.10.1. Схема вимірювання кутів.

Розв'язання. Геометричні зв'язки, які виникають в геометричному побудуванні (рис.10.1) приводить до наступних умовних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 - v_6 + W_1 &= 0; \\ v_1 + v_2 - v_4 + W_2 &= 0; \\ v_2 + v_3 - v_5 + W_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Нев'язки W_i дорівнюють

$$W_1 = x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = -1{,}0''; \qquad .$$

$$W_2 = x_1 + x_2 - x_4 = +0{,}5''; \qquad .$$

$$W_3 = x_2 + x_3 - x_5 = 0. \qquad (10.2)$$

Оціночна функція $F' = x_6' = x_6 + v_6$ або

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 + v_1 + v_2 + v_3 . \qquad (10.3)$$

При находженні $\frac{1}{P_F'}$ коефіцієнти $f_1 = f_2 = f_3 = 1$.

Далі складемо таблицю коефіцієнтів умовних і нормальних рівнянь і виконаємо їх розв'язання в табл.10.2, 10,3 і 10.4.

Таблиця 10.2. Поправки $v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3$.

№ виміру	a_i, k_1	b_i, k_2	c_i, k_3	f	s	v_i
1	+1	+1		+1	+3	+0,12″
2	+1	+1	+1	+1	+4	-0,13
3	+1		+1	+1	+3	+0,37
4		-1			-1	+0,50
5			-1		-1	+0,25
6	-1				-1	-0,62
w_j k_j	-1,0 +0,62	+0,50 -0,50	0 -0,25	$[vv] = 0,86$ - $[kw] = 0,87$.		

Таблиця 10.3. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	a]	b]	c]	f]	s]	Контроль	w	Σ
[a [b [c	4	2 3	2 1 3	3 2 2	11 8 8	11 8 8	-1,0 +0,5 0	7 6,5 6
[f				3	10	10	Σ = - 0,5	

Таблиця 10.4. Розв'язання нормальних рівнянь.

	k_1	k_2	k_3	w	Σ	Конт-роль1	f	s	Конт-роль 2
-0,250	4,0 -1	2,0 -0,50	2,0 -0,50	-1,0 -0,25	7,0 -1,75	7,0 -1,75	3,0 -0,75	11,0 -2,75	11,0 2,75
-0,500		2,0 -1	0 0	1,0 -0,50	3,0 -1,50	3,0 -1,50	0,5 -0.25	2,5 -1,25	2,5 -1,25
-0,500			2,0 -1	0,5 -0.25	2,5 -1,25	2,5 -1,25	0,5 -0.25	2,5 -1,25	2,5 -1,25
k_j $\overline{k_j}$	0,62 -0,38	-0,50 -1,50	-0,25 -1,25	-0,87	-0,87	$\frac{1}{P'_F}$	0,50	0,50	
	1,00	1,00	1,00	$(k_j - \overline{k_j})$					

Поправки v_i обчислені в табл.10.2, а вирівняні значення кутів наведені в табл.10.1.

Остаточний контроль вирівнювання:

$$\left.\begin{aligned} &x_1' + x_2' + x_3' - x_6' = 0; \\ &x_1' + x_2' - x_4' = 0; \\ &x_2' + x_3' - x_5' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

Середня квадратична похибка:

- виміряного кута $m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{0,86}{3}} = 0,54''$,

- вирівняного кута $m_{x_6'} = m\sqrt{\frac{1}{P_F'}} = 0,54''\sqrt{0,50} = 0,38''$.

10.2. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ ВИМІРЯНИХ КУТІВ МЕРЕЖІ ТРІАНГУЛЯЦІЇ.

Виконати вирівнювання корелатним способом виміряних кутів мережі тріангуляції (задача 5.1, рис.5.1) та оцінку точності вирівняної сторони СД мережі.

Умова задачи прийнята з роботи [4]. Вихідні дані: lg b_1= 3,2584263; lg b_2= 3,3295004; ЬВОД = 224°19′40,5″.

Розв'язання. В цієї мережі виникає r = 9 – 4 = 5 умовних рівнянь, у тому числі:

три умовні рівняння фігур виду

$$\left.\begin{aligned} &v_1 + v_2 + v_3 + W_1 = 0, \\ &v_4 + v_5 + v_6 + W_2 = 0, \\ &v_7 + v_8 + v_9 + W_3 = 0; \end{aligned}\right\}$$

одне рівняння жорсткого кута $v_2 + v_5 + v_8 + W_4 = 0$,
одне базисне рівняння .
$\Delta_1\ v_1 - \Delta_3\ v_3 + \Delta_4\, v_4 - \Delta_6\ v_6 + \Delta_7\ v_7 - \Delta_9\ v_9 + W_5 = 0$.

Обчислення нев'язок умовних рівнянь виконуємо в табл. 10.5; 10.6; 10.7. .

Таблиця 10.5. Нев'язки умовних рівнянь фігур.

№ трикутника	Назва вершин	№ кутів	Виміряні значення	Поправка	Секунди вирівняних кутів.
1	Д О А	1 2 3	64°36′00,9″ 65 53 45,2 49 30 19,3	-2,1″ -2,8 -0,5	58,8″ 42,4 18,8
			180 00 05,4 $\boldsymbol{W_1}$**= + 5,4″**	-5,4	00,0
2	С О Д	4 5 6	55 19 45,2 55 12 15,1 69 27 52,6	+ 2,0 +1,7 +3,4	47,2 16,8 56,0
			179 59 52,9 $\boldsymbol{W_2}$**= - 7,1″**	+7,1	00,0
3	В О С	7 8 9	33 44 19,4 103 13 43,4 43 02 01,7	-2,8 -2,1 +0,4	16,6 41,3 02,1
			180 00 04,5 $\boldsymbol{W_3}$**= +4,5″**	-4,5	00,0

Таблиця 10.6. Нев'язка рівняння жорсткого кута.

№ кутів	Виміряні кути	Вирівняні кути
2 5 8	65° 53′ 45,2″ 55 12 15,1 103 13 43,4	65° 53′ 42,4″ 55 12 15,1 103 13 41,3
Вихідний кут	224 19 43,7 224 19 40,5	224 19 40,5
Нев'язка	$\boldsymbol{W_4}$**= +3,2 ″**	W_4'= 0

Таблиця 10.7. Нев'язка базисного рівняння .

№ кутів	Виміряні значення	lg sin	Δ_i	№ кутів	Виміряні значення	lg sin	Δ_i
1 4 7	64°36′00,9″ 55 19 45,2 33 44 19,4	9,9558499 9,9151012 9,7446110	+10,0 +14,6 +31,5	3 6 9	49°30′19,3″ 69 27 52,6 43 02 01,7	9,8810802 9,9714873 9,8340579	+18,0 +7,9 +22,6
	lg b_1	3,3295004	**W_5=10,8**		lg b_2	3,2584263	
	Сума lg	2,9450625			Сума lg	2,9450517	

Умова базисів у лінійному виді (коефіцієнти і вільний член виражені в одиницях 6 – го знаку логарифма). .

1,00 v_1 -1,80 v_3 +1,46 v_4 -0,79 v_6 +3,15 v_7 -2,26v_9 +10,8=0.

При складанні базисного умовного рівняння напрям обходу обрано від базису b_2 до базису b_1.

Таблиця 10.8. Коефіцієнти умовних рівнянь і поправки $v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + e_i k_5$.

№ кутів	a_1	b_1	c_i	d_1	e_1	f_1	s	v_1
1 2 3	1 1 1			 1 	1,00 -1,80	-1,00 1,80	1 2 1	-2,16″ -2,76 -0,48
4 5 6		1 1 1		 1 	1,46 -0,79	-1,46 1,46 	1 3,46 0,21	2,03 1,70 3,38
7 8 9			1 1 1	 1 	3,15 -2,26		4,15 2,00 -1,26	-2,80 -2,13 0,43
k_j $[w_j k]$	-1,557 -8,408	2,903 -20,61	-0,920 -4,140	-1,208 -3,866	-0,598 -6,458		$[vv]$=	43,51

У зв'язку з тим, що вагова функція і базисне умовне рівняння однакові за виглядом, то вагова функція для сто-

рони складається точно так же і за тими ж правилами,що і базисне умовне рівняння, з тією лише різницею, що нев'язка не обчислюється, бо величина f_0 не робить впливу на оцінку точності. .

Для нашого прикладу виберемо напрям підходу до сторони Д С від базису b_1 і тоді отримуємо вагову функцію F = f_0 - Δ_1 v_1 + Δ_3 v_3 - Δ_4 v_4 + Δ_5 v_5 , .або в чисельному виді

F = f_0 -1,00 v_1 +1,80 v_3 -1,46 v_4 - 1,46 v_5. .

. Далі складемо таблицю коефіцієнтів умовних і нормальних рівнянь (табл. 10.8 і табл. 9). .

Контрольні величини: .

Σ_1= $[as]$ - $[af]$ + W_1 = 8,60; .

Σ_2= $[bs]$ - $[bf]$ + W_2 = -2,43; .

Σ_3= $[cs]$ - $[cf]$ + W_3 = 9,39; .

Σ_4= $[ds]$ - $[df]$ + W_4= 9,20; .

Σ_5= $[es]$ - $[ef]$ + W_4= 33,586. .

Таблиця 10.9. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	a]	b]	c]	d]	e]	f]	s]	Контроль
[a	3	0	0	1	-0,8	+0,8	4	4
[b		3	0	1	0,67	0	4,67	4,67
[c			3	1	0,89	0	4,89	4,89
[d				3	0	1,46	7,46	7,46
[e					22,03	-6, 37	16,414	16,414
[f						8,503	4,391	4,391

Розв'язання нормальних рівнянь за схемою Гаусса дано в табл. 10.10. .

Таблиця 10.10. Розв’язання нормальних рівнянь

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	w	Σ	f	s	Конт-роль.
3,00 -1 (0,3333)	0 0	0 0	1,00 -0,333	-0,80 0,267	5,40 -1,80	8,60 -2,867	0,80 -0,267	4,00 -1,333	4,00 -1,333
(0,3333)	3,00 -1	0 0	1,00 -0,333	0,67 -0,223	-7,10 2,267	-2,43 0,810	0 0	4,67 -1,557	4,67 -1,557
(0,3333)		3,00 -1	1,00 -0,333	0,89 -0,297	4,50 -1,50	9,39 -3,13	0 0	4,89 -1,63	4,89 -1,63
(4998)			2,00 -1	-0,253 0,126	2,267 -1,133	4,014 -2,006	1,193 -0,596	2,940 -1,469	2,941 -1,469
(0,0468)				21,367 -1	12,777 -0,598	34,144 -1,598	-6,008 0,2812	15,359 -0,719	15,359 -0,719
k_j -1,56 $\overline{k_j}$ -2,56	2,90 1,90	-0,92 -1,92	-1,21 -2,21	-0,598 -1,598	-43,48 $[vv]$	-43,48 $[vv]$	5,89= $\frac{1}{P_{F'}}$	5,89 $\frac{1}{P_{F'}}$	
1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	$k_j - \overline{k_j}$				

Таблиця 10.11. Контрольне обчислення нев’язки w_5' .

№ кутів	Виміряні значення	lg sin	№ кутів	Виміряні зна-чення	lg sin
1 4 7	64°35′58,5″ 55 19 47,2 33 44 16,6	9,9558478 9,9151041 9,7446022	3 6 9	49°30′18,8″ 69 27 56,0 43 02 02,1	9,8810793 9,9714899 9,8340589
	lg b_1	3,3295004	$w_5' = 0$	lg b_2	3,2584263
	Сума lg	2,9450545		Сума lg	2,9450544

Обчислення поправок виконано в табл.10,8 а вирівняні кути в табл.10,5 за формулою $x_i' = x_i + v_1$.

. Остаточно контролюють обчислення рівності нулеві нев’язок умовних рівнянь, які обчислені за вирівняними кутами. Ця умова для перших чотирьох умовних рівнянь перевіряється в табл.10,5 і 10,6. .

Для перевірки знову складають табл.10.11 і отримують $w_5' = 0$, тобто всі обчислення виконані правильно.

Оцінка точності: а) середня квадратична похибка виміряного кута $m = \sqrt{[vv]/r} = \sqrt{43{,}48/5} = 2{,}9''$;

б) середня квадратична похибка вирівняної функції .

$m_{F'} = m_{lgS} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F'}}} = 2{,}9\sqrt{5{,}89} = 7{,}1$ (одиниць 6 – го знаку логарифму). .

Відносна похибка визначення сторони СД .

$\frac{m_S}{S} = \frac{m_{lgS}}{M} = \frac{7{,}1}{0{,}43 \cdot 10^6} = \frac{1}{61000}$ . .

При кінці зробимо складання базисного умовного рівняння в цьому прикладі, без використання логарифмів.

Розв'язання. Згідно формули (9.48) це рівняння має вигляд .

$\text{ctg}\,\beta_1 v_1 - \text{ctg}\,\beta_3 v_3 + \text{ctg}\,\beta_4 v_4 - \text{ctg}\,\beta_6 v_6 + \text{ctg}\,\beta_7 v_7 - \text{ctg}\,\beta_9 v_9 + \overline{w} = 0$, де $\overline{w} = W\frac{\rho}{M} = 1{,}08 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}749 \cdot 10^5 = 5{,}129$.

Обчислення розташуємо в таблиці, в якої замість Δ_i слід записувати величини $\text{ctg}\,\beta_i$: .

Номер кутів	1	4	7	3	6	9
$\text{ctg}\,\beta_1$	0,475	0,692	1,497	0,854	0,375	1,07

Умовне рівняння буде .

$0{,}475v_1 - 0{,}854v_3 + 0{,}692v_4 - 0{,}375v_6 + 1{,}497v_7 - 1{,}071v_9 + 5{,}129 = 0$.

Величина $\Delta_i = \frac{M}{\rho}\,\text{ctg}\,\beta_i = 2{,}1055\,\text{ctg}\,\beta_i \cdot 10^{-6}$ і її можна використати для контролю складання базисного рівняння.

10.3. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ КУТІВ ЦЕНТРАЛЬНОЇ СИСТЕМИ.

Умова задачи прийнята з роботи [4]. Виконати вирівнювання кутів в центральній системі (рис.10.2) і оцінити точність результатів вирівнювання. Значення вимірюваних кутів в трикутниках центральної системи дані в табл.10.12. Логарифм вихідної сторони АВ дорівнює lg S = lg AB = 4,011060.

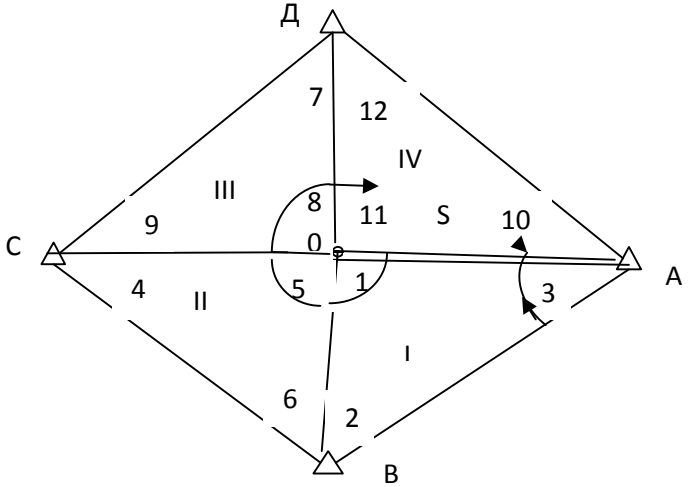


Рис. 10.2. Схема виміряних кутів в центральної системі.

В цієї системі 6 геометричних умов,з них 4 умови фігур (трикутників), 1 умова горизонту, 1 умова полюсу. Умовні рівняння мають вид:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + W_1 = 0, \\ v_4 + v_5 + v_6 + W_2 = 0, \\ v_7 + v_8 + v_9 + W_3 = 0; \\ v_{10} + v_{11} + v_{12} + W_4 = 0, \\ v_1 + v_5 + v_8 + v_{11} + W_5 = 0, \\ \Delta_2 v_2 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + \Delta_{10} v_{10} - \Delta_{12} v_{12} + W_6 = 0. \end{array}\right\}$$

Таблиця 10.12

№ трикутників	№ кутів	Виміряні кути	Поправки	Вирівняні кути
1	1 2 3	147°40′06,2″ 12 48 13,6 19 31 44,9	-0,3 -6,4 +1,9	147°40′06,0″ 12 48 07,2 19 31 46,8
		180 00 04,7 W_1= + 4,7″	-4,7	180 00 00,0
2	4 5 6	73 43 55,2 58 36 48,8 47 39 15,8	-0,8 +0,5 +0,5	73 43 54,4 58 36 49,3 47 39 16,3
		179 59 59,8 W_2= - 0,2″	+0,2	180 00 00,0
3	7 8 9	67 23 18,7 67 16 22,0 45 20 20,7	-1,5 0 +0,1	67 23 17,2 67 16 22,0 45 20 20,8
		180 00 01,4 W_3= + 1,4″	-1,4	180 00 00,0
4	10 11 12	43 24 13,4 86 26 43,0 50 09 06,5	-2,4 -0,2 -0,3	43 24 11,0 86 26 42,8 50 09 06,2
		180 00 02,9 W_4= + 2,9″	-2,9	180 00 00,0

Нев'язки трикутників $w_j = \sum_{i \epsilon j} \beta_i$ - 180°, які обчислені в табл.10.12, дорівнюють: .

. **W_1= + 4,7″; W_2= - 0,2″; W_3= + 1,4″; W_4= + 2,9″.**

Вільний член умовного рівняння горизонту (кути при точці О) дорівнюють: .

№ кутів	Виміряні кути	.
1	147°40′06,2″	.
5	58 36 48,8	.
8	67 16 22,0	.
11	86 26 43,0	.
Σ	360 00 00,0	W_5= **0**.

Значення вільного члену W_6 і коефіцієнтів при поправках v_i о тримані в табл. 10.13 при використанні семизначних логарифмів. .

Таблиця 10.13

№ кутів	Виміряні значення	lg sin	Δ_i	№ кутів	Виміряні значення	lg sin	Δ_i
2	12°48′13,6″	9,3455948	+92,6	3	19°31′44,9″	9,5241185	+59,3
4	73 43 55,2	9,9822540	+6,1	6	47 39 15,8	9,8687003	+19,2
7	67 23 18,7	9,9652644	+8,7	9	45 20 20,7	9,8520401	+20,8
10	43 24 13,4	9,8370419	+22,3	12	50 09 06,5	9,8852169	+17,5
	$\sum_1 lg$	9,1301551	$\boldsymbol{W_6}$ **= + 793**		Сума $\sum_2 lg$	9,1300758	

$\boldsymbol{W_6}$= $\sum_1 lg$- $\sum_2 lg$ = + **793** одиниць 7 – го знаку логарифма.

Коефіцієнти і вільний член полюсного рівняння виразимо одиницях п’ятого знаку логарифму. .

Остаточно умовні рівняння отримують вид .

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 + v_2 + v_3 + 4{,}7 = 0,\\
&v_4 + v_5 + v_6 - 0{,}2 = 0,\\
&v_7 + v_8 + v_9 + 1{,}4 = 0;\\
&v_{10} + v_{11} + v_{12} + 2{,}9 = 0,\\
&v_1 + v_5 + v_8 + v_{11} + 0 = 0,\\
&0{,}926v_2 - 0{,}593v_3 + 0{,}061v_4 - 0{,}192v_6 +\\
&+ 0{,}087v_7 - 0{,}208v_9 + 0{,}223v_{10} - 0{,}175v_{12} + 7{,}93 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Центральна система, яка зображена на рис.10.2 опирається на вихідну сторону АВ = S. Після вирівнювання кутів цієї системи можна обчислити довжини усіх сторін трикутників.

Довжини сторін є функціями вирівняних кутів і вихідної сторони АВ. .

Нехай треба визначити відносну похибку сторони АВ=S. Вибравши напрям підходу до сторони ОА, який показано на рис.10.2, отримано функцію .

$$F = F_0 - \Delta_1 v_1 + \Delta_2 v_2. \quad .$$

З урахуванням того, що зміна логарифму синуса першого кута на 1″ буде дорівнювати + 3,32 одиниці 6–го знаку логарифму, бо величина кута більше 90° (147°40′06,2″), функція матиме вид .

$$F = \Delta_1 v_1 + \Delta_2 v_2 + F_0 .$$

Таблиця 10.14 Коефіцієнти умовних рівнянь та поправки $v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + e_i k_5 + f_i k_6$

№ кутів	a	b	c	d	e	f	F	s	v
1	1				1	-	0,332	2,332	-0,28
2	1					0,926	0,926	2,852	-6,40
3	1					-0,		0,407	1,94
4		1				593		1,061	-0,85
5		1			1	0,061		2,000	0,50
6		1				-		0,808	0,55
7			1			-0,192		1,087	-1,51
8			1		1	0,087		2,000	-0,02
9			1			-		0,792	0,13
10				1		-0,208		1,223	-2,45
11				1	1	0,223		2,000	-0,20
12				1		-		0,825	-0,25
						-0,			
						175			
k	-1,29	-0,51	-1,03	-1,22	1,01	-5,527		$[vv]$=	54,61
w	4,7	-0,2	1,4	2,9	0	7,93		-$[kw]$=	54,75

Далі складемо табл. 10.14 і 10.15 коефіцієнтів умовних і нормальних рівнянь.

Таблиця 10.15. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

a]	b]	c]	d]	e]	f]	F]	s	Контр.	w	Σ
3				1	0,333	1,258	5,591	5,591	4,7	9,033
	3			1	-0,131		3,869	3,869	-0,2	3,669
		3		1	-0,121		3,879	3,879	1,4	5,279
			3	1	0,048		4,048	4,048	2,9	6,949
				4	0	0,332	8,332	8,332	0	8,000
					1,382	0,857	2,368	2,368	7,93	9,441
						0,967	3,414	3,414		

Нормальні рівняння мають вид: .

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & 3k_1 + 0\,k_2 + 0\,k_3 + 0\,k_4 + k_5 + 0{,}333\,k_6 + 4.70 = 0, \\
2. & 3\,k_2 + 0\,k_3 + 0\,k_4 + k_5 - 0{,}131\,k_6 - 0{,}20 = 0, \\
3. & 3\,k_3 + 0\,k_4 + k_5 - 0{,}121\,k_6 + 1{,}40 = 0, \\
4. & 3\,k_4 + k_5 + 0{,}048\,k_6 + 2{,}90 = 0, \\
5. & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 0 \cdot k_6 + 0 = 0, \\
6. & 0{,}333k_1 - 0{,}131\,k_2 - 0{,}121k_3 + 0{,}048k_4 + 0\,k_5 + 1{,}382k_6 + 7.93 = 0.
\end{array}\right\}$$

Таблиця 10.16. Розв'язання нормальних рівнянь.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w	Σ	Контр.	F	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3 -1	0	0	0	1 -0,33	0.333 -0.111	4,70 -1,567	9,033 -3,011	9,033 -3,011	1,258 -0,419	5,591 -1,864
	3 -1	0	0	1 -0,33	-0,131 0,0437	-0,20 0,0667	3,669 -1,223	3,669 -1,223	0 0	3,869-- -1,290
		3 -1	0	1 -0,33	-1,21 0,0403	1,40 -0,467	5,279 -1,760	5,279 -1,760	0 0	3,879 -1,293
0,3333			3 -1	1 -0,33	0,048 -0,016	2,90 -0,967	6,948 -23,16	6,948 -23,16	0 0	4,048 -1,349
0,37481				2,67 -1	-0,043 0,0161	-2,934 1,0997	-0,309 0,1158	-0,309 0,1158	-0,087 0,0326	2,537- 0,9509
0,75075					1,33 -1	7,362 -5,527	8,694 -6,527	8,694 -6,527	0,716-- -0,537	2,048 -1,537
$\boldsymbol{k_j}$, $\overline{\boldsymbol{k_j}}$ та контроль($\boldsymbol{k_j}$ - $\overline{\boldsymbol{k_j}}$,)										
-1,29 -2,29	-0,51 -1,51	-1,03 -2,03	-1,22 -2,21	1,01 0,01	-5,53 -6,53	-54,75	-54,75 -[vv]	$\frac{1}{P_{F'}}$	0,053	0,054
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00					

Розв'язання нормальних рівнянь корелат виконано за схемою Гаусса. Множники 0,3333 однакові для першого – четвертого рядків. Стовпець12 - "контроль2"не приведено, тому треба виконати самостійно. Поправки наведені в табл.10.14.

Остаточний контроль – обчислення нев'язки полюсного умовного рівняння за вирівняними кутами W'_6.

Таблиця 10.17

№ кутів	Виміряні значення	lg sin	№ кутів	Виміряні значення	lg sin
2 4 7 10	12°48′ 07,2″ 73 43 54,4 67 23 17,2 43 24 11,0	9,3455355 9,9822535 9,9652631 9,8370365	3 6 9 12	19°31′46,8″ 47 39 16,3 45 20 20,8 50 09 06,2	9,5241297 9,8687013 9,8520403 9,8852164
	$\sum_1 lg$	9,130088	W'_6=0	Сума $\sum_2 lg$	9,130088

Нев'язка склала: $\sum_1{}' - \sum_2{}' = W'_6 = 0$. .

Оцінка точності. .

а) середня квадратична похибка вимірювання одного кута m = $\sqrt{[vv]/r} = \sqrt{54{,}56/6} = 3{,}0''$;

.б) точність визначення середньої квадратичної похибки $m_m \approx m/\sqrt{2r} = 3{,}0/\sqrt{12} = 0{,}87''$;

.в) середня квадратична похибка логарифму сторони S=

ОА m_{lgS} = m $\sqrt{1/P_{F'}} = 3{,}0\sqrt{0{,}053} = 0{,}69$; .

г) точність визначення похибки m_{lgS}

. $m_{m_{lgS}} = m_m\sqrt{1/P_{F'}} = 0{,}87\sqrt{0{,}053} = 0{,}20$; .

д) відносна похибка визначення сторони S= ОА .

$\frac{m_S}{S} = \frac{m_{lgS}}{M} 10^{-5} = \frac{0,69}{0,434} 10^{-5} = \frac{1}{63000}$;

.е) точність визначення відносної похибки .

$$\frac{m_{mS}}{S} = \frac{m_{mlgS}}{S} = \frac{1}{217000} .$$.

10.4. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ КУТІВ ГЕОДЕЗИЧНОГО ЧОТИРИКУТНИКА.

Вирівняти корелатним способом кути в геодезичному чотирикутнику (рис.10.3) і оцінити точність визначення діагоналі ВД, приймаючи другу діагональ АС за безпомилковою. Умова задачи прийнята з роботи [4].

. В цьому геодезичному побудуванні виникає чотири умовні рівняння, з яких 3 рівняння фігур і одне рівняння полюсу, а саме:

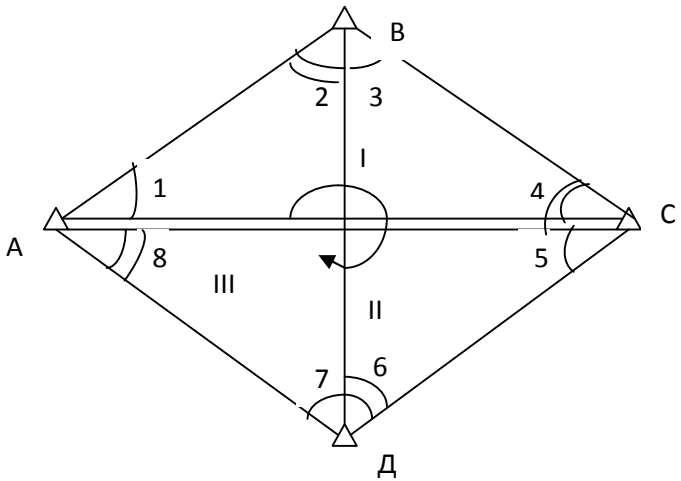


Рис. 10.3. Схема геодезичного чотирикутника. .

- 3 рівняння фігур .

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + W_1 = 0,$.

$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + W_2 = 0,$.

$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + W_3 = 0$ і одне рівняння полюсу виду $\sum_{i=1,3,5,7} ctg\ \beta_i\ v_i$ - $\sum_{i=2,4,6,8} ctg\ \beta_i\ v_i + W_4 = 0.$.

Обчислення нев'язок і величин $ctg\ \beta_i$ виконано в табл. 10.18 і 10.19. Полюсне умовне рівняння має вид:

$0{,}649v_1 - 1{,}931v_2$ - $0{,}587v_3$ - $1{,}376v_4 + 0{,}949v_5$ - $1{,}284v_6$ +

$+3{,}077v_7$ - - $0{,}220v_8 + 5{,}937 = 0.$.

Оціночна функція має вид: .

F = F_0 +$ctg\ \beta_1\ v_1$ - $ctg(\beta_2 + \beta_3)\ (v_2 + v_3)$ + $ctg(\beta_4 + \beta_5)\ (v_4 + v_5)$ -

- $ctg\ \beta_6\ v_6$, якщо діагональ обчисляти за трикутниками АВС і ВСД, або .

F = $F_0 + 0{,}649v_1 - 0{,}053v_2$ - $0{,}053v_3 + 0{,}132v_4 + 0{,}132v_5$ - $1{,}284v_6$.

Таблиця 10.18. Виміряні та вирівняні кути.

№ трикутника	Назва вершин	№ кута	Виміряні кути	Поправки v_i	Секунди вирівняних кутів
I	В С А	2+3 4 1	86° 58′ 55,3″ 36 00 05,7 57 00 57,0	+0,9 -0,6 +1,7	56,2″ 05,1 58,7
		Σ	179 59 58,0 W_1= -2,0″	+2,0	00,0
II	Д А С	6+7 8 5	55 54 26,5 77 35 46,3 46 29 49,3	-0,8 -0,2 -1,1	25,7 46,1 48,2
		Σ	180 00 02,1 W_2= +2,1″	-2,1	00,0
III	В Д А	2 7 1+8	27 22 57,6 18 00 15,7 134 36 43,3	+0,7 +1,2 +1,5	58,3 16,9 44,8
		Σ	179 59 56,6 W_3= -3,4″	+3,4	00,0

Таблиця 10.19. Розв'язання полюсного рівняння

№ кутів	Виміряні значення	$\lg sin$	$ctg\ \beta_i$	№ кутів	Виміряні значення	$\lg sin$	$ctg\ \beta_i$
1	57°00′57,0″	-0,0763307	0,649	2	27°22′57,6″	-0,3373071	1,931
3	59 35 57,7	-0,0642369	0,587	4	36 00 05,7	-0,2307648	1,376
5	46 29 49,3	-0,1394592	0,949	6	37 54 10,8	-0,2116007	1,284
7	18 00 15,8	-0,5099159	3,077	8	77 35 46,3	-0,0102575	0,220

Σ_1 = -0,789 9427 Σ_2 = - 0,789 9302

W_4 = - 125· 10^{-7}, $W_4 \frac{\rho}{M}$ = - 125· 4,749·10^{-2} = - 5, 937.

Таблиця 10.19 складена з урахуванням обчислень, які виконані за допомогою міні калькуляторів. При цьому величини $\lg sin\ \beta_i$ можна було би у загалі не виписувати, а нев'язку W_4 отримати шляхом накопичення їх значень в пам'яті. .

Коефіцієнти умовних, нормальних рівнянь і їх розв'язання дані в табл. 10.20; 10.21; 10.22.

Таблиця 10.20

Коефіцієнти умовних рівнянь та поправки $v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4$

№ кутів	a	b	c	d	f	s	v
1	1		1	0,649	0,649	3,298	1,70
2	1		1	-1,931	-0,053	0,016	0,66
3	1			0,587	-0,053	1,534	0.22
4	1			-1,376	0,132	-0,244	-0,57
5		1		0,949	0,132	2,081	-1,12
6		1		-1,284	-1,284	-1,568	-2,02
7		1	1	3,077-	-	5,077	1,18
8		1	1	0,220	-	1,780	-0,15
k_j	-0,019	-1,505	-1,454	0,40		$[vv]$=	10,45

Таблиця 10.21. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	a]	b]	c]	d]	f]	s]	Контр.	w	Σ
[a	4	0	2	-2,071	0, 675	4, 604	4, 604	-2,0	1,929
[b		4	2	2,522	-1,152	7,370	7,370	2,1	10,622
[c			4	1,575	0, 596	10, 171	10, 171	-3,4	6, 175
[d				18,453	2, 084	22,564	22,563	-5,937	14,542
[f					2,110	4,314	4,314	-9,237	

Таблиця 10.22. Розв'язання нормальних рівнянь.

.

k_1	k_2	k_3	k_4	w	Σ	Конт. 1	F	s	Конт. 2
4 -1	0 0	2 -0.5	-2.071 0,5178	-2,0 0,5	1,929 -0,482	1,929 -0,482	0,675 -0,168	4,804 - 1,151	4,804 -1,151
(0,25)	4 -1	2 -0.5	2,522 -0,630	2,1 -0, 5	10,622 -2,655	10,622 -2,655	-1,152 0,228	7,37 -1,842	7,37 -1,842
(0,50)		2 -1	1,35 -0,675	-3,45 1,725	-0,1 0,05	-0,1 0,05	0,834 -0,417	4,184 -2,092	4,184 -2,092
$\boldsymbol{k_j}$ **і** $\overline{\boldsymbol{k_j}}$ **,** а також контроль(k_j - $\overline{k_j}$)= 1,000			14,88 -1	-5,97 0,401	8,911 -0,599	8,911 -0,599	2,597 -0,174	17,48 -0,175	17,48 -0,175
-0,019	-1,505	1,454	0,401	$[vv]$	$[vv]$	$\frac{1}{P_{F'}}$	0,863	0,865	
-1,019	-2,505	0,454	-0,599	-					
1,000	1,000	1,000	1,000	10,44	-10,45				

Поправки обчислені в табл. 10.20. Для обчислення остаточної нев'язки полюсного умовного рівняння складемо табл. 10.23. Із цієї таблиці видно, що вирівнювання виконано правильно. Таблиця 10.23.

№ кутів	Виміряні значення	lg sin	№ кутів	Виміряні значення	lg sin
1	57°00′58,7″	-0,0763284	2	27°22′58,3″	-0,3373043
3	59 35 57,9	-0,0642366	4	36 00 05,1	-0,2307665
5	46 29 48,2	-0,1394614	6	37 54 08,8	-0,2116061
7	18 00 16,9	-0,5099081	8	77 35 46,1	-0,0102576

Σ_1 = - 0,789 9345 W_4'= 0. Σ_2 = - 0,789 9345

Оцінка точності. .

а) середня квадратична похибка вимірювання кута .

$$m = \sqrt{[vv]/r} = \sqrt{10.45/4} = 1{,}6'';$$.

б) точність визначення середньої квадратичної похибки m

$$m_m \approx m/\sqrt{2r} = 1.6/\sqrt{8} = 0{,}57'';$$.

в) середня квадратична похибка функції

$$m_F = m\sqrt{1/P_{F'}} = 1{,}6\sqrt{0{,}863} = 1{,}49.$$.

Так як функція $F = lgS\frac{\rho}{M}$, то $m_F = \frac{m_{lgS}}{M}\rho$. .

Звідки $\frac{m_{lgS}}{M} = \frac{m_S}{S} = \frac{m_F}{\rho}$ і $\frac{m_S}{S} = \frac{1{,}49}{2\cdot 10^5} \approx \frac{1}{140\,000}$.

ГЛАВА11. ВИРІВНЮВАННЯ ТРИЛАТЕРАЦІЇ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

11.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. .

Застосування світло - віддалемірів і електронних тахеометрів дозволяє з високою точністю вимірювати кути і віддалі та створювати мережі трилатерації. Це дає можливість скорочувати строки польових робіт і зменшувати їх вартість. При цьому найбільш ефективними вважають лінійно – кутові мережі, які більш всього ефективно вирівнювати корелатним способом.

11.2. КІЛЬКІСТЬ УМОВНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ВИРІВНЮВАННІ ТРИЛАТЕРАЦІЇ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

У випадку вирівнювання корелатним способом кожної виміряної сторони, визначають відповідні поправки v_s, які повинні відповідати умові $\sum \boldsymbol{p_S v_S^2} = \mathbf{min}$. (11.1)

При цьому повинні бути задовільнені всі математичні умови, які обумовлені конфігурацією мережі, а саме: кожна надлишкове виміряна довжина сторони приводить до виникнення одної математичної умови,на основі якої складається умовне рівняння. Так як для визначення кожного пункту необхідно вимірити дві сторони, то число незалежних умовних рівнянь визначається за наступною формулою $\mathbf{r = N - 2k}$, (11.2)

де N – число виміряних сторін і дирекційних кутів в мережі; k – число пунктів, які визначаються. .

Для вільної мережі при відсутності в ній надлишкових дирекційних кутів число незалежних умовних рівнянь дорівняє числу надлишкове виміряних сторін. .

Простішими і найбільш поширеними фігурами в трилатерації є центральна система і геодезичний чотирикутник, в кожному з яких виникає одне умовне рівняння. Тому в такій вільній мережі трилатерації число умовних рівнянь дорівнює числу таких центральних систем і геодезичних чотирикутників, які в ній містяться.

11.3. ВИД УМОВНИХ РІВНЯННЯ В МЕРЕЖАХ ТРИЛАТЕРАЦІЇ.

При вирівнюванні трилатерації, сторони зручно записувати через кути, а потім поправки до кутів заміновати поправками до виміряних сторін. Тому розглянемо

диференційну залежність заміни кута відносно заміни сторони трикутника. Відомо, що в трикутнику (рис.11.1) з виміряними сторонами S_1, S_2, S_3 протилежні кути β_1, β_2, β_3 можна обчислити за формулою косинуса кута:

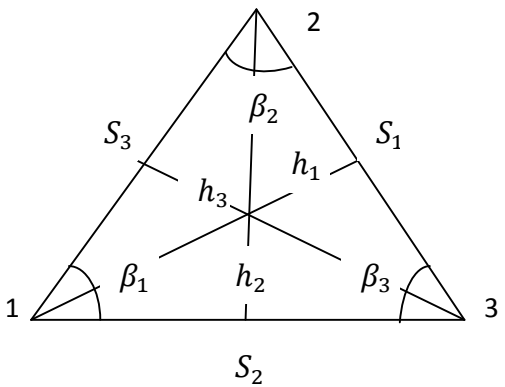


Рис.11.1. Елементи трикутника.

$$\cos\beta_1=\frac{S_2^2+S_3^2-S_1^2}{2S_2\ S_3};\ \cos\beta_2=\frac{S_1^2+S_3^2-S_2^2}{2S_1\ S_3};\ \cos\beta_3=\frac{S_1^2+S_2^2-S_3^2}{2S_1\ S_2}. \quad (11.3)$$

Після диференціювання першої рівності за перемінними β_1, S_1, S_2, S_3 отримаємо .

$$-\sin\beta_1 d\beta_1 = -\frac{S_1}{S_2\ S_3}\,dS_1+\frac{S_1^2+S_2^2-S_3^2}{2\,S_2^2\,S_3}\,dS_2+\frac{S_1^2+S_3^2-S_2^2}{2\,S_2\,S_3^2}\,dS_3, \quad .$$

звідки .

$$d\beta_1=\frac{S_1}{S_2\ S_3\sin\beta_1}\left(dS_1-\frac{S_1^2+S_2^2-S_3^2}{2\,S_1S_2}\,dS_2-\frac{S_1^2+S_3^2-S_2^2}{2\,S_1S_3}\,dS_3\right). \quad (11.4)$$

Із (11.1; 11.2) маємо .

$$d\beta_1=\frac{1}{h_1}\left(dS_1-\cos\beta_3\ dS_2-\cos\beta_2\ dS_3\right), \quad (11.5)$$

де $h_1= S_2\ \sin\beta_3 = S_3\ \sin\beta_2 = \frac{S_2\ S_3\sin\beta_1}{S_1}$ - висота трикутника від сторони S_1 (рис.11.1). .

Аналогічно із другій і третій рівностей маємо .

$$d\beta_2 = \frac{1}{h_2}(ds_2 - \cos\beta_3\, ds_1 - \cos\beta_1\, ds_3), \qquad (11.6)$$

де $h_2 = S_1 \sin\beta_3 = S_3 \sin\beta_1 = \frac{S_1\ S_3 \sin\beta_2}{S_2}$; .

$$d\beta_3 = \frac{1}{h_3}(ds_3 - \cos\beta_2\, ds_1 - \cos\beta_1\, ds_2), \qquad (11.7)$$

де $h_3 = S_1 \sin\beta_2 = S_2 \sin\beta_1 = \frac{S_1\ S_2 \sin\beta_3}{S_3}$ . .

Переходячи до поправок, маємо .

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{\rho}{h_1}(v_{s_1} - \cos\beta_3\, v_{s_2} - \cos\beta_2\, v_{s_3}), \\ v_2 &= \frac{\rho}{h_2}(v_{s_2} - \cos\beta_3\, v_{s_1} - \cos\beta_1\, v_{s_3}), \\ v_3 &= \frac{\rho}{h_3}(v_{s_3} - \cos\beta_2\, v_{s_1} - \cos\beta_1\, v_{s_2}), \end{aligned}\right\} \qquad (11.8)$$

Рівності (11.8) установлюють зв'язок між поправками до кутів і поправками до довжин сторін трикутника.

Умова горизонту – виникає в центральній системі (рис.11.2,а) для кутів у полюса, які обчислені за виміряними сторонами трикутників. Умовне рівняння поправок горизонту має вид $v_3 + v_6 + v_9 + v_{12} + W_г = 0$ (11.9)

і $W_г = (\beta_{3'} + \beta_{6'} + \beta_{9'} + \beta_{12'}) - 360°$, (11.10)

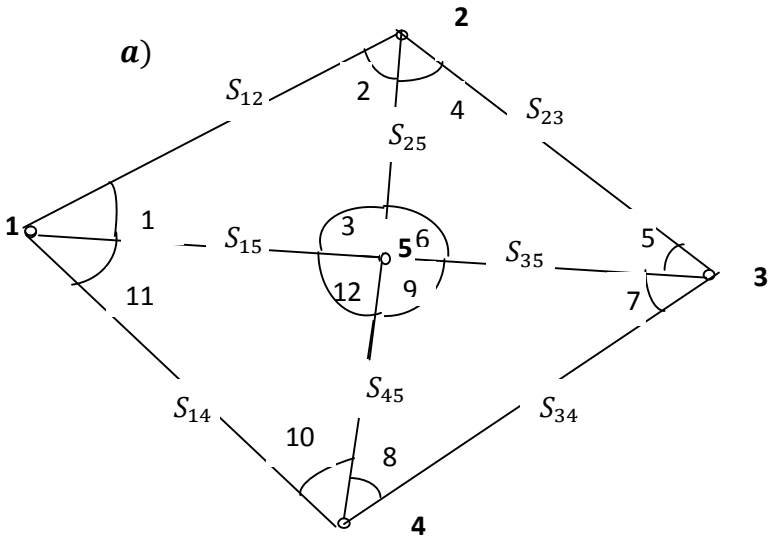
де $\beta_{i'}$ - значення кута, яке обчислене за виміряними сторонами. Згідно з (11.8) виразимо поправки до кутів поправками v_{ij} до виміряних сторін S_{ij} .

$v_3 = \frac{\rho}{h_3}(v_{1-2} - \cos\beta_{1'}\, v_{1-5} - \cos\beta_{2'}\, v_{2-5})$; .

$v_6 = \frac{\rho}{h_6}(v_{2-3} - \cos\beta_{4'}\, v_{2-5} - \cos\beta_{5'}\, v_{3-5})$; . .

$v_9 = \frac{\rho}{h_9}(v_{3-4} - \cos\beta_{7'}\, v_{3-5} - \cos\beta_{8'}\, v_{4-5})$; . .

$v_{12} = \frac{\rho}{h_{12}}(v_{4-1} - \cos\beta_{10'}\, v_{4-5} - \cos\beta_{11'}\, v_{1-5})$. .



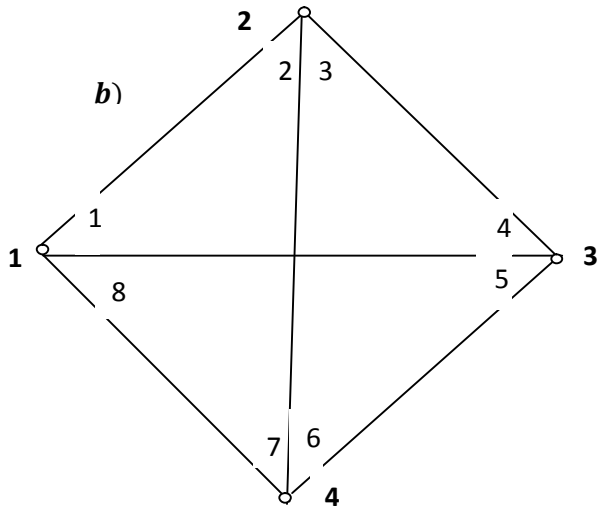


Рис.11.2 Фігури трилатерації: ***a***) центральна система, б) геодезичний чотирикутник.

. Після підставлення у рівняння (11.9) поправок кутів, отримаємо **умовне рівняння поправок за горизонт**

$$\rho(h_3^{-1}v_{1-2}+h_6^{-1}v_{2-3}+h_9^{-1}v_{3-4}+h_{12}^{-1}\ v_{4-1}) - \rho(h_3^{-1}\cos\beta_{1'} + +h_{12}^{-1}\cos\beta_{11'})\ v_{1-5} - \rho(h_3^{-1}\cos\beta_{2'} + h_6^{-1}\cos\beta_{4'})\ v_{2-5} - -\rho(h_6^{-1}\cos\beta_{5'} + h_9^{-1}\cos\beta_{7'})\ v_{3-5} - \rho(h_9^{-1}\cos\beta_{8'} + +h_{12}^{-1}\cos\beta_{10'})\ v_{4-5} + W_{\text{г}} = 0. \quad (11.11)$$

Умова фігури. Для геодезичного чотирикутника (рис.11.2,б) ця умова виражається наступною рівністю:

$$\sum_{i=1}^{8} v_i + W_{\text{ф}} = 0, \quad (11.12)$$

де

$$W_{\text{ф}} = \sum_{i=1}^{8} \beta_{i'} - 360°. \quad (11.13)$$

В трикутниках 123, 234, 134, 124 на основі формули (11.6) поправки до кутів рівняння (11.10) замінімо поправками в довжини сторін .

$$v_2 + v_3 = h_2^{-1}(v_{1-3}\cos\beta_1\ v_{1-2} - \cos\beta_{4'}\ v_{2-3})\ \rho;$$

$$v_4 + v_5 = h_3^{-1}(v_{2-4}\cos\beta_3\ v_{2-3} - \cos\beta_{6'}\ v_{3-4})\ \rho;$$

$$v_6 + v_7 = h_4^{-1}(v_{1-3}\cos\beta_5\ v_{3-4} - \cos\beta_{8'}\ v_{4-1})\ \rho;$$

$$v_8 + v_1 = h_1^{-1}(v_{2-4}\cos\beta_7\ v_{4-1} - \cos\beta_{2'}\ v_{1-2})\ \rho.$$

Підставимо найдені значення поправок до кутів у рівність (11.10), отримаємо **умовне рівняння фігури** .

$$\rho\ (h_2^{-1}+h_4^{-1})\ v_{1-3} + \rho\ (h_1^{-1}+h_3^{-1})\ v_{2-4} - (h_2^{-1}\cos\beta_1 + +h_1^{-1}\cos\beta_{2'})\ v_{1-2} - \rho(h_2^{-1}\cos\beta_{4'} + h_3^{-1}\cos\beta_3) v_{2-3} - - \rho(h_3^{-1}\cos\beta_{6'} + h_4^{-1}\cos\beta_5)\ v_{3-4} - \rho(h_4^{-1}\cos\beta_{8'} + +h_1^{-1}\cos\beta_7)\ v_{4-1} + W_{\text{ф}} = 0. \quad (11.14)$$

Умова дирекційних кутів. Якщо в мережі трилатерації (рис.11.3) на двох сторонах (початкової і кінцевої) визначені дирекціоні кути α_1 і α_2, то після вирівнювання повинна додержуватися наступна умова:

. α_1+2 − 5 +8 − 11 - α_2= 0.

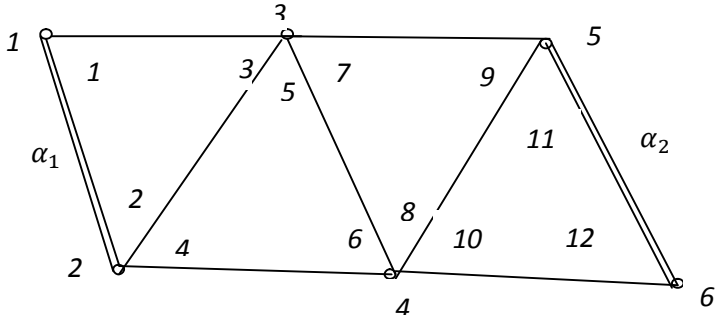


Рис.11.3. Ланка трилатерації.

. Тоді умовне рівняння поправок, яке відповідає цієї умові, має вид .

v_{α_1} - v_{α_2} +v_2 -v_5 +v_8 - v_{11} +W_α= 0 (11.15) і

W_α= α_1'- α_2'+2′ - 5′ +8′ -11′, (11.16)

де α_1' і α_2' визначені дирекціоні кути; i′ (1′, 2′,….., i′) - значення кутів, які обчислені за виміряними сторонами.

Із умов (11.13) і (11.6) отримаємо : .

v_{α_1} - v_{α_2} + $h_2^{-1}(v_{1-3}$- cos1′ v_{1-2}- cos3′$v_{2-3})\rho$ - $h_5^{-1}(v_{2-4}$- -cos4′v_{2-3}- cos6′$v_{3-4})\rho$ + $h_8^{-1}(v_{3-5}$- cos7′v_{3-4}− cos9′$v_{4-5})\rho$ -

- $h_{11}^{-1}(v_{4-6}$- cos10′v_{4-5}- cos12′$v_{5-6})$ ρ + W_α = 0. .

Після обробки отримаємо: .

v_{α_1} - v_{α_2} - $\rho h_2^{-1}\cos 1'$ v_{1-2} + ρh_2^{-1} v_{1-3} - $\rho(h_2^{-1}\cos 3'$ - - $h_5^{-1}\cos 4')$ v_{2-3}- ρ h_5^{-1} v_{2-4}+$\rho(h_5^{-1}$ $\cos 6'$- $h_8^{-1}\cos 7')v_{3-4}$+ +$\rho h_8^{-1}v_{3-5}$ – $\rho(h_8^{-1}\cos 9'$- $h_{11}^{-1}\cos 10')$ v_{4-5} - ρ h_{11}^{-1} v_{4-6} + + ρh_{11}^{-1} $\cos 12' v_{5-6}$ + W_α = 0. (11.17)

. Якщо в ланці трилатерації (рис.11.3) пункти 1, 2, 5, 6 є вихідними, тоді в рівнянні (11.15) поправки v_{α_1} , v_{α_2} , v_{12} і v_{5-6} будуть дорівнювати нулеві, тоді отримаємо **умовне рівняння поправок вихідних дирекційних кутів** $\rho h_2^{-1}v_{1-3}$ - ρ h_5^{-1} v_{2-4} + $\rho h_8^{-1}v_{3-5}$- ρ h_{11}^{-1} v_{4-6} - .

-$\rho(h_2^{-1}\cos 3'$ - h_5^{-1} $\cos 4')$ v_{2-3}+$\rho(h_5^{-1}$ $\cos 6'$- h_8^{-1} $\cos 7')v_{3-4}$ - -$\rho(h_8^{-1}$ $\cos 9'$- h_{11}^{-1} $\cos 10')$ v_{4-5} + W_α = 0. (11.18)

Умова координат. Виникає в мережі трилатерації по осях абсцис і ординат. Рівняння поправок має вид: .

а) **по осі абсцис** .

$(\cos\alpha'_{23} + \frac{y_5 - y_2}{h_2}\cos 3')$ v_{2-3}+ $(\cos\alpha'_{34} + \frac{y_5 - y_3}{h_5}\cos 6')$ v_{3-4}+ +$(\cos\alpha'_{45} + \frac{y_5 - y_4}{h_8}\cos 9')v_{4-5}$ - $\frac{y_5 - y_2}{h_2}v_{1-3}$ + $\frac{y_5 - y_3}{h_5}$ v_{2-4} - - $\frac{y_5 - y_4}{h_8}v_{3-5}$ + W_x = 0, (11.19) де

W_x=x_2+$S'_{2-3}\cos\alpha'_{23}$ +$S'_{3-4}\cos\alpha'_{34}$+$S'_{4-5}\cos\alpha'_{45}$-x_5=x_5' -x_5; (11.20)

б) **по осі ординат** .

$(\sin\alpha'_{23}$ - $\frac{x_5 - x_2}{h_2}\cos 3')$ v_{2-3}+ $(\sin\alpha'_{34} + \frac{x_5 - x_3}{h_5}\cos 6')$ v_{3-4} + +$(\sin\alpha'_{45}$ - $\frac{x_5 - x_4}{h_8}$ $\cos 9')v_{4-5}$ + $\frac{x_5 - x_2}{h_2}v_{1-3}$ - $\frac{x_5 - x_3}{h_5}$ v_{2-4}+ + $\frac{x_5 - x_4}{h_8}v_{3-5}$ + W_y = 0, (11.21)

де W_y=y_2+$S'_{2-3}\sin\alpha'_{23}$+$S'_{3-4}\sin\alpha'_{34}$+$S'_{4-5}\sin\alpha'_{45}$ -y_5=y_5'-y_5. (11.22)

В наведених формулах S'_{ij} – виміряні сторони ; i'_i- кути, які обчислені за формулами (11.3) і виміряними сторонами; α'_{ij}- дирекціоні кути, які отримані за кутами i'_i; x′, y′ - попередні координат пунктів, які визначаються.

11.4. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ МЕРЕЖІ ТРИЛАТЕРАЦІЇ.

Виконати вирівнювання корелатним способом сторін і кутів трикутників мережі трилатерації (рис.11.4), яка побудована у вигляді центральної системи. Вихідні дані: координати пунктів x_1 =13998,27 м; y_1= 41021,74 м; x_2= 21014,07 м; y_2= 43974,21м, довжина сторони S_{12} = 7611,74м; дирекційний кут сторони α_{12}= 22°49′22,4″.

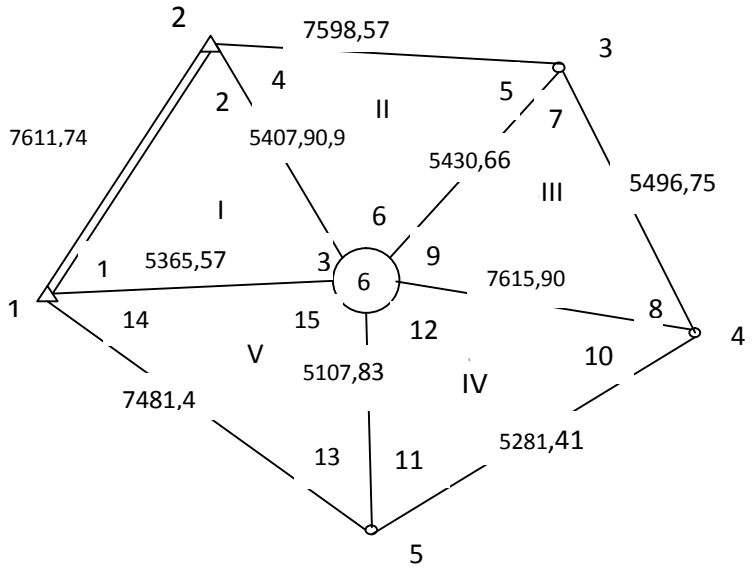


Рис. 11.4. Центральна система мережі трилатерації .

Довжини виміряних і спроектованих на плоскість сторін, виписані на схемі мережі (рис.11.4). .

Вирівнювання виконується у наступній послідовності.

1.Визначення числа і виду незалежних умовних рівнянь.

2.Обчислення кутів і висот трикутників. .

3.Складання умовних рівнянь поправок і вагових коефіцієнтів.

4.Складання і розв'язання нормальних рівнянь корелат.

5.Обчислення поправок до виміряних сторін. .

6.Обчислення вирівняних сторін і кутів трикутників. .

7.Оцінка точності вирівняних елементів мережі.

Розв'язання. **1**.Мережа трилатерації (рис.11.4) складається із 6 пунктів, з яких визначаємо – 4 і десяти сторін, з яких 9 – виміряні безпосередньо. Згідно формули (11.2) число незалежних умовних рівнянь в мережі

$$\mathbf{r = N - 2k} = 9 - 8 = 1. \quad .$$

Це буде умовне рівняння горизонту, яке виникає на пункті **6** центральної системи. .

2.Кути обчислимо за формулами (11.3), а висоти трикутників – h за формулами (11.5 – 11.7). Для зручності поправки до виміряних сторін виразимо в дециметрах.

Тому при визначенні поправок до кутів за формулою (11.8) коефіцієнти зменшимо в 10 разів (табл.11.1).

3.Умовне рівняння поправок за горизонт у кутовій мірі має вид: $v_3 + v_6 + v_9 + v_{12} + v_{15} + W_г = 0$, .

де $W_г = 3' + 6' + 9' + 12' + 15' - 360°$. .

Згідно з формулами (11.8) маємо:

$v_3 = \rho h_3^{-1}(v_{1-2} - \cos 1'\, v_{1-6} - \cos 2'\, v_{2-6})$; .

$v_6 = \rho h_6^{-1}\,(v_{2-3} - \cos 4'\, v_{2-6} - \cos 5'\, v_{3-6})$; .

$v_9 = \rho h_9^{-1}\ (v_{3-4}$ - $\cos 7'\ v_{3-6}$ - $\cos 8'\ v_{4-6})$; .

$v_{12} = \rho h_{12}^{-1}\ (v_{4-5}$- $\cos 10'\ v_{4-6}$-$\cos 11'\ v_{5-6})$; .

$v_{15} = \rho h_{15}^{-1}\ (v_{5-1}$-$\cos 13'$ —- $\cos 14'\ v_{1-6})$. .

Після підстановки цих виразів в умовні рівняння поправок за горизонт і з рахуванням того, що поправка у вихідну сторону $S_{12} = 0$, а поправки в сторони виражені в дм., отримаємо

$$\frac{\rho}{10}(h_6^{-1}v_{2-3}+h_9^{-1}v_{3-4}+h_{12}^{-1}v_{4-5}+h_{15}^{-1}v_{5-1}) - \frac{\rho}{10}(h_3^{-1}\cos 1' + +h_{15}^{-1}\cos 14')\ v_{1-6} - \frac{\rho}{10}(h_3^{-1}\cos 2' + +h_6^{-1}\cos 4')\ v_{2-6} - \frac{\rho}{10}(h_6^{-1}\cos 5' \quad +h_9^{-1}\cos 7')\ v_{3-6} - - \frac{\rho}{10}(h_9^{-1}\cos 8' + h_{12}^{-1}\cos 10')\ v_{4-6} - \frac{\rho}{10}(h_{12}^{-1}\cos 11' + +h_{15}^{-1}\cos 13')\ v_{5-6} + W_г = 0.$$

Таблиця 11.1.

Трикут-ник	Пункт	Сторона	Довжини сторін S′, м	Квадрати сторін S'^2, м^2	Косинус кута i
1	2	3	4	5	6
I	6	S_{12}	7611,74	57938586	0,0016566
	2	S_{16}	5365,57	28789341	0,7093005
	1	S_{26}	5407,90	29245382	0,7037302
II	3	S_{26}	5407,90	29245382	0,7025882
	6	S_{23}	7598,57	57738266	0,0170112
	2	S_{36}	5430,66	29492068	0,6995419
III	4	S_{36}	5430,66	29492068	0,7013896
	6	S_{34}	5496,75	30214261	0,6924640
	3	S_{46}	7615,90	58001933	0,0285484
IV	5	S_{46}	7615,90	58001933	-0,0744853
	6	S_{45}	5281,41	27893292	0,7223332
	4	S_{56}	5107,83	26089927	0,7434274
V	1	S_{56}	5107,83	26089927	0,7307986
	6	S_{15}	7481,49	55972699	-0,0199483
	5	S_{16}	5365,57	28789341	0,6970355

Продовження таблиці 11.1.

№ кута	Значення кутів -і	Синуси кутів-і	Висоти h_i,м	$\frac{\rho}{10h_i}$	Поправ-ки кутів v_i	Вирівняні кути -і
7	8	9	10	11	12	13
3	89°54′18,3″	0,9999986	3812,06	5,411	-0,4 ″	89°54′17,9″
2	44 49 19,1	0,7049062	5407,89	3,814	+0,2	44 49 19,3
1	45 16 22,6	0,7104673	5365,56	3,844	+0,2	45 16 22,8
Σ	180 00 00,0				0,0	180 00 00,0
5	45 21 53,9	0,7115967	5429,87	3,799	+0,3	45 21 54,2
6	89 01 31,0	0,9998553	3864,44	5,338	-0,4	89 01 30,6
4	45 36 35,1	0,7145916	5407,12	3,815	+0,1	45 36 35,2
Σ	180 00 00,0				0,0	180 00 00,0
8	45 27 41,0	0,7127781	5494,51	3,754	0	45 27 41,0
9	46 10 28,3	0,7214524	5428,45	3,800	-0,2	46 10 28,1
7	88 21 50,7	0,9995924	3917,96	5,265	+0,2	88 21 50,9
Σ	180 00 00,0				0,0	180 00 00,0
11	94 16 17,9	0,9972221	3532,30	5,839	+0,3	94 16 18,2
12	43 45 09,2	0,6915452	5093,64	4,049	-0,2	43 45 09,0
10	41 58 32,9	0,6688167	5266,74	3,916	-0,1	41 58 32,8
Σ	180 00 00,0				0,0	180 00 00,0
14	43 02 47,8	0,6825931	5364,50	3,845	+0,2	43 02 48,0
15	91 08 34,9	0,9998010	3662,50	5,632	-0,5	91 08 34,4
13	45 48 37,3	0,7170366	5106,81	4,039	+0,3	45 48 37,6
Σ	180 00 00,0				0,0	180 00 00,0

Із даних табл.11.1 складемо табл.11.2 коефіцієнтів умовних рівнянь поправок за горизонт.

Таблиця 11.2.

Поправка	Коефіцієнт	Кути - і	Значення кута - і
v_{1-5}	+5,632	3′	89°54′18,3″
v_{1-6}	-7,924	6′	89 01 31,0
v_{2-3}	+5,338	9′	46 10 28,3
v_{2-6}	-7,572	12′	43 45 09,2
v_{3-4}	+3,800	15′	91 08 34,9
v_{3-6}	-3,859		360 00 01,7
v_{4-5}	+4,049		-360 00 00,0
v_{4-6}	+5,675		$W_г$= +1,7″
v_{5-6}	-3,624		

З рахуванням отриманих коефіцієнтів і вільного члена умовне рівняння поправок за горизонт має вид

$$5{,}632v_{1-5} - 7{,}924v_{1-6} + 5{,}338v_{2-3} - 7{,}572v_{2-6} + 3{,}800v_{3-4} - 3{,}859v_{3-6} + 4{,}049v_{4-5} - 5{,}675v_{4-6} - 3{,}624v_{5-6} + 1{,}7 = 0.$$

В якості оцінюваного елемента вирівняної мережі приймемо дирекційний кут найбільш віддаленої сторони - α_{45}.

Для визначення середньої квадратичної похибки даного дирекційного кута введемо оцінювану функцію і знайдемо її обернену вагу із розв'язання нормальних рівнянь в додатковій графі f_α.

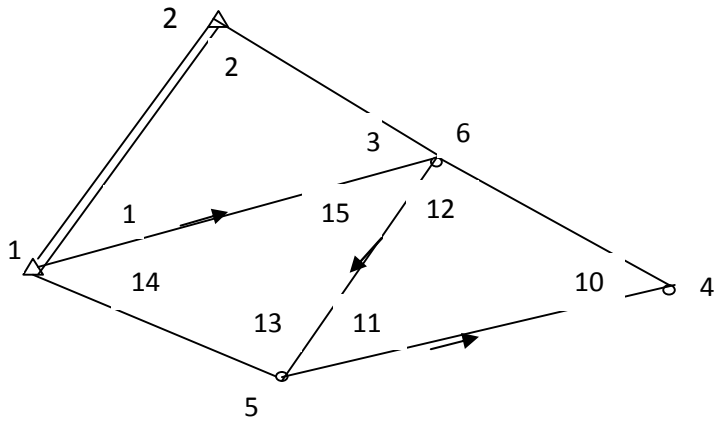


Рис.11.5. Схема обчислення дирекційного кута. .

Передачу дирекційного кута від вихідного напрямку 1 -2 до напрямку 5 – 4 (рис.11.5) обумовлює наступний вираз в кутовій формі: .

$$F = \alpha_{54} = \alpha_{12} + 1 - 15 + 11 \pm (2 \cdot 180°). \quad .$$

Для функції .

$$F_\alpha = F\ (1', 11', 15') + \left(\frac{\partial F}{\partial 1'}\right) v_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial 11'}\right) v_{11} + \left(\frac{\partial F}{\partial 15'}\right) v_{15},$$

де $\left(\frac{\partial F}{\partial 1'}\right) v_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial 11'}\right) v_{11} + \left(\frac{\partial F}{\partial 15'}\right) v_{15} = f_\alpha$ - вагова функція.

Похідні $\left(\frac{\partial F}{\partial 1'}\right)$=+1; $\left(\frac{\partial F}{\partial 11'}\right)$=+1; $\left(\frac{\partial F}{\partial 15'}\right)$= -1 і тому $f_\alpha = v_1 + v_{11} + v_{15}$. .

. Тоді після заміни поправок кутів поправками до сторін за формулами (11.8) і з рахуванням того, що для вихідної сторони (1-2) поправка v_{1-2} = 0, а поправки до інших сторін виражені в дм., отримаємо .

$v_1 = \rho h_1{}^{-1}(v_{2-6} - \cos 2'\, v_{1-2} - \cos 3'\, v_{1-6})$; .

$v_{11} = \rho h_{11}{}^{-1}(v_{4-6} - \cos 10'\, v_{4-5} - \cos 12'\, v_{5-6})$; .

$v_{15} = \rho h_{15}{}^{-1}(v_{1-5} - \cos 14'\, v_{1-6} - \cos 13'\, v_{5-6})$.

і

$f_\alpha = -\frac{\rho}{10} h_{15}{}^{-1} v_{1-5} - \frac{\rho}{10}\,(h_1{}^{-1} \cos 3' - h_{15}{}^{-1} \cos 14')\, v_{1-6} +$.

$+ \frac{\rho}{10} h_1{}^{-1} v_{2-6} - \frac{\rho}{10}\, h_{11}{}^{-1} \cos 10'\, v_{4-5} + \frac{\rho}{10} h_{11}{}^{-1} v_{4-6} +$.

$+ \frac{\rho}{10}\,(h_{15}{}^{-1} \cos 13' - h_{11}{}^{-1} \cos 12')\, v_{5-6}$. .

Використаємо значення коефіцієнтів вагової функції (табл. 11.2) і запишемо .

f_α = -5,632 v_{1-5} + 4,11 v_{1-6} + 3,844v_{2-6} - 4,341v_{4-5} + + 5,839v_{4-6} - 0,292 v_{5-6}.

4. Складемо і розв'яжемо нормальні рівняння корелат. Для цього спочатку складемо таблицю коефіцієнтів умовних рівнянь поправок (табл.11.3), за допомогою якої пе-

рейдемо до системи нормальних рівнянь (табл.11.4).

Таблиця 11.3. .

Поправки v_{j-k}	a k= -0,0063	f_α	Сума -s	Поправки сторін v_{j-k}, дм
v_{1-5} v_{1-6} v_{2-3} v_{2-6} v_{3-4} v_{3-6} v_{4-5} v_{4-6} v_{5-6}	+5,632 -7,924 +5,338 -7,572 +3,800 -3,859 +4,049 -5,675 -3,624	-5,632 +4,110 - +3,844 - - -4,341 +5,839 -0,292	0 -3,814 +5,338 -3,728 +3,800 -3,859 -0,292 +0,164 -3,916	-0,04 +0,05 -0,03 +0,05 -0,02 +0,02 -0,03 +0,04 +0,02
W= +1,7	271,404	-143,049 116,411	128,355 -26,637	$[pv^2]$=0,011 $[kw]$= - 0,011

У результаті її розв’язання найдемо корелати.

Таблиця 11.4.

k	f_α	W	s +W	Контроль
271,404 -1	-143,049 0,5271 116,411	+1,7 -0,0063 0	+130,055 -0,4792 -26,637	-0,4792
$1/P_F$	41,010	0,901	41,912	41,906
k = - 0,0063				

5. За допомогою корелат обчислимо поправки v_{j-k} до виміряних сторін S_{j-k} (табл.11.5).

6. Обчислимо за поправками v_{j-k} вирівняні сторони S_{j-k} (табл. 11.5), Поправки до кутів трикутників v_i (табл.11.1) обчислимо за формулами (11.8). .

Контролем є рівність нулеві суми поправок в трикутнику.

Таблиця 11.5

Сторони S_{j-k}	Виміряні сторони	Поправка v_{j-k}	Вирівняні сторони
S_{1-2}	-	-	7611,740
S_{1-5}	7481,49	-0,04	7481,486
S_{1-6}	5365,57	+0,05	5365,575
S_{2-3}	7598,57	-0,03	7598,567
S_{2-6}	5407,90	+0,05	5407,905
S_{3-4}	5496,75	-0,02	5496,748
S_{3-6}	5430,66	+0,02	5430,662
S_{4-5}	5281,41	-0,03	5281,407
S_{4-6}	7615,90	+0,04	7615,904
S_{5-6}	5107,83	+0,02	5107,832

7. Оцінка точності вирівняних елементів мережі.

Середня квадратична похибка одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{0{,}011}{1}} = 0{,}10 \text{ дм}, \quad .$$

де значення $[Pv^2]$ обчислене в табл. 11.3, r – число надлишкових вимірів, дорівнює числу умовних рівнянь.

Середня квадратична похибка дирекційного кута найбільш віддаленої сторони 4-5

$$m_{\alpha_{4-5}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{4-5}}}} = 0{,}10\ \sqrt{41{,}01} = 0{,}6'', \quad .$$

де $\frac{1}{P_{\alpha_{4-5}}}$ - обернена вага оцінюваної функції (табл. 11.4).

11.5. СУТЬ ВИРІВНЮВАННЯ ПОЛІГОНОМЕТРИЧНИХ ХОДІВ.

В полігонометричних ходах і мережах, як і в тріангуляції, крім необхідних виконують і надлишкові вимірювання, наявність яких дозволяє поставити задачу вирівнювання. При вирівнюванні полігонометричних ходів відповідно за методом найменших квадратів застосовують:

а) способи вирівнювання, в яких поправки до вирівняних величин находять під умовою $[\boldsymbol{p}_{\text{н}}\boldsymbol{v}_{\text{н}}^{\mathbf{2}}]+[\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}^{\mathbf{2}}]=\mathbf{min}$. (11.23)

б) роздільні способи, в яких поправки до кутів і приростів координат отримуються роздільно, через знехтування їх взаємної геометричної залежності.

. Вирівнювання полігонометричних ходів під умовою (11.23) виконують корелатним або параметричним способами, та їх комбінуванням. Вибір способу вирівнювання обумовлено можливою економією трудових витрат при обчисленні. Далі розглянемо вирівнювання полігонометричного ходу корелатним способом.

11.6. ВИРІВНЮВАННЯ ПОЛІГОНОМЕТРИЧНОГО ХОДУ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ.

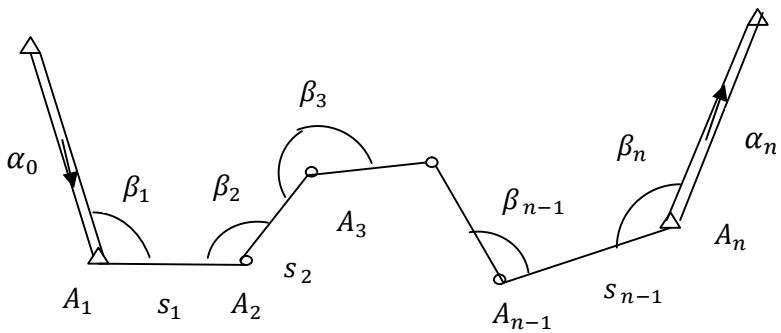


Рис.11.6. Полігонометричний хід довільної форми.

Нехай в полігонометричному ході з вихідними пунктами A_1 і A_n та з вихідними дирекційними кутами α_0 і α_n (рис.11.6) виміряне **n** кутів і (**n -1**) сторін, тобто виконано усього (**2n-1**) вимірів. Невідомими, які належить визначити в ході, є координати його вершин A_2, A_3,….., A_{n-1}. Так як усього в ході **n** пунктів, а координати двох з них A_1 і A_n відомі, отже, потрібно визначити координати (**n-2**). Для кожного пункту необхідно знайти два невідомих x та y, тому їх загальне число буде дорівнювати k = 2(n – 2) = 2n – 4, а число надлишкових вимірів r = (2n-1) – (2n – 4) = 3. (11.24)

Отже, в полігонометричному ході завжди є три надмірні виміри: два виміри кутів β_{n-1} і β_n та один вимір сторони s_{n-1}. Ці виміри приводять до виникнення трьох умов: умови вихідних дирекційних кутів і двох умов координат. При цьому умовні рівняння мають вид:

. – для вихідних дирекційних кутів

. $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ - n 180° - α_n = 0, (11.25)

де $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ - n 180° = α_n - значення дирекційного кута, яке обчислене за заданим дирекційним кутом α_0 і вирівняним значенням виміряних кутів β_i, бо .

$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 \pm 180°$; .

$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_2 \pm 180° = \alpha_0 + \beta_1 \pm 180° + \beta_2 \pm 180° = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \pm$
$\pm i 180°$;

……..

$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_n \pm 180° = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \pm n 180°$; (11.26)

- для абсцис і ординат .

$x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i cos\alpha_i - x_n = 0$; .

$y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i sin\alpha_i - y_n = 0$. (11.27)

Після диференціювання рівнянь (11.25) і (11.27) за

перемінними β_i і s_i та переходу від диференціалів до поправок v_{β_i}, v_{s_i} у виміряні величини β_i' і s_i', отримаємо умовні рівняння поправок: .

– **для вихідних дирекційних кутів** .

$$\sum_{i=1}^{n} v_{\beta_i} + W_\beta = 0; \qquad (11.28)$$

$$W_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i' + \alpha_0 - \alpha_n - n180° = \alpha_n^0 - \alpha_n; \qquad (11.29)$$

- для абсцис .

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(v_{s_i} cos\alpha_i^0 - s_i sin\alpha_i^0 v_{\alpha_i}\right) + W_x = 0; \qquad (11.30)$$

$$W_x = \sum_{i=1}^{n-1} s_i' cos\alpha_i^0 + x_1 - x_n = x_n^0 - x_n; \qquad (11.31)$$

- для ординат .

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(v_{s_i} sin\alpha_i^0 + s_i cos\alpha_i^0 v_{\alpha_i}\right) + W_y = 0; \qquad (11.32)$$

$$W_y = \sum_{i=1}^{n-1} s_i' sin\alpha_i^0 + y_1 - y_n = y_n^0 - y_n. \qquad (11.33)$$

У формулах (11.30) - (11.33) α_i^0, x_n^0, y_n^0 – обчислені значення дирекційного кута i-й сторони і координат кінцевого пункту A_n. Із формул (11.26) слідує, що .

$v_{\alpha_1} = v_{\beta_1}$; .

$v_{\alpha_2} = v_{\beta_1} + v_{\beta_2}$; .

……..; .

$$v_{\alpha_i} = v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \ldots + v_{\beta_i} = \sum_1^i v_{\beta_i}. \qquad (11.34)$$

Замінімо в формулах (11.30) і (11.32) поправки в дирекціоні кути їх значеннями, які виражені через поправки до виміряних кутів, а також рахуючи вирази (11.31) і (11.33), маємо .

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i' sin\alpha_i^0 = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y = \sum_{i=1}^{n-1}\left(y_n^0 - y_i^0\right); \quad .$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i' cos\alpha_i^0 = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x = \sum_{i=1}^{n-1}\left(x_n^0 - x_i^0\right). \quad .$$

Звідки отримаємо .

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_n^0 - y_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} cos\alpha_i^0 + W_x = 0; \qquad (11.35)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_n^0 - x_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} sin\alpha_i^0 + W_y = 0. \qquad (11.36)$$

В рівняння (11.35) і (11.36) не входить тільки поправка v_{β_n} і для іі обліку у ліві частини цих рівнянь слід додати відповідно величини $\left(y_n^0 - y_i^0\right) v_{\beta_n} = 0$ і $\left(x_n^0 - x_i^0\right) v_{\beta_n} = 0$. (11.37)

На основі цього остаточно запишемо умовні рівняння поправок абсцис і ординат

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\left(y_n^0 - y_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} cos\alpha_i^0 + W_x = 0, \qquad (11.38)$$

$$\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\left(x_n^0 - x_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} sin\alpha_i^0 + W_y = 0. \qquad (11.39)$$

Разом з рівнянням (11.28) вони утворюють систему із трьох умовних рівнянь поправок .

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} v_{\beta_i} + W_\beta = 0;} \\ &\boldsymbol{-\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\left(y_n^0 - y_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} cos\alpha_i^0 + W_x = 0,} \\ &\boldsymbol{\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\left(x_n^0 - x_i^0\right) v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{s_i} sin\alpha_i^0 + W_y = 0.} \end{aligned}\right\} \qquad (11.40)$$

Для визначення поправок v_{β_i} і v_{s_i} до виміряних значень кутів і довжин сторін полігонометричного ходу систему умовних рівнянь поправок (11.40) розв'яжемо сумісно за правилами методу найменших квадратів під умовою .

$$\sum_{i=1}^{n} p_{\beta_i} v_{\beta_i}{}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{s_i} v_{s_i}{}^2 = \min. \qquad .$$

Поперед початку розв'язання цієї задачи, необхідно встановити ваги виміряних величин. Як відомо, вагу можна визначити за наступною формулою: $p = \frac{\mu^2}{m^2}$, де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; m - середня квадратична похибка величини, вага якої визначається.

Відповідно з наведеною формулою для ваги виміряного кута будемо мати $p_\beta = \mu^2 / m_\beta^2$. .

а для ваги виміряної лінії $p_{s_i} = \mu^2 / m_{s_i}^2$. .

Середня квадратична похибка виміряного кута звичайно приймається однаковою для всіх кутів, оскільки в одному ході, як правило, кути вимірюються за однією методикою, тобто рівноточно. Якщо прийняти вагу виміряного кута $p_\beta = 1$, (11.41) то для ваги виміряної лінії можна прийняти $p_{s_i} = m_\beta^2 / m_{s_i}^2$, (11.42)

і у цьому випадку середня квадратична похибка одиниці ваги дорівнює середній квадратичній похибці виміряного кута. Від формул для ваг перейдемо до формул для обернених ваг, тобто

$$\pi_\beta = 1; \quad \pi_{s_i} = m_{s_i}^2 / m_\beta^2. \qquad (11.43)$$

Далі можна приступити до розв'язання отриманих умовних рівнянь поправок (11.40) корелатним способом. Для цього складемо таблицю коефіцієнтів умовних рівнянь (табл.11.5). В графу 1 цієї таблиці випишемо назви поправок, в графу 2 – обернені ваги виміряних кутів і ліній, в графи 3, 4, 5 – коефіцієнти умовних рівнянь поправок.

Таблиця 11.5.

Коефіцієнти умовних рівнянь і поправки $\boldsymbol{v_{\beta_i}}$, $\boldsymbol{v_{s_i}}$.

Поправка	$\pi_i = 1/p$	a k_1	b k_2	c k_3	f_β f_s f_α	f_x	f_y	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_{β_1} ⋮ v_{β_i} ⋮ v_{β_n}	π_{β_1} … π_{β_i} … π_{β_n}	1 … 1 … 1	$-\frac{1}{\rho}(y_n - y_1)$ … $\frac{1}{\rho}(y_n - y_i)$ … $-\frac{1}{\rho}(y_n - y_n)$	$\frac{1}{\rho}(x_n - x_1)$ … $\frac{1}{\rho}(x_n - x_i)$ … $\frac{1}{\rho}(x_n - x_n)$	1 … 1 … -1	$-\frac{1}{\rho}(y_i - y_1)$ … $-\frac{1}{\rho}(y_i - y_j)$	$\frac{1}{\rho}(x_i - x_1)$ … $\frac{1}{\rho}(x_i - x_j)$	v_{β_1} ⋮ v_{β_i}
v_{s_1} ⋮ v_{s_i} ⋮ v_{s_n}	π_{s_1} ⋮ π_{s_i} ⋮ π_{s_n}		$\cos\alpha_1$ ⋮ $\cos\alpha_i$ ⋮ $\cos\alpha_{n-1}$	$\sin\alpha_1$ ⋮ $\sin\alpha_i$ ⋮ $\sin\alpha_{n-1}$	1	$\cos\alpha_1$ ⋮ $\cos\alpha_{i-1}$	$\sin\alpha_1$ ⋮ $\sin\alpha_{i-1}$	v_{s_1} ⋮ v_{s_i} ⋮ v_{s_n}
Σ		Σa	Σb	Σc	Σf_β, Σf_s, Σf_α	Σf_x	Σf_y	
w		W_β	W_x	W_y				

Далі за коефіцієнтами умовних рівнянь поправок звичайним шляхом обчислимо коефіцієнти нормальних рівнянь корелат виду: .

$$\left.\begin{aligned} &[\pi aa]k_1 + [\pi ab]k_2 + [\pi ac]k_3 + W_\beta = 0; \\ &[\pi ab]k_1 + [\pi bb]k_2 + [\pi bc]k_3 + W_x = 0; \\ &[\pi ac]k_1 + [\pi bc]k_2 + [\pi cc]k_3 + W_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11.44)$$

У результаті розв'язання нормальних рівнянь корелат методом послідовного виключення невідомих знайдемо корелати k_1, k_2, k_3, за якими, використовуючи корелатні рівняння поправок, отримаємо поправки до виміряних значень кутів і довжин сторін. Корелатні рівняння поправок до кутів і довжин сторін мають наступний вид: .

$$v_{\beta_i} = \pi_{\beta_i}\ k_1 - \frac{1}{\rho}(y_{n-}y_i)\ k_2 + \frac{1}{\rho}(x_{n-}x_i)\ k_3 \quad ; \qquad (11.45)$$

$$v_{s_i} = \pi_{s_i}(\cos\alpha_i k_2 + \sin\alpha_i k_3). \qquad (11.46)$$

і в таблиці коефіцієнтів вони наведені по рядках. Поправки до дирекційних кутів обчислимо за поправками v_β, через використання формули (11.34).

Вирівняні значення виміряних кутів, дирекційних кутів і довжин сторін полігонометричного ходу знайдемо, якщо введемо отримані поправки v_β, v_α v_s у відповідні виміряні значення.

Вирівняні прирости координат обчислимо за вирівняними значеннями дирекційних кутів і довжин ліній. Заключним контролем при цьому є рівності

$$[\Delta x_{\text{вир}}] = x_{A_n} - x_{A_1}; \qquad [\Delta y_{\text{вир}}] = y_{A_n} - y_{A_1}. \qquad (11.47)$$

Вирівняні значення координат можна отримати і по іншому, якщо обчислити поправки $v_{\Delta x_i}$ і $v_{\Delta y_i}$ та ввести їх у відповідні прирости. Поправки $v_{\Delta x_i}$ і $v_{\Delta y_i}$ у цьому випадку визначимо за наступними формулами:

$$\left.\begin{aligned} v_{\Delta x_i} &= \cos\alpha_i v_{s_i} - s_i \sin\alpha_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}; \\ v_{\Delta y_i} &= \sin\alpha_i v_{s_i} + s_i \cos\alpha_i \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.48)$$

які отримуємо у результаті диференціювання формул обчислення приростів координат

$$\Delta x_i = s_i \cos\alpha_i; \qquad \Delta y_i = s_i \sin\alpha_i.$$

У цьому випадку контролем вирівнювання будуть рівності $[v_{\Delta x_i}] = -W_x$ і $[v_{\Delta y_i}] = -W_y$.

Вирівняні значення координат отримаємо за вирів-

няними приростами.

Для оцінки точності вирівняних значень елементів полігонометричного ходу (довжин ліній, кутів, дирекційних кутів, абсцис і ординат) складемо оцінювані функції для цих елементів з номером i :

$F_{s_i} = s_i$; $F_{\beta_i} = \beta_i$; $F_{\alpha_i} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{i} \beta_i$;

$F_{x_i} = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i cos\alpha_i$; $F_{y_i} = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} s_i sin\alpha_i$. (11.49)

Тоді візьмемо часткові похідні від функцій F_i за перемінними s_iта β_i і рахуючи формули (11.25), (11.27), а також формулу (11.34), отримаємо вирази для вагових функцій f_i елементів

$f_{s_i} = v_{s_i}$; (11.50) $f_{\beta_i} = v_{\beta_i}$; (11.51) $f_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{i} v_{\beta_i}$; (11.52)

$$f_{x_i} = \sum_{i=1}^{i-1} v_{s_i} cos\alpha_i - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{i} (y_i - y_j) v_\beta \; ; \qquad (11.53)$$

$$f_{y_i} = + \sum_{i=1}^{i-1} v_{s_i} sin\alpha_i - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{i} (x_i - x_j) v_\beta \; , \qquad (11.54)$$

де j= 1, 2,…., i – 1. Обернені ваги оцінюваних елементів полігонометричного ходу обчислимо в додаткових графах схеми розв'язання нормальних рівнянь. Для цього попередньо випишемо в рядки стовпців f_β , f_s , f_α , f_x , f_y (табл.11.5) відповідні коефіцієнти при поправках v_{β_i}, v_{s_i} із виразів(11.50) - (11.54). Середню квадратичну похибку одиниці ваги $\boldsymbol{\mu}$ можна отримати, якщо застосуємо до даного ходу загальну формулу метода найменших квадратів, яка у даному випадку має наступний вид: .

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[p_\beta v_\beta^2\right] + \left[p_s v_s^2\right]}{r}} \; . \qquad (11.55)$$

11.7. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ ПОЛІГОНОМЕТРИЧНОГО ХОДУ.

Виконати вирівнювання полігонометричного ходу корелатним способом (рис.11.7) і обчислити середні квадратичні похибки вирівняних значень дирекційного кута сторони 4 – 5 і координат пункту 5. .

Вихідні дирекціоні кута і координати пунктів, а також значення виміряних кутів повороту і довжин сторін полігонометричного ходу наведені в табл.11.6. Точність результатів вимірювань: m_β = 2,0″; m_s = 16,3мм. [11].

Таблиця 11.6. Вирівнювання полігонометричного ходу.

Пункти	Кут повороту β і поправки -v_β	Дирекціоні кути α і поправки-v_α	Довжини Sм, поправки - v_s	cosα sinα	Δx $v_{\Delta x}$
1	2	3	4	5	6
A	-1,4″	113°28′37,0″	+5	-0,415 858	+1
B, 1	181°05′47,0″	-1,4	552,007	0,909 430	-229, 557
	-0,4	114 34 24,0	-21	-0,999 104	+20
2	247 51 08,1	-1,8	565,338	-0,042 322	-564,831
	+0,2	182 25 32,1	-14	-0,933 384	+13
3	156 32 34,9	-1,6	339,025	0,358 880	-316,440
	+0,7	158 58 07,0	+3	-0,474 165	0
4	139 20 10,9	-0,9	400,408	0,880 436	-189,859
	+1,4	118 18 17,9	+13	-0,097 824	-2
5	157 18 32,1	+0,6	356,831	0,995 204	-34, 907
	+2,0	95 36 50,0	+16	0,074 452	-3
6	170 06 59,2	+2,5	372,263	0,997 225	+27,716
	+2,5	85 43 49,2	+16	0,074 544	-7
7	179 59 40,8	+5,0	348,716	0,997 218	+25,995
	+3,0	85 43 30,0			
C, 8	253 30 32,0				
Д		159 14 10,0			
	1485 4525,0 W_β= -8,0	α_n^0 =159 14 02,0 W_α = - 8,0	s=2934,588 W_s/s =	W_s=0,062 =1/48000	-1281,883 W_x= -0,022

Для отримання даних, необхідних при вирівнюванні полігонометричного ходу, виконуємо попередні обчислення

(табл.11.6). При цьому нев'язки W_β, W_x, W_y обчислені за відповідними формулами (11.29), (11.31), (11.33). .

Рис.11.7. Схема полігонометричного ходу.

Продовження табл.11.6.

Δy $v_{\Delta y}$	Обчислені координати		$x_n^0 - x_i^0$ км	$y_n^0 - y_i^0$ км	Вирівняні координати	
	x^0	y^0			x	y
7	8	9	10	11	12	13
+6 +502,012	10901, 025	7050,400	-1,282	+2,026	10901, 025	7050,400
+6 -23,926	10671, 468	7552,412	-1,052	+1,524	10671, 469	7552,418
-2 +121,669	10106,637	7528,486	-0,487	+1,548	10106,658	7528,498
+4 +352,534	9790, 197	7650,155	-0,171	+1,427	9790, 231	7650,165
+12 +355,119	9600,338	8002,689	+0,019	+1,074	9600,372	8002,703
+16 +371,230	9565,431	8357,808	+0,054	+0,719	9565,463	8357,834
+16 +347,746	9593,147	8729,038	+0026	+0,348	9593,176	8729,080
	9619, 142	9076,784			9619, 164	9076,842
+2026,384 W_y=-0,058	W_x= -0,022	W_y=-0,058				

У подальшому вирівнювання полігонометричного ходу виконуємо у наступній послідовності.

. 1. За формулами (11.40) складемо три умовних рівнянь поправок. Поправки v_s, різності координат $(x_n - x_i)$ і $(y_n - y_i)$ та вільні члени W_x і W_y в них виражені в сантиметрах. .

Для зручності запису величини $1/\rho$ збільшимо в 100 000 разів, тоді відповідно різності координат $(x_n - x_i)$ і $(y_n - y_i)$ зменшимо в те ж число разів, тобто виразимо їх в кілометрах. Таким чином, умовні рівняння поправок та обчислені вільні члени можна записати у наступному виді:

$$\left.\begin{aligned} &[v_\beta] - 8'' = 0; \\ &-0{,}485\,[(y_8 - y_j)v_\beta] + [v_{s_i} cos\alpha_i] - 2{,}2 = 0; \\ &+0{,}485\,[(x_8 - x_j)v_\beta] + [v_{s_i} sin\alpha_i] - 5{,}8 = 0. \end{aligned}\right\}$$

2. За отриманими умовними рівняннями поправок складемо таблицю їх коефіцієнтів (табл.11.7)

3. Відповідно з умовою прикладу та використовуючи формули (11.52), (11.53) і (11.54), складемо вагові функції:

$$f_{\alpha_4} = \sum_{i=1}^{4} v_{\beta_i};$$

$$f_{x_i} = +\sum_{i=1}^{4} v_{s_i} cos\alpha_i - 0{,}485 \sum_{i=1}^{5} (y_5 - y) v_\beta;$$

$$f_{y_i} = +\sum_{i=1}^{4} v_{s_i} sin\alpha_i - 0{,}485 \sum_{i=1}^{5} (x_5 - x) v_\beta,$$

Коефіцієнти при поправках v_β та v_s випишемо у відповідні рядки стовпців f_α, f_x, f_y (табл.11.7).

Таблиця 11.7.

Коефіцієнти умовних рівнянь при поправках v_β та v_s.

Поп–равка	$\pi_i = 1/p_i$	a k_1	b k_2	c k_3	f_α	f_x	f_y	s	v
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_{β_1}	1,00	+1,00	-0,98	-0,62	+1,00	-0,46	-0,63	-0,69	-1,36
v_{β_2}	1,00	+1,00	-0,74	-0,51	+1,00	-0,22	-0,52	+0,01	-0,39
v_{β_3}	1,00	+1,00	-0,75	-0,24	+1,00	-0,23	-0,25	+0,53	+0,17
v_{β_4}	1,00	+1,00	-0,69	-0,08	+1,00	-0,17	-0,09	+0,97	+0,71
v_{β_5}	1,00	+1,00	-0,52	+0,01				+0,49	+1,42
v_{β_6}	1,00	+1,00	-0,35	+0,03				+0,68	+1,98
v_{β_7}	1,00	+1,00	-0,17	+0,01				+0,84	+2,49
v_{β_8}	1,00	+1,00						+1,00	+3,00
v_{s_1}	0,664		-0,42	+0/91		-0,42	+0,91	+0,98	+0,48
v_{s_2}	0,664		-1,00	-0,04		-1,00	-0,04	-2,08	-2,08
v_{s_3}	0,664		-0,93	+0,36		-0,93	+0,36	-1,14	-1,35
v_{s_4}	0,664		-0,47	+0,88		-0,47	+0,88	+0,82	+0,34
v_{s_5}	0,664		-0,10	+1,00				+0,90	+1,26
v_{s_6}	0,664		+0,07	+1,00				+1,07	+1,60
v_{s_7}	0,664		+0,07	+1,00				+1,07	+1,60
Σ		+8,00	-6,98	+3,71	+4,00	-3,90	+0,62	+5,45	
W		-8,00	-2,20	-5,80				$[pv^2]=$	43,56
k		+2,980	+3,038	2,198				- $[kW]$ = 43,28	

4. Обчислення коефіцієнтів умовних рівнянь поправок контролюємо шляхом порівняння суми, яка одержана по рядках s та стовпцях Σ. .

5. Визначимо коефіцієнти нормальних рівнянь корелат (табл.11.8), а потім через них знайдемо невідомі корелати k_1, k_2, k_3 (табл.11.9). Таблиця 11.8.

k_1	k_2	k_3	f_α	f_x	f_y	W	s	Контроль
8,00	-4,20 4,48	-1,40 +0,50 3,85	+4,00 -3,16 -1,45	-1,08 +2,41 -0,26	-1,49 +0,53 +1,87	-8,00 -2,20 -5,80	-4,17 -1,64 -2,69	-4,17 -1,64 -2,68
			4,00	1,84	1,89			

Таблиця 11.9.

Розв'язання системи нормальних рівнянням.

k_1	k_2	k_3	f_α	f_x	f_y	W	s	Конт - роль
8,00 -1	-4,20 +0,525	-1,40 +0,175	+4,00 -0,50	-1,08 +0,135	-1,49 +0,186	-8,00 +1,0	-4,17 +0,521	+0,521
	4,48 2,28 -1	+0,50 -0,24 +0,105	-3,16 -1,06 +0,465	+2,41 +1,84 -0,807	+0,53 -0,25 +0,110	-2,20 -6,40 +2,807	-1,64 -3,83 +1,68	-3,83 +1,68
		3,85 3,58 -1	-1,45 -0,86 +0,24	-0,26 -0,26 +0,073	+1,87 +1,58 -0,441	-5,80 -7,87 +2,198	-2,69 -3,83 +1,07	-2,69 -3,82 +1,07
+2,98	+3,038	+2,198	4,00 +1,30	1,84 +0,19	1,89 +0,89	$[kw]$= $=1/P_F$	43,26	

Контроль розв'язання системи за сумарним рівнянням: (2,40·2,98) +(0,78·3,038) +(2,95·2,198) +(-16,00) = + 0,01 ≈0, дорівнює нулеві і тому практично виконується.

6. За значеннями корелат обчислимо поправки в кути і довжини ліній (табл.11.7 графа 10). Потім випишемо ці поправки понад відповідними значеннями виміряних кутів і довжин ліній (табл.11.6 графи 2 і 4). За формулами (11.34) знайдемо поправки в дирекціоні кути (графа 3).

7. За допомогою формул (11.48) одержимо поправки у прирости координат і запишемо їх понад відповідними значеннями Δx_i і Δy_i (графи 6 і 7). .

Контролем обчислення служать рівності $[v_{\Delta x_i}] = - W_x$ і $[v_{\Delta y_i}] = - W_y$. Розходження не повинні перебільшувати величини $0{,}5\sqrt{n}$ одиниці останнього знаку, де n число складених поправок. .

8. За виправленими приростами координат обчислимо ви-

рівняні координати(графи 12 і 13). .

9. Оцінімо точність вирівняних значень дирекційного кута α_{4-5} і координат пункту 5 з використанням значень обернених ваг, які обчислені в додаткових стовпцях f_α, f_x, f_y схеми розв'язання нормальних рівнянь (табл.11.9). .

Середня квадратична похибка μ з вагою p = 1 дорівнює середній квадратичній похибці виміру кута m_β і тому

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{43{,}56}{3}} = 3{,}8''. \quad .$$

$$m_{\alpha_{4-5}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_\alpha}} = 3{,}8\sqrt{1{,}30} = 4{,}3''; \quad .$$

$$m_{x_5} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_x}} = 3{,}8 \cdot 10\sqrt{0{,}19} = 17 \text{ мм}; \quad .$$

$$m_{y_5} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_y}} = 3{,}8 \cdot 10\sqrt{0{,}89} = 36 \text{ мм}. \quad .$$

11.8. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВИРІВНЮВАННЯ ЛІНІЙНО – КУТОВИХ МЕРЕЖ.

При створенні планових геодезичних мереж на будівельних майданчиках для зведення відповідальних інженерних споруд, при дослідженнях на геодинамічних полігонах треба підвішувати вимоги до точності визначення координат пунктів. Цього досягають побудовою лінійно – кутових мереж, в яких одночасно вимірюють всі кути (напрямки) та довжини сторін. В лінійно – кутовій мережі виникає більше математичних умов і вона має більшу жорсткість (точність), ніж мережі тріангуляції, трилатерації або полігонометрії. Вирівнювання лінійно – кутових мереж

виконуються за умовою $[p_н v_н^2] + [p_s v_s^2] = \min$, де $p_н$, p_s- ваги виміряних напрямків та довжин ліній; $v_н$, v_s - поправки до виміряних напрямків і довжин ліній.

Вирівнювання лінійно – кутових мереж виконують у такій послідовності [2]: .

1. Попередня математична обробка виміряних кутів і ліній.
2. Розв'язання трикутників і обчислення наближених координат пунктів, які визначаються. .
3. Розв'язання обернених геодезичних задач і визначення дирекційних кутів і довжин всіх сторін мережі. .
4. Складання рівнянь поправок для виміряних напрямків і сторін та вагових функцій. .
5. Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь. .
6. Розв'язання нормальних рівнянь. Визначення поправок до наближених значень координат, обернених ваг функцій та коефіцієнтів оберненої матриці. .
7. Обчислення поправок у виміряні напрямки і сторони.
8. Обчислення вирівняних значень координат пунктів, напрямків і сторін. .
9. Контрольні обчислення координат пунктів через вирівняні значення кутів і сторін трикутників. .
10. Оцінка точності результатів вирівнювання. .
11. Складання каталогу координат пунктів мережі. .

Визначення ваги лінійно – кутових вимірювань.

Для достовірного визначення співвідношення ваги кутових і лінійних вимірів в роботі [2] рекомендується вирівнювання виконувати у такій послідовності:

1. Лінійно – кутову мережу вирівнюють як кутову вільну мережу з рівноточно виміряними напрямками. Потім визначають середню квадратичну похибку напрямку або одиницю ваги μ.

2. Вирівнюють мережу як мережу трилатерації. Ваги сторін приймають обернено пропорційними квадратам їх довжин, тобто $P_i = C/S_i^2$. По результатах вирівнювання визначають середню квадратичну похибку одиниці ваги лінійних вимірювань μ_S на один 1 км віддалі. .

3. Остаточно вирівнюють мережу як лінійно – кутову з урахуванням всіх незалежних математичних умов. Ваги виміряних напрямків приймають рівними одиниці, тобто $P_{\text{Н}}$ =1. Вагу виміряних сторін обчислюють за формулою:

$$P_S = \frac{\mu_H^2}{\mu_S^2 S^2} . \qquad (11.56)$$

4. Прийнявши вагу виміряних напрямків $P_{\text{Н}}$ =1 та ваги сторін, які обчислені за формулою (11.56), остаточно виконують вирівнювання лінійно – кутової мережі. Такий метод вирівнювання дозволяє отримати більш достовірні результати. .

Попередня обробка результатів кутових і лінійних вимірів.

До вирівнювання виконують обробку кутових вимірів так само, як в тріангуляції, а лінійних – як в трилатерації. Виконують якісний контроль кутових і лінійних вимірів, їх відповідність встановленим допускам.

При розрахунках якості кутових вимірів лінійно – кутову мережу розглядають як тріангуляцію. Обчислюють нев'язки всіх трикутників за результатами кутових вимі-

рювань і середню квадратичну похибку виміру кута m за формулою $$m = \sqrt{\frac{[W^2]}{3n}}, \qquad (11.57)$$
де n – кількість трикутників. Кутові нев'язки не повинні перевищувати допустиму нев'язку .

$$W_{\text{доп.}} \leq 2{,}5\ \text{m}''\sqrt{3}. \qquad (11.58)$$

Далі визначають число полюсних умов і нев'язки полюсних умов, потім мережу розглядають як трилатерацію, обчислюють нев'язки геодезичних чотирикутників та центральних систем у кутовій мірі.

Обчислюють наближені координати, дирекціоні кути і довжини ліній мережі, складають рівняння поправок та вагових функцій, складають і розв'язують нормальні рівняння та виконують заключні обчислення і оцінку точності. Більш докладно цей матеріал описаний в роботах[2], [10] та інших.

ГЛАВА 12. КОМБІНОВАНІ СПОСОБИ ВИРІВНЮВАННЯ НА ЕОМ.

12.1. ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.

В практиці вирівнювання геодезичних мереж на ЕОМ зустрічаються випадки, коли для спрощення обчислень застосовують комбінування параметричного і корелатного способів вирівнювання. Існують декілька способів вирівнювання.

Одним з таких способів вирівнювання є параметричний із залежними параметрами (умовами). В цьому способі необхідні виміряні величини і надлишкові виміри виражають через параметри t_1, t_2,….., t_k. На відміну від математичної

задачи вирівнювання параметричним способом, в даному способі застосовують математичний зв'язок між надлишковими вимірами та необхідними невідомими типу .

$$\varphi_i(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k) = 0 \quad (i = 1,\ldots,s), \qquad (12.1)$$

Вирівняні значення виміряних величин x'_i виражають через функції невідомих параметрів .

$$x'_i = f_i(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k) \quad (i = 1,\ldots,k), \qquad (12.2)$$

Таким чином, якщо в параметричному способі вибирають m= k + s невідомих, які утворюють вектор $\Delta t = \tau$ і одночасно задовольняють математичної умові **B $\boldsymbol{\tau}$ + W = 0**. (12.3)

В комбінованому параметричному способі із залежними параметрами отримують зведену до лінійного виду систему рівнянь поправок і умовних рівнянь .

$$A\,\tau + l = V; \qquad .$$

$$B\,\tau + W = 0. \qquad (12.4)$$

Число умовних рівнянь дорівнює s = m – k і воно не дорівнює числу надлишкових вимірів. . В системах рівнянь (12.1) - (12.4) маємо такі позначення:

$t_i = t_i^0 + \tau_i$; $\quad A_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_0$; $\quad B_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)_0$;

$l_i = f_i\,(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) - x_i$; $\quad W_j = \varphi_i\,(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$. (12.5)

Для розв’язання задачи вирівнювання параметричним способом із залежними параметрами складемо функцію Лагранжа

$$\Phi(\tau) = [P(a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2] + [2k(B\tau + W)]. \quad (12.6)$$

або в матричному виді $\Phi(\tau) = V^T PV + 2\,K^T\,(B\,\tau + W)$. (12.7)

Після диференціювання функції $\Phi(\tau)$ за параметром $\boldsymbol{\tau}$ і для визначення мінімуму отримаємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_1} = 2[pa_1v] + 2k_1B_{11} + 2k_2B_{12} + \ldots + 2k_sB_{1s} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_k} = 2[pa_kv] + 2k_1B_{k1} + 2k_2B_{k2} + \ldots + 2k_sB_{ks} = 0, \quad \text{або}$$

$$\left.\begin{array}{l} [pa_1v] + B_{11}k_1 + B_{12}k_2 + \ldots + B_{1s}k_s = 0; \\ [pa_2v] + B_{21}k_1 + B_{22}k_2 + \ldots + B_{2s}k_s = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_kv] + B_{k1}k_1 + B_{k2}k_2 + \ldots + B_{ks}k_s = 0; \end{array}\right\} \qquad (12.8)$$

В матричному виді ця система буде $A^TPV + B^TK = 0$

З урахуванням формули (12.4) отримаємо нормальне рівняння

$$A^TPA\,\tau + B^TK + A^TP\,l = 0. \qquad (12.9)$$

Відомо, що $A^TPA = N$, $A^TP\,l = L$, і тоді

$$N\,\tau + B^TK + L = 0. \qquad (12.10)$$

Об'єднаємо рівняння (12.10) з (12.3) і отримаємо систему нормальних рівнянь в комбінованому параметричному способі із залежними параметрами:

$$\left.\begin{array}{r} N\,\tau + B^TK + L = 0; \\ B\,\tau + W = 0. \end{array}\right\} \qquad (12.11) \quad \text{або}$$

$$N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + \cdots + N_{1k}\tau_k + B_{11}k_1 + B_{12}k_2 + \ldots + B_{1s}k_s + L_1 = 0;$$
$$N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + \cdots + N_{2k}\tau_k + B_{21}k_1 + B_{22}k_2 + \ldots + B_{2s}k_s + L_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_{k1}\tau_1 + N_{k2}\tau_2 + \cdots + N_{kk}\tau_k + B_{k1}k_1 + B_{k2}k_2 + \ldots + B_{ks}k_s + L_k = 0;$$
$$B_{11}\tau_1 + B_{21}\tau_2 + \cdots + B_{k1}\tau_k + W_1 = 0;$$
$$B_{12}\tau_1 + B_{22}\tau_2 + \cdots + B_{k2}\tau_k + W_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{1s}\tau_1 + B_{2s}\tau_2 + \cdots + B_{ks}\tau_k + W_s = 0. \qquad (12.11a)$$

В символах Гаусса матриці (12.11) і (12.12) мають вид

$$\left.\begin{aligned} N\,\Delta x + B^T K + A^T P\,L = 0; \\ B\,\Delta x + W = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12.12)$$

або при $p_i = 1$ маємо

$$[aa]\delta x_1 + [ab]\delta x_2 + \cdots + [ag]\delta x_k + A_1 k_1 + B_1 k_2 + \ldots + G_1 k_s + [al] = 0;$$
$$[ab]\delta x_1 + [bb]\delta x_2 + \cdots + [bg]\delta x_k + A_2 k_1 + B_2 k_2 + \ldots + G_2 k_s + [bl] = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[ag]\delta x_1 + [bg]\delta x_2 + \cdots + [gg]\delta x_k + A_m k_1 + B_m k_2 + \ldots + G_m k_s + [gl] = 0;$$
$$A_1\delta x_1 + A_2\delta x_2 + \cdots + A_k\delta x_k + W_1 = 0;$$
$$B_1\delta x_1 + B_2\delta x_2 + \cdots + B_k\delta x_k + W_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_1\delta x_1 + G_2\delta x_2 + \cdots + G_k\delta x_k + W_s = 0. \qquad (12.12,a)$$

В системах нормальних рівнянь (12.11а) і (12.12,а) зберігається симетрія коефіцієнтів відносно головної діагоналі та її умовного продовження. Тому таку систему нормальних рівнянь можна розв'язати будь – якім із відомих способів, але застосування методу наближень, через складність математичних обчислень, в роботі [4] не рекомендується.

Із розв'язання системи нормальних рівнянь визначають поправки τ_i або δx_i до наближених значень невідомих параметрів t_i^0. Вирівняні значення параметрів обчислюють за формулою

$$t_j = t_j^0 + \tau_i. \qquad (12.13)$$

За параметричними рівняннями поправок визначають поправки v_i до виміряних величин x_i

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \ldots + a_{ik}\tau_k + l_i, \qquad (12.14)$$

або $$v_i = a_i\delta x_1 + a_i\delta x_2 + \ldots + a_i\delta x_k + l_i \qquad (12.14,a)$$

Вирівняні значення виміряних величин обчислюють за формулою

$$x_i' = x_i + v_i. \qquad (12.15)$$

При застосуванні ЕОМ розв'язання системи (12.12) доцільно виконувати таким чином : .

– із першого рівняння знайдемо вектор Δx .

Δx = - Q B^TK – Q A^TP L= - Q (B^TK+A^TP L), де Q = N^{-1}; (12.16)

- через підставлення виразу (12.16) в друге рівняння (12.12) знайдемо - B Q B^TK + W – B Q A^TP L = 0, .
або .

$$N K + W' = 0, \qquad (12.17)$$

де матриця N = B Q B^T, W′ = - W + B Q A^TP L. .

Спочатку розв'язують нормальне рівняння .

$$N \Delta x + A^T P L = 0 .$$

і не звертаючи увагу на корелати (12.12), знаходять вектор Δx та матрицю Q, як розглянуто в п. 1.4. Потім за виправленими вимірами обчислюють вектор нев'язок , який співпадає з вектором W′ і матрицею N. .

Для оцінки точності необхідно обчислити середню квадратичну похибку одиниці ваги. Для цього потрібна квадратична форма Ф = V^TPV = $[pv^2]$, яка обчислюється за формулою

$$[pv^2] = [pa_1v]\tau_1 + [pa_2v]\tau_2 + \ldots + [pa_kv]\tau_k + [plv]. \quad .$$

З урахуванням системи рівнянь (12.8) отримаємо .
$[pv^2]$ = - $(B_{11}k_1+B_{12}k_2+\ldots+B_{1s}k_s)\tau_1-\ldots-(B_{k1}k_1+B_{k2}k_2+\ldots+B_{ks}k_s)\tau_k + [plv] = -[B_1\tau]k_1-[B_2\tau]k_2-\ldots-[B_s\tau]k_s+[pa_1l]\tau_1+\ldots+[pa_kl]\tau_k+[pll]$. .

Згідно (12.4) $[B_i\tau]$= - W_i і тоді отримаємо

$$[pv^2] = L_1\tau_1 + L_2\tau_2 + \ldots + L_k\tau_k + W_1k_1 + \ldots + W_sk_s + [pll]. \quad (12.18)$$

В параметричному способі останній (k + r) перетворений коефіцієнт $[pll]$ буде дорівнювати $[pv^2]$, тобто .

$[pv^2] = [pll\,.\,(k+s)]$ і тоді запишемо, що .

$$[pv^2] = [pll\,.\,k] + [WK], \qquad \text{а} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}. \qquad (12.18,\text{а})$$

Матриця вагових коефіцієнтів невідомих параметрів Q визначається шляхом обчислення обернених коефіцієнтів матриці нормальних рівнянь N із системи (12.11).

Для оцінки точності функції вирівняних невідомих .

$$F'(t) = F'\,(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_k), \quad .$$

яка приведеної до лінійного виду $F' = f\ \Delta x + f_0$, як і в пара -

метричному способі виконується із застосуванням величини

$$\frac{1}{P_{F'}} = \left[f_{(m+s+1)}.\,(m+s)\right], \qquad (12.19)$$

причому коефіцієнти $f_{m+1} = f_{m+2} = \ldots\ldots = f_{(m+s+1)} = 0$. [4]

Для розв'язання задачі ЕОМ з метою оцінки точності всіх вирівняних невідомих

. x_i' (i = 1,2,…,m) .

знаходять матрицю вагових коефіцієнтів .

$$Q_x = Q - Q\,B^T N^{-1} BQ, \qquad (12.20)$$

яка є також верхнім лівим блоком оберненої матриці

$$N_B^{-1} = \begin{pmatrix} R & B^T \\ B^T & 0 \end{pmatrix}. \quad .$$

Тоді обернену вагу будь – якої функції можна знайти за

формулою $\frac{1}{P_{F'}} = f Q_x f^T$ або $Q_{F'} = f Q_x f^T$. (12.21)

12.2. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.

Для ілюстрації параметричного способу із залежними параметрами використаємо дані з прикладів 5.1 і 5.2.

Умова задачи. Виконати вирівнювання виміряних кутів в мережі тріангуляції, які наведені в прикладі 5.1, причому в якості невідомих параметрів прийняти дирекціоні кути сторін. Оцінити точність вирівняних довжини сторони СД і всіх дирекційних кутів.

Розв'язання. Згідно прикладу 5.1 матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь дорівнює (табл.5.3):

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (5.2)$$

а вектор вільних членів дорівнює:

$$A^T P\, L = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ -8{,}6 \\ -10{,}3 \\ 18{,}0 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}, \qquad \text{величина } [ll] = 165{,}74.$$

Рівняння, яке зв'язує невідомі поправки до дирекційних кутів має вид базисного умовного рівняння

$$\frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_{\mathrm{I}})\sin(\alpha_3 - \alpha_2)\sin(\alpha_5 - \alpha_4)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\sin(\alpha_4 - \alpha_3)\sin(\alpha_{\mathrm{II}} - \alpha_5)} = 1, \qquad (12.22)$$

в якому виміряні кути x_i виражені як різності дирекційних кутів. Після логарифмування отримуємо

$$\lg b_1 - \lg b_2 + \Sigma \pm \lg \sin(\alpha_j - \alpha_k) = 0,$$

а для приведення лівої частини до лінійного виду знайдемо часткові похідні .

$$\left(\frac{\partial \lg \sin(\alpha_j - \alpha_k)}{\partial \alpha_j}\right)_0 = \frac{M}{\rho} \operatorname{ctg} x_j^{(0)}, \quad \left(\frac{\partial \lg \sin(\alpha_j - \alpha_k)}{\partial \alpha_k}\right)_0 = -\frac{M}{\rho} \operatorname{ctg} x_k^{(0)},$$

де $x_i^{(0)}$ - значення кутів, які обчислені за приблизними дирекційними кутами. Тепер рівняння (12.22) має вид

$$\pm\Sigma\left(\operatorname{ctg} x_j^{(0)} - \operatorname{ctg} x_k^{(0)}\right)\partial\alpha_i + \mathrm{W} = 0 \qquad (12.23)$$

з нев'язкою $\mathrm{W} = \left(\lg b_1 - \lg b_2 + \Sigma \pm \lg \sin x_j^{(0)}\right)\frac{\rho}{\mathrm{M}}$ (12.24)

Для мережі, яка вирівнюється, отримаємо .

$$(\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_3)\,\delta x_1 - (\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_6)\,\delta x_2 + (\operatorname{ctg} x_4 + \operatorname{ctg} x_6)\,\delta x_3 -$$
$$- (\operatorname{ctg} x_4 + \operatorname{ctg} x_9)\,\delta x_4 + (\operatorname{ctg} x_7 + \operatorname{ctg} x_9)\,\delta x_5 + \frac{W\rho}{\mathrm{M}} = 0. \qquad (12.25)$$

Керуємося наступним правилом утворення коефіцієнтів при поправках δx_j: вони дорівнюють сумі котангенсів кутів, які примикають до сторони – j і які участують в передачі довжини сторони по ланцюгу, причому якщо кути розташовані з одного боку від ній, то сума береться зі знаком "+", якщо з обох боків – зі знаком "-". Стосовно прикладу 5.1 обчислимо приблизні кути $x_1^{(0)} = 64°35'55{,}5''$, $x_4^{(0)} = 55°19'55{,}5''$, $x_6^{(0)} = 69°27'52{,}6''$, $x_3^{(0)} = 49\ 30\ 19{,}3$, $x_5^{(0)} = 55\ 20\ 32{,}8$, $x_7^{(0)} = 33\ 44\ 19{,}4$, $x_9^{(0)} = 43\ 01\ 57{,}2$ і далі складемо табл. 12.1 .

Таблиця 12.1.

№ дирекційних кутів	1	2	3	4	5
№ кутів	1 і 3	1 і 6	4 і 6	4 і 9	7 і 9
Коефіцієнти	1,329	-0,849	1,066	1,763	2,568

Нев'язку обчислюємо за формулою (12.24), але не за виміряни-

ми кутами, а за приблизними кутами $x_j^{(0)}$. Враховуючи, що $\lg b_1$= 3,2584263 і $\lg b_2$ = 3,3295004, $W' = -3{,}05 \cdot 10^{-5}$

і $w = \frac{W'\rho}{M} = -3{,}05 \cdot 10^{-5} \cdot 4{,}749 \cdot 10^{5} = -14{,}486.$.

Отже, умовне рівняння має вид .

$$1{,}329\,\delta x_1 - 0{,}849\,\delta x_2 + 1{,}066\,\delta x_3 - 1{,}763\,\delta x_4 + 2{,}568\,\delta x_5 - 14{,}486 = 0.$$

Зауважимо, що коефіцієнти цього рівняння отримуються із табл. 5.3 шляхом заміни поправок кутів поправками дирекційних кутів і заміни позначок. Таким чином, отримаємо систему, аналогічну системі (12.11,а), тобто: (12.26)

$$\left.\begin{array}{l}
2\,\delta x_1 - \delta x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}329\,k + 5{,}4 = 0;\\
-\,\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 0{,}849\,k - 8{,}6 = 0;\\
\qquad -\delta x_2 + 2\delta x_3 - \delta x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}066\,k - 10{,}3 = 0;\\
\qquad\qquad -\,\delta x_3 + 4\delta x_4 - \delta x_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1{,}763\,k + 18{,}0 = 0;\\
\qquad\qquad\qquad -\,\delta x_4 + 2\delta x_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2{,}568\,k - 4{,}5 = 0;\\
1{,}329\delta x_1 - 0{,}849\delta x_2 + 1{,}066\,\delta x_3 - 1{,}763\,\delta x_4 + 2{,}568\,\delta x_5 - 14{,}486 = 0.
\end{array}\right\}$$

Її можна розв’язати за схемою Гаусса. Причому до табл.5.2 додається ще одне еквівалентне і елімінаційне рівняння.

У нашому випадку ми застосуємо метод оберненої матриці $Q = N^{-1}$ (п. 1.4 та приклад 5.1) і використовуючи ЕОМ

отримаємо
$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}611 & 0{,}222 & 0{,}167 & 0{,}111 & 0{,}056 \\ & 0{,}444 & 0{,}333 & 0{,}222 & 0{,}112 \\ & & 0{,}833 & 0{,}333 & 0{,}167 \\ & & & 0{,}444 & 0{,}222 \\ & & & & 0{,}611 \end{pmatrix}.$$

Вектор $-QA^T L$ позначимо через ξ, він обчислений при

розв'язанні в прикладі 5.1 і дорівнює $\xi = \begin{pmatrix} -1{,}416 \\ 2{,}567 \\ 5{,}322 \\ -2{,}241 \\ 1{,}128 \end{pmatrix}$.

Тому $\Delta x = -\,Q\,B^{T}\,K + \xi$. .

Далі згідно формули (12.16) рахуючи, що матриця

B = (1,329 -0,849 1,066 -1,763 2,568), одержимо .

$$Q\,B^{T} = \begin{pmatrix} 0{,}749 \\ 0{,}169 \\ 0{,}668 \\ 0{,}101 \\ 1{,}335 \end{pmatrix}.$$

Матриця $N = B\,Q\,B^{T} = 4,814$ і $B\,\xi = 8,460$. .

Нев'язка $W' = -\,W + B\,\xi = 14,486 - 8,460 = 6{,}026$.

Із розв'язку рівняння (12.17) $4{,}814\,k + 6{,}026 = 0$. знаходимо значення корелати $k = -\,1{,}252$ і далі вектора Δx:

$$\Delta x = \begin{pmatrix} -0{,}480 \\ 2{,}776 \\ 6{,}157 \\ -2{,}144 \\ 2{,}799 \end{pmatrix} = \Delta\alpha. \quad .$$

Поправки до кутів обчислимо аналогічно тому, як це зроблено в прикладі 5.1. В результаті отримаємо вектор поправок .

$V = A\Delta x + L = (-2{,}1 - 2{,}8 - 0{,}5 + 2{,}0 + 1{,}7 + 3{,}4 - 2{,}8 - 2{,}1 + 0{,}4)^{T}$,

який майже співпадає з вектором поправок, який обчислений в прикладі 5.2 табл.5.8.

Оцінка точності. 1. Величина $[vv]$ = L^T L +L^T A Δx +W^T K =

$$165{,}74+(5.4 - 8.6 - 10.3 \;\; 18.0 \;\; -4{,}5) \times \begin{pmatrix} -0{,}480 \\ 2{,}776 \\ 6{,}157 \\ -2{,}144 \\ 2{,}799 \end{pmatrix} + 14{,}49\times(-1{,}252) = 42{,}81.$$

Середня квадратична похибка $m = \sqrt{\frac{42{,}81}{5}} = 2{,}9''$.

2. Згідно формули (12.20) знайдемо матрицю вагових коефіцієнтів вирівняних дирекційних кутів. Згідно (12.20) матиме

$$Q_x = Q - \Delta Q \qquad \text{і} \qquad \Delta Q = Q\, B^T N^{-1}\, Q\, B =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}749 \\ 0{,}168 \\ 0{,}668 \\ 0{,}101 \\ 1{,}335 \end{pmatrix} \times 0{,}208 \times (0{,}749 \quad 0{,}168 \quad 0{,}668 \quad 0{,}101 \quad 1{,}335) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}116 & 0{,}026 & 0{,}104 & 0{,}016 & 0{,}208 \\ & 0{,}006 & 0{,}023 & 0{,}004 & 0{,}046 \\ & & 0{,}092 & 0{,}014 & 0{,}185 \\ & & & 0{,}002 & 0{,}028 \\ & & & & 0{,}370 \end{pmatrix} = \Delta Q. \qquad .$$

Шукана матриця $$Q_x = \begin{pmatrix} 0{,}495 & 0{,}196 & 0{,}063 & 0{,}095 & -0{,}152 \\ & 0{,}438 & 0{,}310 & 0{,}218 & 0{,}065 \\ & & 0{,}741 & 0{,}319 & -0{,}018 \\ & & & 0{,}442 & 0{,}194 \\ & & & & 0{,}241 \end{pmatrix}.$$

В частковості, для дирекційного кута $\alpha_3 = x_3'$, $\frac{1}{P_{x_3}} = 0{,}741$.

3. Для оцінки точності довжини сторони СД складемо функцію $S_{СД} = \frac{b_1 \sin x_3^{(0)} \sin x_5^{(0)}}{\sin x_1^{(0)} \sin x_4^{(0)}} = \frac{b_1 \sin(\alpha_1 - \boldsymbol{\alpha_1}) \;\; \sin(\alpha_2 - \alpha_4)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_4 - \alpha_3)}$ або

її логарифм $\lg S = \lg b_1 + \lg\sin(\alpha_1 - \alpha_I) + \lg\sin(\alpha_2 - \alpha_4) -$

$- \lg\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \lg\sin(\alpha_4 - \alpha_3)$.

Приведемо цю функцію до лінійного виду і отримуємо

$$\frac{\rho}{\mathrm{M}} \lg S = f_0 + f_j\ \Delta x_j,$$

де $f_1 = \operatorname{ctg} x_3^{(0)} + \operatorname{ctg} x_1^{(0)} = 1{,}329;$

$f_2 = \operatorname{ctg} x_5^{(0)} + \operatorname{ctg} x_1^{(0)} = 0{,}216;$

$f_3 = \operatorname{ctg} x_4^{(0)} = 0{,}692;$

$f_4 = -(\operatorname{ctg} x_5^{(0)} + \operatorname{ctg} x_4^{(0)}) = -1{,}387;$

$f_5 = 0.$

Тому $f = (1{,}329 \quad 0{,}216 \quad 0{,}692 \quad -1{,}387 \quad 0)$.

Далі згідно формули (12.21) знайдемо

$\frac{1}{P_{F'}} = f Q_x f^T = (0{,}613 \quad 0{,}267 \quad 0{,}221 \quad -0{,}219 \quad -0{,}469)\, f^T = 1{,}330.$

Так, як оцінювана функція $\mathrm{F} = \frac{\rho}{\mathrm{M}} \lg S$, то $m_F = \frac{m_S}{S}\rho$.

Середня квадратична похибка $m_F = \mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_{F'}}} = 2{,}9\ \sqrt{1{,}33} = 3{,}34$.

Тому $\frac{m_S}{S} = \frac{m_F}{\rho} = \frac{3{,}34}{2{,}062}\, 10^{-5} = \frac{1}{61800}$.

12.3. КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ З ДОДАТКОВИМИ НЕВІДОМИМИ.

Другім широко поширеним комбінованим способом вирівнювання на ЕОМ є **корелатний спосіб**, або **спосіб умов з додатковими невідомими**, який був запропонований Ф. Гельмертом . Він дозволяє спрощувати складання умовних рівнянь, хоча і збільшує їх число. Спрощення умовних рівнянь досягається шляхом введення в рівняння t- не

виміряних величин (додаткових невідомих), причому число умовних рівнянь буде дорівнювати $r' = r + t = n - k + t$. (12.27)

Так, якщо в мережі трикутників (рис.9.7) не був виміряний будь – який кут, наприклад x_j, то вводячи його як невідоме, визначимо $r' = n - k + t = 8 - 4 + 1 = 5$ умовних рівнянь. .

Додаткові невідомі у вигляді поправок орієнтуючих кутів і координат вузлових точок вводять при вирівнюванні полігонометричних мереж (див. вираз 9,74), що спрощує вид умовних рівнянь.

Розглянемо стисло теоретичні основи вирівнювання цим способом. На відміну від корелатного способу нехай матиме вихідну систему рівнянь зв'язку числом $r' = r + t$. .

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = (x_1', x_2', \ldots, x_n', z_1, z_2, \ldots, z_t) = 0; \\ \varphi_2 = (x_1', x_2', \ldots, x_n', z_1, z_2, \ldots, z_t) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r = (x_1', x_2', \ldots, x_n', z_1, z_2, \ldots, z_t) = 0, \end{array}\right\} \qquad (12.28)$$

де x_i', z_j - відповідно істинні значення виміряних величин та невиміряні невідомі. Приводячи рівняння (12.28) до лінійного вигляду, одержимо .

$$\left.\begin{array}{l} [av] + [A\delta z] + W_1 = 0; \\ [bv] + [B\delta z] + W_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [gv] + [G\delta z] + W_{r'} = 0, \end{array}\right\} \qquad (12.29)$$

де $a_i, b_i, \ldots, g_i$ – часткові похідні функцій φ_i за аргументами X_i і обчислені при $X_i = x_i$, а коефіцієнти

$$A_j = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}; \quad B_j = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}; \ldots\ldots; G_j = \left(\frac{\partial \varphi_{r'}}{\partial z_j}\right)_{z_j = z_j^{(0)}}.$$

Величини $z_j^{(0)}$ – це наближені значення невідомих, які обчислюються за виміряними значеннями x_i. Нев'язки .

$$W_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, , z_t^{(0)}). \quad .$$

В матричній формі систему рівнянь (12.29) має вигляд: .

$$\text{B V} + \beta\Delta\text{z} + \text{W} = 0, \qquad (12.30)$$

де матриці $\text{B}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$; $\beta=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_t \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_t \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ G_1 & G_2 & \cdots & G_t \end{pmatrix}$; $\text{W}=\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_{\text{r}'} \end{pmatrix}$.

Розв'язуючи систему рівнянь (12.30) під умовою $\Phi = V^{\text{T}}\text{PV} = \min$, складемо функцію Лагранжа .

$$\Phi = V^{\text{T}}\ \text{P V} - 2\ K^T(\text{B}V + \beta\Delta\text{z} + \text{W}). \quad .$$

Далі находимо похідні $\frac{\partial\Phi}{\partial V} = 2V^{\text{T}}\text{P} - 2\ K^T\text{B}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\text{Z}} = -\ 2K^T\beta$.

Прирівнюємо їх до нуля і отримаємо, як і в корелатному способі $V = P^{-1}B^T\ K$ (12.31)

і додаткове рівняння $\beta^T\ K = 0$. (12.32)

Підставимо рівняння (12.29), (12.30) і з'єднуємо з (12.32), тоді будемо мати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \text{N}\,K + \beta\Delta\ \text{z} + \text{W} = 0; \\ \beta^T\ K = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (12.33)$$

із симетричною матрицею коефіцієнтів $N_\beta = \begin{pmatrix} \text{N} & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}$ (12.34)

З матрицею такого виду ми зустрічалися в параметричному способі із залежними параметрами (п.12.1). В докладному запису (12.34) має вид (при $\frac{1}{p_i} = 1$). .

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]k_1 + [ab]k_2 + \cdots + [ag]k_{r'} + A_1\,\delta z_1 + A_2\delta z_2 + \ldots + A_t\delta z_t + W_1 = 0; \\
[ab]k_1 + [bb]k_2 + \cdots + [bg]k_{r'} + B_1\delta z_1 + B_2\delta z_2 + \ldots + B_t\delta z_t + W_2 = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[ag]k_1 + [bg]k_2 + \cdots + [gg]k_{r'} + G_1\delta z_1 + G_2\delta z_2 + \ldots + G_t\delta z_t + W_t = 0; \\
A_1k_1 + B_1k_2 + \cdots + G_1k_{r'} = 0; \\
A_2k_1 + B_2k_2 + \cdots + G_2k_{r'} = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_tk_1 + B_tk_2 + \cdots + G_tk_{r'} = 0. \qquad (12.33)
\end{array}\right\}$$

Загальне число рівнянь тут дорівнює s = r′ + t = r + 2t. Розв'язуючи систему (12.33) будь-яким способом, знайдемо поправки δz_j, корелати k_h і потім поправки .

$$v_i = a_ik_1 + b_ik_2 + \ldots + g_ik_{r'}, \qquad (12.35)$$

Вирівняні величини будуть дорівнювати

$$x_i' = x_i + v_i; \qquad z_i' = z_i^{(0)} + \partial z_i.$$

Остаточним контролем розв'язання задачи будуть рівності

$$\varphi_h = (x_1', x_2', \ldots, x_n', z_1', z_2', \ldots, z_t') = 0,$$

а якщо коефіцієнти системи (12.33) обчислені правильно, то достатньо перевірити умову $W_h' = 0$, де W_h' - нев'язки, які обчислені за вирівняними значеннями x_i' і z_i'.

Для даного способу вирівнювання так же, як і в корелатному способі справедливі контрольні формули вида .

$$-[pvv] = [kw] = [w_{s+1}.s] = [\Sigma_{s+1}.s],$$

причому $w_{r'+1} = w_{r'+2} = \ldots = w_{s+1} = 0$, $\Sigma_{s+1} = [w]$.

Обернену вагу функції $\frac{1}{P_{F'}}$ обчислюють в додатковій графі за тим же правилом, що і в корелатному способі, тобто

$$\frac{1}{P_{F'}} = [N_{ff}.(r+s)].$$

Систему (12.34) можна розв'язати в матричній формі за

формулами $K = - N^{-1} \beta \Delta z - N^{-1} W$,

$$\beta^T N^{-1} \beta \Delta z + \beta^T N^{-1} W = 0. \qquad (12.36)$$

або $R \Delta z + b = 0$, (12.37)

де $R = \beta^T N^{-1} \beta$; $b = \beta^T N^{-1} W$. .

Із формули (12.37) находимо вектор $\Delta z = - R^{-1} b$.

і далі згідно формулам (12.36) вектор корелат. Можна

також застосувати формулу $\begin{pmatrix} K \\ \Delta z \end{pmatrix} = - N_\beta^{-1} \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix}$. (12.38)

Оцінка точності. 1. Середню квадратичну похибку одиниці ваги обчислюють за формулою $\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$. .

2. Для оцінки точності вирівняних невідомих обчислюють, як і в параметричному способі, обернену матрицю

$$N_\beta{}^{-1} = \begin{pmatrix} N & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{k'} & Q_{k'z'} \\ Q_{k'z'}^T & -Q_{z'} \end{pmatrix}, \qquad (12.39)$$

причому $Q_{z'} = \beta^T N^{-1} \beta$ (12.40)

є матрицею вагових коефіцієнтів величин z'_i Її можна отримати в схемі Гаусса, як і в параметричному способі (причому матрицю $Q_{k'}$ можна не обчислювати). Ваги $p_{z_t'}$ і $p_{z_{t-1}'}$ можна отримати за формулами обчислення ваг останнього і передостаннього невідомого. .

3.Для оцінки точності будь – якої функції вирівняних величин $F' = F'(x_1', x_2', \ldots, x_n', z_1', z_2', \ldots, z_t')$ її приводять до

лінійного виду $F' = [fv] + [\Phi\delta z] + f_0$, .

де $f_i = \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i}\right)_0$, $\Phi_i = \left(\frac{\partial F'}{\partial z_j}\right)_0$.

Величина f_0 для оцінки точності не потрібна. Далі в схему Гаусса додають стовпець

$$\begin{pmatrix} [\pi af] \\ [\pi bf] \\ \vdots \\ [\pi gf] \\ \hline \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_t \\ \hline [\pi ff] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_f \\ \hline \Phi^T \\ \hline N_{ff} \end{pmatrix}. \quad .$$

Обернену вагу отримують у виді алгоритму $\frac{1}{P_{F'}} = [\pi ff.s]$, а якщо відома обернена матриця (12.39), то застосовують формулу

$$\frac{1}{P_{F'}} = N_{ff} - \left(N_f^T \cdot \Phi\right)\begin{pmatrix} Q_{k'} & Q_{k'z'} \\ Q_{k'z'}^T & -Q_{z'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_f \\ \Phi^T \end{pmatrix}. \qquad (12.41)$$

12.4. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ СПОСОБОМ УМОВ З ДОДАТКОВИМИ НЕВІДОМИМИ. .

Виконати вирівнювання мережі тріангуляції (рис.5.1.) за способом умов з додатковими невідомими, якщо кут x_4 не був виміряний. Вихідні дані: lg b_1= 3,258 4263, lg b_2=3,329 5004, ьВОА = 224°19′40,5″[4]. .

В цьому побудуванні виникають таки умовні рівняння:

а) фігур: $v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0$, .

$v_7 + v_8 + v_9 + w_3 = 0$; .

б) жорсткого кута $v_2 + v_5 + v_8 + w_4 = 0$; .

в) базису .

$$v_1 - 1{,}80v_3 + 1{,}46\,\delta z - 0{,}79v_6 + 3{,}15\,v_7 - 2{,}26\,v_9 + 10{,}8 = 0. \qquad (12.42)$$

Таблиця 12.2. Коефіцієнти умовних рівнянь і поправки v_i .

№ виміряних кутів	Коефіцієнти						Поправки v_i
	a_i	b_i	c_i	d_i	l_r	f_i	
1	1				1,00	- 1,00	2, 70
2	1			1			-2, 36
3	1				-1,80	1,80	-0,34
5		1		1		1,46	0,74
6		1			-0,79		1,90
7			1		3,15		-3,75
8			1	1			-1,58
9			1		-2,26		0,83
k	1, 858	1,236	-1,083	-0,498	-0,846	$[v^2]$= 34,38	

Для складання останнього рівняння, кут x_4 можна виразити за формулою x_4 = 180° - x_5 -x_6 . Проте для спрощення складання базисного рівняння цього робити не будемо, а введемо додаткове невідоме Z = x_4 . .

Тоді до умовних рівнянь фігур слід додати рівняння

$$v_5 + v_6 + \delta z + w_2 = 0. \quad .$$

Базисне умовне рівняння співпадає з рівнянням (12.42) . Перепишемо його у виді

$$v_1 - 1{,}80v_3 - 0{,}79v_6 + 3{,}15\, v_7 - 2{,}26\, v_9 + 1{,}46\delta z + w_5 = 0.$$

Якщо приблизним значенням $z^{(0)}$ прийняти відоме значення x_4, то нев'язки всіх умовних рівнянь співпадуть з тими, які отримані в попередньому прикладі (приклад 5.2). . Систему (12.33) складемо з допомогою таблиці 12.3. . Таблиця 12.3. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$e]$	$f]$
$[a$	3	0	0	1	-0,80	0,80
$[b$		2	0	1	-0,79	1,46
$[c$			3	1	0,89	0
$[d$				3	0	1,46
$[e$					19,894	- 4,24
$[f$						6,372

Матриця β^T= (0 1 0 0 1,46) Таким чином, система рівнянь (12.33) має симетричну матрицю. .

$$N_\beta = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & -0{,}80 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & -0{,}79 & 1 \\ & & 3 & 1 & 0{,}89 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 19{,}894 & 1{,}46 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}.$$

На ЕОМ отримаємо обернену матрицю .

$$N_\beta{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3811 & -0{,}0031 & 0{,}0465 & -0{,}1415 & 0{,}0021 & 0{,}1494 \\ & 0{,}0851 & 0{,}0297 & -0{,}0372 & -0{,}0583 & 0{,}8209 \\ & & 0{,}3913 & -0{,}1558 & -0{,}0203 & 0{,}0803 \\ & & & 0{,}4480 & 0{,}0255 & -0{,}3502 \\ & & & & 0{,}0399 & 0{,}1227 \\ & & & & & -1{,}1946 \end{pmatrix}$$

З вектором вільних членів W = $(5{,}4\ \ -7{,}1\ \ 4{,}5\ \ 3{,}2\ \ 10{,}8\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ за формулою $\begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \delta z \end{pmatrix}$= - $N_\beta{}^{-1}$W знаходимо вектор корелат **К = (-1,858 -1,236 -1,083 -0,498 -0,846)** і поправку $\boldsymbol{\delta z}$ **= +4,456**. Величина - $[\boldsymbol{kW}]$ **= 34,41**. Поправки v_i обчислені в табл. 12.2 за формулою (12.35). В табл.12.4 обчислені вирівняні кути, остаточні нев'язки трикутників і відомого кута. В табл.12.5 обчислена остаточна нев'язка базисної умови.

Таблиця 12.4.

№ трикутників	№ кутів	Вирівняні кути	№ трикутників	№ кутів	Вирівняні кути
1	1 2 3	64°35′58,2″ 65 53 42,8 49 30 19,0	3	7 8 9	33° 44′ 15,7″ 103 13 41,8 43 02 02,5
	Σ	180 00 00,0 w_1'=0		Σ	180 00 00,0 w_3'=0
2	4 5 6	55 19 49,7 55 12 15.8 69 27 54,5	Обчислений кут ВОА	2 5 8	65° 53′ 42,8″ 55 12 15,8 103 13 41,8
	Σ	180 00 00,0 w_2'=0		Σ	224 19 40,4
			Відомий кут		224 19 40,5 w_4'=0,1

Таблиця 12.5.

№ кутів	Вирівняні кути x_i'	lg sin x_i'	№ кутів	Вирівняні кути x_i'	lg sin x_i'
1 4 7	64°35′58.2″ 55 19 49,7 33 44 15,7	-0,044 1528 -0,083 8922 -0,255 4007	3 6 9	43°30′ 19,0″ 69 27 54,5 43 02 02,5	-0,118 9203 -0,028 5113 -0,165 9402
		3,329 5004 2,9450547			3,258 4263 2,9450545.

$w_6' = 2 \cdot 10^{-7} \approx 0.$

Оцінка точності.

1. Середня квадратична похибка виміру одного кута

$$m = \sqrt{\frac{34,41}{4}} = 2,9''.$$

2. За формулою (12.41), рахуючи, що

. N_f = (0,80 1,46 0 1,46 -4,24 6,372), Ф = - 1,46,

знаходимо $(N_f^T \cdot \Phi) N_\beta{}^{-1} \begin{pmatrix} N_f \\ \Phi^T \end{pmatrix} =$

$= (-\ 0,133\ -\ 0,884\ \ 0,019\ \ 0,857\ -\ 0,394\ \ 2,031) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{N_f} \\ \Phi^{\boldsymbol{T}} \end{pmatrix} = -\ 1,440.$

$\frac{1}{P_{F'}} = N_{ff} - (-\ 1,440) = 6,372 + 1,440 = 7,812.$

Далі обчислимо $m_{\lg S} = 2,9\sqrt{7,812} = 8,1$ (одиниць 6 знаку логарифму) і $\frac{m_S}{S} = \frac{m_{\lg S}}{\mathrm{M}} = \frac{8,1}{0,43 \cdot 10^6} = \frac{1}{53\ 000}$.

3. Середня квадратична похибка невідомого z (кута x_4 ′)

$$m_{z'} = m_{x_4'} = 2,9\sqrt{1,195} = 3,2''.$$

(величина 1,195 є взятий з позначкою “+” останній

елемент діагоналі матриці $N_\beta{}^{-1}$, що слідує із виразу (12.39).

12.5. ВИРІВНЮВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ.

У переважній більшості при виконанні вирівнювання допускають, що вихідні дані (координати та висоти пунктів, вихідні сторони та дирекціоні кути) безпомилкові. Але їх отримують за результатами спостережень або із вирівнювання геодезичних мереж більш високої точності (класів, розрядів) і тому, безперечно, вони обтяжені похибками. Якщо при постановці задачи вирівнювання не можна нехтувати похибками вихідних даних, то виникає задача вирівнювання з врахуванням похибок вихідних даних. Це дозволяє дослідити рівень їх впливу на складові елементи геодезичної мережі після вирівнювання параметричним або корелатним способами.

12.5.1. ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ

Третій спосіб вирівнювання на ЕОМ застосовується при наявності похибок вихідних даних. У цьому випадку кількість параметрів визначається за формулою .

$$s = k + m, \qquad (12.43)$$

де k – кількість невідомих шуканих параметрів; m - кількість невідомих параметрів вихідних даних. Точні значення параметрів позначимо відповідно через $T_1, T_2, \ldots, T_k$ та $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$. Між ними повинен бути відсутній функціональний зв'язок. Істинні значення результатів вимірів X_i та їх параметри виражаються функціонально рівняннями зв'язку за формулою .

$$X_i = f_i(T_1, T_2, \ldots, T_k, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m), \qquad (12.44)$$

причому, кількість всіх вимірів - n повинна бути більшою за величиною k + m, тобто .

$$n > k + m. \qquad (12.45)$$

Оскільки істинні значення виміряних величин X_i параметрів T_i та Z_i невідомі, то при вирівнюванні необхідно знати ймовірні (вирівняні) значення x_i' , t_i та z_i', при яких буде задовольнятися умова .

$$x_i' = x_i + v_i = f_i(t_1, t_2,\ldots,t_k,\ z_1, z_2,\ldots, z_m), \qquad (i = 1,\ldots,n),$$
$$z_i' = z_i + v_{z_i} = \varphi_i(z_1, z_2,\ldots, z_m), \qquad (i = 1,\ldots,m) \qquad (12.46)$$

де v_i - поправки до виміряних величин; v_{z_i}- поправки до вихідних даних. Вирівняні параметри визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} t_i &= t_i^0 + \tau_i; \\ z_i' &= z_i + \Delta z_i, \end{aligned}\right\} \qquad (12.47)$$

де t_i^0 - наближені значення параметрів; τ_i, Δz_i - поправки до i – го параметра. Рівняння поправок у загальному вигляді

$$\left.\begin{aligned} v_i &= f_i(t_1, t_2,\ldots,t_k,\ z_1, z_2,\ldots, z_m) - x_i; \\ v_{z_i} &= \varphi_i(z_1, z_2,\ldots, z_m) - z_i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.48)$$

За умови, що результати вимірів і вихідних даних незалежні між собою, маємо за принципом методу найменших квадратів

$$[pv^2] + [p_z\ v_z^2] = \min . \qquad (12.49)$$

Зведемо рівняння (12.48) до лінійного виду розкладенням в ряд Тейлора і отримаємо параметричні рівняння поправок:

$$\left.\begin{aligned} v_i &= a_{i1}\tau_1 + \ldots + a_{ik}\tau_k + b_{i1}\Delta z_1 + \ldots + b_{im}\Delta z_m + l_{1i}; \\ v_{z_i} &= c_{i1}\Delta z_1 + \ldots + c_{im}\Delta z_m + l_{2i} = \Delta z_i, \end{aligned}\right\} \qquad (12.50)$$

де $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \tau_j}$, $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_i}$, $c_{ii} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i} = 1$, $c_{ij} = 0$

- коефіцієнти параметричних рівнянь поправок;

$l_{1i}=f_i(t^\circ{}_1,..,t^\circ{}_k, z_1,..,z_m)$ -x_i; $l_{2i}=f_i(z_1, z_2,\ldots, z_m)$ -z_i =0

– вільні члени параметричних рівнянь поправок, причому вільні члени - l_{2i} завжди дорівнюють нулю, оскільки наближені значення параметрів вихідних елементів геодезичних мереж дорівнюють значенням вихідних параметрів.

Система параметричних рівнянь поправок буде

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_{11}\tau_1+ \ldots.+ a_{1k}\tau_k+ b_{11}\Delta z_1+\ldots..+ b_{1m}\Delta z_m+ l_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n=a_{n1}\tau_1+ \ldots.+ a_{nk}\tau_k+ b_{n1}\Delta z_1+\ldots..+ b_{nm}\Delta z_m+ l_n; \\ v_{z_1}= \Delta z_1; \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_{zm} =\Delta z_m. \end{array}\right\} \quad (12.51)$$

В матричному виду ця система дорівнює

$$\left.\begin{array}{l} V = A\,\tau + B\,\Delta z + l, \\ V_z = \Delta z, \end{array}\right\} \quad (12.52)$$

де A(n×k) =$\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1k} \\ \ldots\ \ldots\ \cdots\ \ldots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nk} \end{pmatrix}$; B(n×m) =$\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\cdots b_{1m} \\ \ldots\ \ldots\ \cdots\ \ldots \\ b_{n1}\ \ b\ \cdots b_{nm} \end{pmatrix}$;

$$C=\begin{pmatrix} 1\ \cdots\ 0 \\ \ldots\ \cdots\ \ldots \\ 0\ \cdots\ 1 \end{pmatrix}= E. \quad (12.53)$$

За принципом найменших квадратів складемо функцію

$\varphi(\tau, z)= \sum_{i=0}^{n} P_i\,([a_i\,\tau] + [b_i\,\Delta z] + l)^{\,2} + \sum_{i=0}^{n} P_{z_i}\,v_{z_i}{}^{2}$ =min.(12.54).

При визначенні екстремуму функції (12.54) отримаємо:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau_j} = 2P_1\ v_1a_{1i}+2P_2\ v_2a_{2i}+\ldots+2P_n\ v_na_{ni} = [pa_i\,v] = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i}=2P_1v_1b_{1i}+\ldots+2\,P_nv_nb_{ni}+2\,P_{z_1}v_{z_1}+\ldots+2\,P_{z_m}v_{z_m}=[PB^TV]+[P_zV_z]=0.$$

В матричному виді маємо систему скорочених нормальних рівнянь: $[P\,A^TV] = 0$ і

$$[P\,B^TV] + [P_zV_z] = 0. \qquad (12.55)$$

Підставимо рівняння (12.52) до рівнянь (12.55) і отримаємо систему нормальних рівнянь з рахунком, що $\sqrt{z} = \Delta z$

$$\left.\begin{aligned} A^TPA\,\tau + A^TPB\Delta z + A^TP\ l = 0;\\ B^T\ PA\,\tau + (B^TPB + P_z)\,\Delta z + B^TPl = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.56)$$

Позначимо добутки матриці через: $R_{11}= A^TPA$; $R_{12}= A^TPB$;

$R_{21}=B^TPA$; $R_{22}'=R_{22}+P_z = B^TPB+P_z$; $L_1=A^TP\ l$; $L_2= B^TPl$.

Тоді отримаємо систему нормальних рівнянь виду

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad (12.57)$$

Матриця ваги вихідних даних P_z в системі нормальних рівнянь (12.56) завжди визначається із результатів вимірів або обчислень через їх дисперсії σ_1^2 або середні квадратичні похибки - m. При цьому слід задатися дисперсією одиниці ваги μ^2. Тоді вага вихідних даних обчислюється за формулою:

$$P_{z_1} = \frac{\mu^2}{\sigma_{z_1}^2} \qquad \text{або} \qquad P_{z_1} = \frac{\mu^2}{m_{z_1}^2}.$$

Вихідні дані практично залежні між собою. Коефіцієнти кореляції взагалі можна отримати із результатів оцінки точності геодезичних мереж, до яких відносились вихідні дані. Разом з тим для спрощення обчислень при значному віддаленні вихідних елементів між собою кореляція незначна і через те її не враховують. Тому матри-

ця ваги вихідних даних має діагональний вигляд, оскільки вони приймаються незалежними між собою, тобто кореляційний зв'язок незначний і його не враховують. .

Тоді матриця ваги вихідних даних має діагональний вигляд, оскільки вони приймаються незалежними між собою, тобто

$$P_z\ (\mathrm{m}\times \mathrm{m}) = \begin{pmatrix} P_{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{z_m} \end{pmatrix}. \qquad (12.58)$$

Матриця R має такі розміри: .

R_{11}-(n×k); R_{12}-(n×m); R_{21}-(m×n); R_{22}- (m×m); P_z -(m×m).

Тоді матриця $R_{22}' = R_{22} + P_z$ визначається шляхом додавання діагональних елементів матриць R_{22} і P_z. .

Із розв'язання системи нормальних рівнянь (12.57) визначають поправки до параметрів τ та Δz. За формулами (12.52) обчислюють поправки до виміряних величин $\boldsymbol{v}_i$.

Для оцінки точності визначають обернену матрицю $Q = R'^{-1}$.

або

$$Q = R'^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_t & Q_{tz} \\ Q_{zt} & Q_z \end{pmatrix}. \qquad (12.59)$$

В рівняннях (12.59) Q_t - вагові коефіцієнти шуканих невідомих параметрів t, а Q_z – вагові коефіцієнти вихідних даних. Інші коефіцієнти виражають залежність між параметрами t_i і t_j; z_i і z_j; t_i і z_j. Розмірності матриць Q та R дорівнюють відповідно. Для оцінки точності обчислюють $[pv^2]^* = [pv^2] + [p_z\ v_z^2]$ за формулою

$$[pv^2] = p_1 v_1^2 + \dots + p_n v_n^2 + p_{z_1} v_{z_1}^2 + \dots + p_{z_m} v_{z_m}^2 \qquad (12.60)$$

або при розв'язанні нормальних рівнянь за схемою Гаусса

$$[pv^2]* = [pll] + E_1L_1 + E_2[L_2.1] + \ldots\ldots + E_k[L_k.(k-1)] + E_{k+1}[L_{k+1}.k] + \ldots + E_{k+m}[L_{k+m}.(k+m-1)] \quad (12.61)$$

також

$$[pv^2]^* = [pll] - \frac{L_1}{N_{11}}L_1 - \frac{[L_2.1]}{[N_{22}.1]}[L_2.1] - \ldots - \frac{[L_k.(k-1)]}{[N_{kk}.(k-1)]}[L_k.(k-1)] - \frac{[L_{k+1}.k]}{[N_{k+1,k+1}.k]}[L_{k+1}.k] - \ldots - \frac{[L_{k+m}.(k+m-1)]}{[N_{k+m,k+m}.(k+m-1)]}[L_{k+m}.(k+m-1)]. \quad (12.62)$$

Середні квадратичні похибки одиниці ваги визначаються за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]^*}{r}}. \quad (12.63)$$

Середні квадратичні похибки шуканих параметрів та вихідних даних визначаються за формулами:

$$m_{t_i} = \mu\sqrt{Q_{t_{ii}}}; \quad (12.64)$$

$$m_{z_i} = \mu\sqrt{Q_{z_{ii}}}. \quad (12.65)$$

Зазначимо, що в загальному випадку дисперсія шуканих параметрів $\sigma_{t_i}^2$ буде обтяжена часткою $\Delta\sigma_{t_i}^2$ за рахунок впливу похибок вихідних даних, тобто

$$\sigma_{t_i}^2 = \sigma_{t_{i'}}^2 + \Delta\sigma_{t_i}^2, \quad (12.66)$$

де $\sigma_{t_{i'}}^2$ –дисперсія параметра без впливу похибок вихідних даних. За критерієм незначного впливу похибок вихідних даних повинна дотримуватись умова

$$\Delta\sigma_{t_i}^2 \le 0{,}11\ \sigma_{t_{i'}}^2 \quad (12.67)$$

або

$$\Delta Q_{t_{ii}} \le 0{,}11 Q_{t_{ii'}}. \quad (12.68)$$

Для перевірки нерівності (12.68) слід додатково обчислити

обернену матрицю $Q_t = \mathrm{R}_{11}{}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} Q_{12} \ldots Q_{1k} \\ Q_{21} Q_{22} \ldots Q_{2k} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ Q_{k1} Q_{k2} \ldots Q_{kk} \end{pmatrix}$ (12.69)

Тоді $\Delta Q_{t_{ii}} = Q_{t_{ii}} - Q_{t_{ii'}}$ (12.69).

- різниці вагових коефіцієнтів -t_{ii}, матриці Q_t . .

12.5.2. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ.

Нехай на станції між двома дирекційними кутами, заданими з точністю $\sigma_{\alpha_I} = \sigma_{\alpha_{II}} = 1''$ виміряне три кути x_i з точністю $\sigma_i = 2''$. Виміряні кути і задані дирекціоні кути наведені в таблиці 12.6. Треба виконати вирівнювання цих кутів параметричним способом. Таблиця 12.6.

Дирекціоні кути	Сек. вирівняних дирекційних кутів	Виміряні кути, x_i	Сек. вирівняних кутів
α_1 = 10° 00′ 00,0″	00,4	25°00′10,0″	11,6
α_2 =101°01′15,2″	14,8	35 50 50,5	52,1
		30 10 00,2	10,8

Таблиця 12.7.

№ кута	Невідомі				l_i	v_i
	δx_1	δx_2	δz_1	δz_2		
1	1		-1		0	1,57
2	-1	1			0	1,58
3		-1		1	5,5	1,57
δx_i	1,96	3,54	0,39	-0,39		

Розв'язання. Обчислимо наближені значення дирекційних кутів: $x_1^{(0)} = \alpha_I + x_1 = 35°00'10{,}0''$, $x_2^{(0)} = \alpha_I + x_1 + x_2 = 70°51'\,00{,}5''$

і складемо рівняння поправок для виміряних кутів: .

$v_1 = \delta x_1 - \delta z_1 + l_1$; $v_2 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_2$; $v_3 = -\delta x_2 + \delta z_2 + l_3$..

Вільні члени $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = \alpha_{II} - x_1^{(0)} - x_3 = +5{,}5''$.

За допомогою табл. 12.6. коефіцієнтів рівнянь поправок складемо нормальні рівняння з матрицею, вважаючи , що

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \qquad P_z = 0 \quad .$$

і вектор вільних членів $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5{,}5 \\ 0 \\ +5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

. Приймемо в якості дисперсії одиниці ваги $\sigma_0^2 = \sigma_i^2 = 2^2$. Тоді вага $P_i = 1$, а $P_{z_1} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{4}{1}$ і матриця $P_z = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E$ (2×2).

Тому матриця $R' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} + P_z \end{pmatrix}$.

Обернена матриця , яка отримана шляхом поділення на блоки

$$Q' = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} + VQ_{z'}V^T & -VQ_{z'} \\ -Q_{z'}V^T & Q_{z'} \end{pmatrix},$$

де $R_{11}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}667 \end{pmatrix}$. (12,70)

$V = R_{11}{}^{-1}R_{12} = R_{11}{}^{-1}(-E) = -R_{11}{}^{-1}$, .

$Q_{z'} = \left(R'_{22'} - R_{21}R_{11}{}^{-1}R_{12}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4{,}333 & -0{,}333 \\ -0{,}333 & 4{,}333 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}232 & 0{,}018 \\ 0{,}018 & 0{,}232 \end{pmatrix}$,

Матриця $Q' = \begin{pmatrix} 0{,}804 & 0{,}446 & 0{,}161 & 0{,}089 \\ 0{,}446 & 0{,}804 & 0{,}089 & 0{,}161 \\ 0{,}161 & 0{,}089 & 0{,}232 & 0{,}018 \\ 0{,}089 & 0{,}161 & 0{,}018 & 0{,}232 \end{pmatrix}$ (12,71)

Вектор поправок $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = - Q' b = (1{,}96 \quad 3{,}54 \quad 0{,}39 \quad -0{,}39)^T$.

Обчислення поправок кутів виконано в табл. 12.7 за формулою (12.52) . Вирівнювання вважаємо правильне, тому що $\sigma_{\alpha_{II}}' - \sigma_{\alpha_I}' = \sum_{i=1}^{3} x_i'$. Справедливі також контрольні формули

$$[PA^TV] = 0 \text{ і } [PB^TV] + [P_zV_z] = 0,$$

які витікають із леми Гаусса. Перша рівність перевірюється дуже легко, а для другої за допомогою табл. 12.7 отримаємо

$$\begin{pmatrix} -1{,}57 \\ 1{,}57 \end{pmatrix} + 4E \begin{pmatrix} 0{,}39 \\ -0{,}39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \approx 0.$$

Так як через мале число надлишкових вимірів (r = 5 – 4 = 1) обчислити похибку неможливо, то прийнявши $\sigma_0 = 2$, знайдемо

$$\sigma_{\alpha_I} = \sigma_{\alpha_{II}} = 2\sqrt{0{,}232} = 0{,}96''$$

(як видно, теоретична точність кутів α_1' і α_2' в результаті вирівнювання підвищена, тобто $\sigma_{\alpha_I}' = \sigma_{\alpha_{II}}' = 2\sqrt{0{,}804} = 1{,}79''$.

Так як $\Delta Q_{t_{ii}} = 0{,}137 \geq 0{,}11 Q_{t_{ii}} = 0{,}073$, то на основі формули (12.68) приходимо до висновку, що вихідні дирекціоні кути неможна прийняти безпомилковими.

12.5.3. КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ

В корелатному способі вирівнювання з врахуванням умовні рівняння зв'язку і умовні рівняння поправок складають так само як в корелатному способі. Вони включають як виміряні

величини, так і вихідні дані та їх поправки. Число їх дорівнює r = n – k, як і при безпомилкових вихідних даних. Тобто рівняння зв'язку буде .

$$\varphi_i\ (X_1, X_2,\ldots, X_n\ , Z_1, Z_2,\ldots, Z_m\ ) = 0, \qquad (12,72)$$

де X_i – істинні значення виміряних величин; Z_i - істинні значення вихідних даних. .

Нев'язки математичних умов обчислюють за формулою

$$W_i = \varphi_i\ (x_1, x_2,\ldots, x_n\ , z_1, z_2,\ldots, z_m\ ). \qquad (12,73)$$

Задача вирівнювання полягає у визначенні ймовірних значень поправок v_i, v_{z_1} за умовою (12.49). Тоді

$$\varphi_i(x_1 + v_1, x_2 + v_2,\ldots, x_n + v_n, z_1 + v_{z_1}, z_2 + v_{z_2},\ldots, z_m + v_{z_m}) = 0$$

Після розкладення функції (12,74) до лінійного вигляду отримують умовні рівняння поправок .

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \ldots + b_{in}v_n + c_{i1}v_{z_1} + c_{i2}v_{z_2} + \ldots + c_{im}v_{z_m} + W_i = 0, \quad (12,75)$$

В матричній формі маємо систему рівнянь

$$\mathrm{B\,V} + \mathrm{C}\ V_z + \mathrm{W} = 0. \qquad (12,76)$$

Складемо функцію Лагранжа $\varphi = [pv^2] + [p_z\ v_z^2]$ -

$$- \sum_1^r 2k_i([b_i v] + [c_i\ v_z] + W_i) = \min, \quad (i = 1,\ldots,n\ ). \qquad (12,77)$$

Через рівняння (12,77) визначимо екстремум функції φ і отримаємо корелатні рівняння поправок: .

$$\left.\begin{aligned} v_i &= \pi_i\ (b_{i1}\ k_i + b_{i2}\ k_2 + \ldots + b_{ir}k_r\ ); \\ v_{v_{z_i}} &= \pi_{z_i}\ (c_{i1}\ k_i + c_{i2}\ k_2 + \ldots + c_{ir}k_r\ ) \end{aligned}\right\} \qquad (12,78)$$

або в матричній формі

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{V} &= P^{-1}\ B^T\mathrm{K}\ ; \\ V_z &= P_z^{-1}\ C^T\mathrm{K}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (12,79)$$

Об'єднуємо рівняння (12,79) з (12,76) і отримаємо нормальні

рівняння: $(\mathrm{B}P^{-1}\ B^T + \mathrm{C}\ P_z^{-1}\ C^T\ )\ \mathrm{K} + \mathrm{W} = 0$ (12,80)

$$\left.\begin{array}{l} NK + W = 0, \\ N = N_1 + N_2, \quad N_1 = BP^{-1}B^T, \quad N_2 = C\,P_z^{-1}\,C^T \end{array}\right\} \qquad (12{,}81)$$

Із розв'язання нормальних рівнянь (12,81) визначають корелати K_1, K_2,….., K_r, а за формулами (12,79) обчислюють поправки до виміряних величин v_i та до вихідних даних v_{z_1}. Вирівняні значення обчислюють за формулами:

$$\left.\begin{array}{l} x_i{}' = x_i + v_i; \\ z_i{}' = z_i + v_{z_1}. \end{array}\right\} \qquad (12{,}82)$$

Оцінка точності функцій виконується так само, як і в корелатному способі. Функція складається через виміряні величини та помилкові вихідні дані, тобто

$$F_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, z_1, z_2, \ldots, z_m\,). \qquad (12{,}83)$$

а $$F' = F\,(x) + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial z_j} v_i$$

або $$F' = F\,(x) + [fv] + [f_z\,v_z].$$

В матричній формі маємо: $F' = F\,(x) + fV + f_z\,V_z$.

Обернена вага функції визначається формулою

$$\frac{1}{P_F} = N_{ff} - N_f^T N^{-1}\,N_f, \qquad (12{,}84)$$

де $$N_{ff} = f\,P^{-1}\,f^T + f_z\,P_z^{-1}\,f_z^T$$

$$N_f = BP^{-1}\,f^T + C\,P_z^{-1}\,f_z^T \qquad (12{,}85)$$

Обернена вага функції обчислюється за матрицями (12,84) або в додатковій графі при розв'язанні нормальних рівнянь за схемою Гаусса

$$\frac{1}{P_F} = N_{ff} + E_{1F}N_{1F} + E_{2F}N_{2F}^{(1)} + \ldots\ldots + E_{rF}N_{rF}^{(r-1)}, \qquad (12{,}86)$$

або $$\frac{1}{P_F} = N_{ff} - \frac{N_{1F}{}^2}{N_{11}} - \frac{[N_{2F}.1\,]^2}{[N_{22}.1]} - \ldots\ldots - \frac{[N_{rF}.(r-1)\,]^2}{[N_{rr}.(r-1)]}\,. \qquad (12{,}86,a)$$

Матрицю обернених ваг вирівняних вихідних даних можна обчислити за формулою $Q_{z'} = P_z^{-1} - P_z^{-1}C^T N^{-1} C P_z^{-1}$ (12,87)

В корелатному способі матриця $N = Q_w$ є матрицею обернених ваг нев'язок. З врахуванням формули (12,81) та критерію незначного впливу похибок вихідних даних отримаємо:

$$N_{2_{ii}} \leq 0{,}11 N_{1_{ii}} . \qquad (12{,}88)$$

Оцінка точності обчислення: $[pv^2]$, m, μ, m_z, m_F виконуються так само, як в корелатному способі вирівнювання.

12.5.4. ЗАДАЧА ВИРІВНЮВАННЯ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ.

За вихідні дані для вирівнювання корелатним способом горизонтальних кутів x_i приймемо умови задачі (12.5.2). Розв'язання. Умовне рівняння буде .

$$v_1 + v_2 + v_3 + \delta_{z_1} - \delta_{z_2} + w = 0, \quad .$$

де нев'язка $w = \alpha_{\mathrm{I}} + \sum_{i=1}^{3} x_i - \alpha_{\mathrm{II}} = -5{,}5''$. .

Матриці

Q = E, $P_z^{-1} = 0{,}25E = Q_z$, $B_1 = (1 \quad 1 \quad 1)$, $B_2 = (1 \quad -1)$.

Тому нормальне рівняння $(3 + 0{,}5)\,k - 5{,}5 = 0$. (12,89)

Так як $0{,}5 \geq 0{,}11 \cdot 3$, то на основі виразу (12,88) зробимо висновок про наявність похибок вихідних даних. Після розв'язання рівняння (12,89), знаходимо $k = \frac{5{,}5}{3{,}5} = 1{,}57$ і поправки $v_1 = v_2 = v_3 = 1{,}57''$; $\delta_{z_1} = 0{,}25 \times k = 0{,}39''$; $\delta_{z_2} = -0{,}39''$.

Для оцінювання точності функції $\alpha_{\mathrm{I}}' = \alpha_{\mathrm{I}} + x_1'$ маємо матрицю $f = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$. Алгоритми $[\pi ff] = 1{,}25$, $[\pi af] = 1{,}25$. Тому $\frac{1}{P_{F'}} = \frac{1}{P_{\alpha_1'}} = 1{,}25 - 1{,}25^2 / 3{,}5 = 0{,}804$.

Аналогічно для функції α_{I}' маємо $f = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$. $[\pi ff] = 0{,}25$, $[\pi af] = 0{,}25$ і $\frac{1}{P_{\alpha_{\mathrm{I}}'}} = 0{,}25 - 0{,}25^2 / 3{,}5 = 0{,}232$.

За формулою (12,87) $Q_{z'} = 0{,}25E - 0{,}25^2\, C^T N^{-1} C =$

$$= 0{,}25E - \frac{0{,}062}{3{,}5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}232 & 0{,}018 \\ 0{,}018 & 0{,}232 \end{pmatrix}.$$

Як видно, результати вирівнювання співпадають з результатами, які отримані при застосуванні параметричного способу, але осяг обчислення тут менше.

12.6. ВИРІВНЮВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ЗАЛЕЖНИХ ВИМІРІВ.

Результати безпосередніх вимірів окремих елементів геодезичних мереж частіше всього є незалежними, тобто некорельованими. Але при вирівнюванні мереж можуть використовувати не самі виміри, а їх функції. Наприклад, при вирівнюванні в геодезичних мережах кутів, які обчислені за незалежно виміряними напрямками способом кругових прийомів, існує кореляційна залежність між суміжними кутами, що мають загальний напрямок. Попередньо вирівняні виміри або їх функції, наприклад дирекціоні кути сторін, прирости координат та інші також мають кореляційну залежність.

Тому у випадку четвертому виникає задача вирівнювання на ЕОМ корельованих вимірів. В усіх цих випадках необхідно знати матриці їх обернених ваг Q або ваг – p, які на відміну від некорельованих вимірів, не будуть діагональними.

Метод найменших квадратів, який застосовується для некорельованих вимірів називають класичним, а для корельованих вимірів – узагальненим.

Так для виміряних кутів математично доведено, що коефіцієнт кореляції між суміжними кутами, що мають загальний напрямок завжди дорівнює r_{ij} = - 0,5.

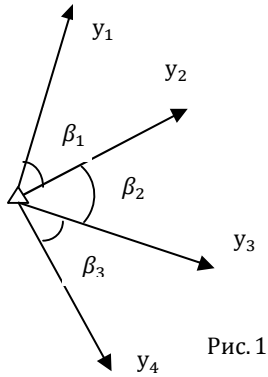
Для чотирьох напрямків на пункті (рис.12.1) маємо кути β_1, β_2, β_3, які характеризуються коефіцієнтами кореляції r_{12}= -0,5; r_{13}= -0,5; r_{23}= -0,5.

Варіаційна матриця $К_у$ має вигляд: .

. $$К_у = \begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_{y_3}^2 \end{pmatrix}, \qquad (12,90)$$

а її нормоване значення буде $\overline{К}_у = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & 0 \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ 0 & r_{32} & 1 \end{pmatrix}$, (12,91)

де $\sigma_{y_i}^2$ - дисперсія і – го кута; $К_у$ – кореляційний момент; r_{ij}- коефіцієнт кореляції. Згідно з рис.12.1, наприклад, маємо



$$\overline{К}_у = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 12.1.

12.6.1 ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВИМІРІВ.

Узагальнений спосіб вирівнювання з урахуванням корельованих елементів геодезичної мережі полягає в необхідності визначення матриці ваги вимірів Р. .

Якщо фізично існує (доведено математично або логічним аналізом) зв'язок між **n** багатократно виміряними величинами, то мірою їх точності буде дисперсія або кореляційна матриця

$$К_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (12,92)$$

Прийнявши дисперсію одиниці ваги за σ_0^2 можна отримати вагу виміряних величин за формулою $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$. (12,93)

Тоді формулу (12,92) можна звести до виду $К_х = \sigma_0^2 P_х^{-1}$

або $P_х^{-1} = \frac{К_х}{\sigma_0^2}$, (12,94) а при $\sigma_0^2 = 1$ $P_х^{-1} = К_х$. (12,95) Якщо елементи мережі є функціями від безпосередньо виконаних вимірів, то для визначення вагової матриці використовують кореляційну матрицю (12,90).

При вирівнюванні для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь при залежних вимірах необхідно використовувати недіагональною вагову матрицю P, тобто .

$$N = A^T P A; \qquad L = A^T PL, \qquad (12,96)$$

де $$P = K_х^{-1}. \qquad (12,97)$$

Нормальні рівняння визначаються за формулою .

$$N \tau + L = 0. \qquad (12,98)$$

Лема Гаусса визначається рівністю $A^T P V = 0$. . Всі інші обчислення виконують за формулами класичного параметричного способу вирівнювання. .

12.6.2. КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ВИРІВНЮВАННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВИМІРІВ.

В корелатному способі вирівнювання геодезичних мереж, при наявності залежних вимірів, виникає необхідність у визначенні матриці обернених ваг Q, яка теж не буде діагональною. Аналогічно як і в параметричному способі обернену матрицю Q можна визначити за допомогою кореляційних матриць $К_х$, коли маємо окремі залежні виміри та $К_у$ - при наявності елементів, що є функціями інших виміряних величин. Різниця лише у тому, чи виконують визначення оберненої

ваги вимірів. При цьому формула (12,93) зводиться до вигляду

$$\mathrm{P}_{\mathrm{i}}^{-1} = q_{\mathrm{i}} = \frac{\sigma_{\mathrm{i}}^2}{\sigma_0^2}\ . \qquad (12{,}99)$$

Обернена вагова матриця залежних корельованих вимірів геодезичної мережі визначається за формулою:

$$\mathrm{Q} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1^{-1} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \mathrm{P}_2^{-1} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & \mathrm{P}_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_2 & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_n \end{pmatrix}. \quad (12{,}100)$$

де $q_{ij} = \frac{\mathrm{K}_{ij}}{\sigma_0^2}$ – відносна степінь залежності між виміряними величинами. Матриця $\mathrm{Q} = P^{-1}$ використовується при обчисленні коефіцієнтів нормальних рівнянь при наявності залежних вимірів. Коефіцієнти нормальних рівнянь визначаються за матрицями .

$$\mathrm{N} = \mathrm{B}P^{-1}\ B^T \qquad \text{або}$$

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_2 & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{r1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}. \quad (12{,}101)$$

Нормальні рівняння: $\mathrm{N\,K} + \mathrm{W} = 0,$ (12,102)

а рівняння поправок $\mathrm{V} = \mathrm{Q}\ B^T\mathrm{K}$. (12,103)

Всі інші обчислення виконуються так само, як в класичному корелатному способі вирівнювання. .

Зауваження. Формули (12,98) і (12,102) показують, що їх матричний запис при наявності в геодезичній мережі залежних вимірів такий же, як і при відсутності кореляційних зв’язків в класичному способі. Різниця тільки

у використанні недіагональних матриць P і Q. Тому алгоритми Гаусса, в які включають вагу або обернену вагу, не мають місця. Вони умовно зберігаються при розв'язанні нормальних рівнянь в схемі Гаусса та квадратних коренів.

12.6.3. Задача остаточного вирівнювання дирекційних кутів в мережі тріангуляції з урахуванням залежних вимірів.

Виконати остаточне вирівнювання дирекційних кутів в мережі тріангуляції, прийнявши їх вирівняні значення в прикладі 5.1 безпосередньо виміряними значеннями (тільки за кутові умови). .

Розв'язання. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N = P_α, яка отримана в прикладі 5.1 (табл.5.3), уявляє матрицю ваг попередньо вирівняних дирекційних кутів, тобто .

$$N = P_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (12,104)$$

Для будь – якої мережі тріангуляції її можна скласти за формулами, які наведені в роботі [10]: .

а) для діагональних елементів $(P_\alpha)_{jj} = n_j$. де n_j - число кутів, які мають одну із сторін з номером j .

б) для недіагональних елементів $(P_\alpha)_{jh}$ = - 1, якщо між сторонами j та h є виміряний кут. Інші елементи дорівнюють нулеві.

При застосуванні параметричного способу вирівнювання, складемо рівняння поправок для дирекційних кутів сторін з

матрицею $A = \begin{pmatrix} 0{,}858 & -0{,}731 & 0 & 0 \\ 1{,}234 & 0{,}552 & 0 & 0 \\ -0{,}084 & 1{,}350 & 0{,}084 & -1{,}350 \\ 0 & 0 & 1{,}018 & -0{,}614 \\ 0 & 0 & 0{,}662 & 0{,}140 \end{pmatrix} \cdot 10^2$ і

вектором вільних членів L з елементами $l_i = \alpha_i^{(0)} - \alpha_i$

$L = (-0{,}1 \ -2{,}7 \ +1{,}1 \ +2{,}2 \ +2{,}6)^T$ (табл.5.15).

Далі обчислюємо матрицю .

$$P_\alpha A = \begin{pmatrix} 0{,}482 & -2{,}014 & 0 & 0 \\ 4{,}162 & 1{,}589 & -1{,}102 & 1{,}964 \\ -1{,}402 & 2{,}148 & -0{,}850 & -2{,}086 \\ -1.150 & -1{,}902 & 3{,}326 & -1{,}246 \\ 0 & 0 & 0{,}306 & 0{,}894 \end{pmatrix} \cdot 10^2,$$

потім матрицю

$$R = A^T P_\alpha A = \begin{pmatrix} 5{,}667 & 0{,}052 & -1{,}288 & 2{,}599 \\ 0{,}052 & 5{,}249 & -1{,}756 & -1{,}732 \\ -1{,}288 & -1{,}756 & 3{,}517 & -0{,}852 \\ 2{,}599 & -1{,}732 & -0{,}852 & 3{,}706 \end{pmatrix} \cdot 10^4$$

і вектор $A^T P_\alpha L = (-15{,}358 \ -5{,}910 \ +10{,}153 \ -8{,}014)^T \cdot 10^2$,

які співпадають з отриманими в прикладі 5.3. Далі, як в прикладі 5.3 знаходимо: .

- вектор поправок координат пунктів $\delta x = -P_\alpha^{-1} A^T L = (1{,}92 \quad 0{,}89 \quad -1{,}57 \quad 0{,}87)^T \cdot 10^2$; .

– вектор поправок дирекційних кутів $V_\alpha = A\,\delta x + L = \begin{pmatrix} +0{,}9 \\ +0{,}2 \\ +0{,}9 \\ +0{,}1 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$;

- вирівняні дирекціоні кути .

α_1 = 229°30′ 17,9″ + 0,9″ = 229°30′ 18,8″; .

α_2 = 294 06 17,4 + 0,2 = 294 06 17,6; .

α_3 = 183 34 12,7 + 0,9 = 183 34 13,6; .

α_4 = 238 54 00,7 + 0,1 = 238 54 00,8; .

α_5 = 281 56 01,2 – 0,4 = 281 56 00,8. .

(Попередньо вирівняні дирекціоні кути взяті в прикладі 5.1). За формулою Ф = V^TPV знаходимо суму квадратів поправок дирекційних кутів $V_\alpha^T P_\alpha V_\alpha$ = 43,26 і виконуємо контроль

$$V_\alpha^T P_\alpha V_\alpha = L^T P_\alpha \mathrm{L} + \delta x^T \mathrm{A}^\mathrm{T} P_\alpha \mathrm{L} = P_\alpha \mathrm{L}(L^T + \delta x^T \mathrm{A}^\mathrm{T}) = 43{,}26.$$

Всі інші обчислення наведені в задачі 5.2.

12.7. РОЗРАХУНКОВО - ГРАФІЧНА РОБОТА № 2.

Задача 5. Виконати вирівнювання корелатним способом 6- ти горизонтальних кутів, які виміряні на геодезичному пункті способом в усіх комбінаціях (рис.10.1) та обчислити середні квадратичні похибки виміряного та вирівняного шостого кута.

Вихідні дані наведені в задачі 10.1. Поперед до виконання вирівнювання необхідно замінити виміряні значення кутів 1,2 і 3 (табл.10.1) відповідно до варіанту на величину, яка обчислюється за формулою $\beta_i = \beta_i' + 0{,}1 \cdot a \cdot N$, де β_i' - значення 1, 2 і 3 кутів, які наведені в табл. 10.1; a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту.

Порядок вирівнювання. .

1. Визначити геометричні зв'язки в побудуванні, умовні рівняння та нев'язки цих рівнянь. .
2. Скласти оціночну вагову функцію F′. .
3. Скласти та розв'язати в табл. 10.2 з контролем систему умовних рівнянь . .

4. Скласти та розв'язати в табл.10.3 за схемою Гаусса з контролем систему нормальних рівнянь. .
5. Обчислити в табл.10.2 поправки v_i до виміряних кутів, контрольні суми і в табл.10.1 вирівняні значення цих кутів. .
6. Виконати остаточний контроль вирівнювання. .
7. Визначити середні квадратичні похибки виміряного та вирівняного 6 – го кута.

Задача 6. Виконати вирівнювання корелатним способом виміряних горизонтальних кутів мережі тріангуляції (задача 5.1, рис.5.1) та оцінку точності вирівняної сторони СД цієї мережі.

Вихідні дані: На рис.5.1 сторона ОА = b_1; сторона ОВ = b_2, lg b_1 = 3,258 4263, lg b_2 = 3,329 5004, ∟ ВОА = 224°19′40,5″, значення виміряних кутів наведені в табл.10.5.

Поперед виконанням вирівнювання необхідно змінити наступні значення виміряних кутів в табл.10.5 в трикутниках: 1 (АОД) – кути 1 і 2; 2 (СО Д) – кути 4 і 5; 3(ВОС) – кути 7 і 8 на величину $\beta_i = \beta_i' + 0{,}1 \cdot a \cdot N$, .
де β_i' - значення 1, 2 і 3 кутів, які наведені в табл.10.1; a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту. .
Порядок вирівнювання. .
1. Визначити кількість і вид умовних рівнянь. .
2. Скласти умовні рівняння фігур, горизонту і базису, визначити вільні члени (нев'язки) умовних рівнянь. .
3. Скласти вагову функцію F. .
4. Скласти і розв'язати таблиці коефіцієнтів умовних рівнянь і коефіцієнтів нормальних рівнянь. Виконати контролі обчислень.
5. Розв'язати систему нормальних рівнянь за схемою Гаусса.
6. Обчислити поправки до виміряних кутів і вирівняні значення кутів. Виконати контрольні обчислення. .
7. Виконати оцінку точності результатів вирівнювання.

Задача 7. Виконати вирівнювання корелатним способом виміряних кутів центральної системи (рис.10.2) і зробити оцінку точності результатів вирівнювання.

Вихідні дані: Значення виміряних кутів наведені в табл.10.12; Логарифм вихідної сторони АВ - lg S = lg$\overline{AB}$ = 4,011060. .

Поперед вирівнювання необхідно змінити в табл.10.12 відповідно до варіанту значення наступних виміряних кутів : в трикутнику 1 - кути 1 і 2; в трикутнику 2 – кути 4 і 5; в трикутнику 3 – кути 7 і 8; в трикутнику 4 – кути 10 і 11 на величину, яка дорівнює $\beta_i = \beta_i' + 0{,}1 \cdot a \cdot N$, .
де β_i' - значення кутів, в табл.10.1; a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту. .

Порядок вирівнювання. .

1. Визначити кількість і вид умовних рівнянь. .
2. Скласти умовні рівняння фігур, горизонту і полюсу, обчислити вільні члени (нев'язки) цих умовних рівнянь. .
3. Скласти рівняння вагової функції – похибку сторони АВ = S.
4. Скласти і розв'язати таблиці коефіцієнтів системи умовних рівнянь і коефіцієнтів системи нормальних рівнянь. Виконати контролі обчислень. .
5. Розв'язати систему нормальних рівнянь за схемою Гаусса.
6. Обчислити поправки до виміряних кутів і вирівняні кути .
7. Виконати остаточні контрольні вирівнювання. .
8. Виконати оцінку точності результатів вирівнювання. .

Задача 8. Згідно задачі 10.4 виконати вирівнювання корелатним способом виміряних кутів геодезичного чотирикутника (рис.10.3) і оцінити точність визначення діагоналі ВД, приймаючи другу діагональ АС за безпомилковою. Значення виміряних кутів наведено в табл.10.18. .
Для виконання вирівнювання необхідно замінити відповідно

до варіанту значення наступних виміряних кутів в табл.10.18: в трикутнику 1(ВСА) - кути 1 і 4; в трикутнику 2 (ДАС) – кути 5 і 8; в трикутнику 3(ВДА) – кути 3 і 7 на величину, яка дорівнює $\beta_i = \beta_i' + 0{,}1 \cdot a \cdot N$, .
де β_i' - значення кутів, в табл.10.1; a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту.
. **Порядок вирівнювання**. .
1. Визначити кількість і вид умовних рівнянь. .
2. Скласти умовні рівняння фігур і полюсу, обчислити вільні члени (нев'язки) цих умовних рівнянь. .
3. Скласти таблиці коефіцієнтів системи умовних рівнянь і коефіцієнтів системи нормальних рівнянь. Виконати контрольні обчислення. .
5. Розв'язати систему нормальних рівнянь за схемою Гаусса.
6. Обчислити поправки до виміряних кутів і вирівняні кути .
7. Виконати остаточні контрольні вирівнювання. .
8. Виконати оцінку точності о триманих результатів . .

Задача 9. Згідно задачі 11.4 виконати вирівнювання корелатним способом кутів і довжин сторін мережі трилатерації (рис.11.4), яка побудована у вигляді центральної системи.

Вихідні дані включають координати пунктів 1 і 2 : x_1 =13998,27; y_1 =41021,74 м; x_2 =21014 , 07 м; y_2=4397 4,21 м; сторону S_{12}= 7611,74 м і дирекційний кут α_{12} = 22°49′ 22,4″. Довжини виміряних і спроектованих на площину сторін виписані на схемі (рис.11.4). Для виконання вирівнювання кутових і лінійних елементів мережі необхідно замінити значення виміряних сторін 1-6, 2-6, 3-6, 4-6 і 5-6 на величину, яка визначається за формулою $S_i = S_i' + 0{,}01 \cdot a \cdot N$, .
де S_i' - значення довжини названої вище сторони і наведеної на схемі (рис.11.4); a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту. .

Послідовність вирівнювання. .

1.Визначення числа і виду незалежних умовних рівнянь. .

2.Обчислення кутів і висот трикутників. .

3.Складання умовних рівнянь поправок і вагових коефіцієнтів.

4.Складання і розв'язання нормальних рівнянь корелат.

5.Обчислення поправок до виміряних сторін. .

6.Обчислення вирівняних сторін і кутів трикутників. .

7.Оцінка точності вирівняних елементів мережі.

Задача 10. Згідно задачі 11.7 вирівняти корелатним способом полігонометричний хід і обчислити середні квадратичні похибки вирівняних значень дирекційного кута сторони 4 – 5 і координат пункту 5. .

Вихідні дирекціоні кути і и координати пунктів, а також значення виміряних кутів повороту і довжин сторін полігонометричного ходу наведені в табл.11.6. Для виконання вирівнювання кутових і лінійних елементів полігонометричного ходу необхідно замінити значення виміряних кута В,1 довжини сторони В,1 – 2 за формулами

$$\beta_1 = \beta_1{}' + 0{,}1 \cdot a \cdot N, \quad \text{і} \quad S_{1-2} = S_{1-2}{}' + 0{,}001 \cdot a \cdot N,$$

де $\beta_1{}'$ - значення кута В,1 - $\beta_{В,1}$ = 181°05′ 47,0″; $S_{1-2}{}'$ - значення сторони $S_{В,1-2}$ = 552,007 в табл.11.6; a = ± 1 - коефіцієнт; N – номер варіанту, який задано студенту.

Порядок вирівнювання . .

1. Складемо три умовні рівняння поправок за формулами(11.40). Поправки v_s, різності координат $(x_n - x_i)$ і $(y_n - y_i)$ та вільні члени W_x і W_y в них виражені в сантиметрах. Для зручності запису величини $1/\rho$ збільшимо в 100 000 разів, тоді відповідно різності координат $(x_n - x_i)$ і $(y_n - y_i)$ зменшимо в те ж число разів, тобто виразимо їх в кілометрах. .

2.Складемо таблицю коефіцієнтів умовних рівнянь поправок (табл.11.7) .

3. Складемо вагові функції f_{α_4}, f_{x_i}, f_{y_i}. Коефіцієнти при поправках v_β, v_s випишемо у відповідні рядки стовпців f_α, f_x, f_y (табл.11.7).

4. Проконтролюємо результати обчислення коефіцієнтів умовних рівнянь поправок шляхом порівняння сум в рядках S і Σ.

5. Визначимо коефіцієнти нормальних рівнянь корелат (табл.11.9).

6. За значеннями корелат обчислимо поправки в кути і довжини сторін (табл.11.7 графа 10). Потім випишемо ці поправки понад відповідними значеннями виміряних кутів і довжин сторін (табл.11.6 графи 2 і 4). За формулами (11.34) знайдемо поправки в дирекціоні кути (графа 3).

7. За допомогою формул (11.48) одержимо поправки в прирости координат і запишемо їх понад відповідними значеннями Δx_i і Δy_i (графи 6 і 7 табл.11.6). Контролем обчислення служать рівності $\left[v_{\Delta x_i}\right] = -W_x$ і $\left[v_{\Delta y_i}\right] = -W_y$. Розходження не повинно бути більше величини $0{,}5\sqrt{n}$ одиниці останнього знаку, де n – число поправок.

8. За виправленими приростами координат обчислимо вирівняні координати (графи 12 і 13).

9. Оцінімо точність вирівняних значень дирекційного кута α_{4-5} і координат пункту 5 з використанням обернених ваг, які одержані в додаткових стовпцях f_α, f_x, f_y схеми розв'язання нормальних рівнянь(табл.11.9).

12.8. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ.

Глава 8.

1. Суть корелатного способу вирівнювання.
2. За якою вимогою насамперед виконується вирівнювання вимірів?
3. За яким чином виправляють результати вимірів при вирівнюванні?
4. Яким чином розкладають функцію виправлених вимірів в ряд Тейлора?
5. Яка система рівнянь дозволяє вибрати умову, що (- Δ_i) $\approx v_i$?
6. Яку задачу відносять до умовного екстремуму в корелатному способі?
7. Яка функція невизначених множників умовних рівнянь вченого Лагранжа?
8. Запишіть систему умовних рівнянь поправок?
9. Які множники вченого Лагранжа називають корелатами?
10. Запишіть корелатні рівняння поправок?
11. Як визначається система нормальних рівнянь корелат?
12. Запишіть систему нормальних рівнянь корелат для рівноточних і нерівноточних вимірів?
13. Що таке обернена вага вимірювань?
14. Навести порядок вирівнювання геодезичних вимірів корелатним способом?
15. Назвіть геометричні умови геодезичного трикутника?
16. Запишіть умовні рівняння поправок в матричній формі?
17. Запишіть нормальні рівняння корелат в матричній формі?
18. Запишіть основну і контрольну формули обчислення $[p\ v^2]$?
19. Запищіть алгоритми Гаусса і як вони розкриваються?
20. Запишіть контрольні формули розв'язання задачи вирівнювання корелатним способом?
21. Запишіть остаточний контроль розв'язання задачи вирівнювання корелатним способом?

22. Запишіть схему Гаусса розв'язання нормальних рівнянь корелат?
23. Запишіть корелатну матрицю вектору істинних похибок вимірів?
24. Запишіть довірчий інтервал для математичного сподівання нев'язок при корелатному способі вирівнювання?
25.Як визначається гранична нев'язка при корелатному способі вирівнювання?
26. Який порядок визначення недопустимих нев'язок при корелатному способі вирівнювання? .
27.Запишіть оціночну функцію після розкладення в ряд Тейлора.
28. Як обчислюється обернена вага вирівняної функції за основною і контрольною формулами? .
29. Яка різниця між системами нормальних рівнянь при корелатному і параметричному способах вирівнюванні?
30. Як вирівнюються кути, які виміряні на геодезичному пункті при його вставці в жорсткий кут мережі тріангуляції?

Глава 9.

31. За яким правилом у залежності від математичних зв'язків виникають різні умовні рівняння поправок в геодезичних мережах?
32. Запишіть умовне рівняння зв'язку загального виду при корелатному способі вирівнювання? .
33. Запишіть умовне рівняння зв'язку в нівелірної мережі при її вирівнюванні корелатним способом? .
34.В чому суть методу полігонів,якій запропонований проф. В.В. Поповим для вирівнювання нівелірної мережі?
35. Як виконується оцінка результатів вирівнювання за методом полігонів проф. В.В. Попова? .
36.Які види умовних рівнянь зв'язку виділяють в геодезичних мережах?

37.Назвіть лінійні умовні рівняння зв'язку , які виділяють в геодезичних мережах?
38. Запишіть умовні рівняння замкненої фігури при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом?
39. Запишіть умовне рівняння горизонту при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом?
40. Запишіть умовне рівняння жорсткого кута при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом?
41. Запишіть умовне рівняння дирекційних кутів при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом?
42. Назвіть нелінійні умовні рівняння зв'язку , які виділяють в геодезичних мережах? .
43. Запишіть базисне умовне рівняння при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом? .
44. Запишіть полюсне умовне рівняння при вирівнюванні мережі тріангуляції корелатним способом? .
45.Запишіть умовні рівняння зв'язку геодезичного чотирикутника? .
46.Запишіть координатні умовні рівняння зв'язку в мережі тріангуляції? .
47. Запишіть умовні рівняння зв'язку в полігонометричному ході? .
48. Запишіть систему нормальних рівнянь в полігонометричному ході? .
49. Які геодезичні мережі називають тріангуляція, трилатерація і полігонометрія? .
50. Суть і які геометричні побудування в мережі тріангуляції ?
51. Суть і які геометричні побудування в мережі трилатерації ?
52.Суть і які геометричні побудування в мережі полігонометрії?
53. У зв'язку з чим виникає задача вирівнювання тріангуляції, трилатерації і полігонометрії? .
54. Які умовні рівняння застосовується при вирівнюванні три-

латерації корелатним способом? .
55. Які нормальне рівняння застосовується при вирівнюванні трилатерації корелатним способом?

Глава 10. .

56. Порядок вирівнювання корелатним способом кутів, які виміряні на геодезичному пункті? .
57. Порядок оцінювання точності кутів, які виміряні на геодезичному пункті після їх вирівнюванні корелатним способом?
58. Порядок вирівнювання корелатним способом кутів, виміряних в мережі тріангуляції при вставці двох пунктів в жорсткий кут? .
59. Порядок оцінювання точності кутів, виміряних при вставці двох пунктів в жорсткий кут, після їх вирівнюванні корелатним способом?
60. Порядок вирівнювання корелатним способом кутів центральної системи? .
61. Порядок оцінювання точності кутів центральної системи після їх вирівнюванні корелатним способом? .
62. Порядок вирівнювання корелатним способом кутів геодезичного чотирикутника? .
63. Порядок оцінювання точності кутів геодезичного чотирикутника після їх вирівнюванні корелатним способом? .

Глава 11.

64. Назвіть особливості вирівнювання трилатерації? .
65. Які умовні рівняння зв'язку застосовують в мережах трилатерації ? .
66. Порядок вирівнювання корелатним способом мережі трилатерації? .
67. Порядок оцінювання точності вирівнювання корелатним способом мережі трилатерації ? .

68. Які способи вирівнювання полігонометричних ходів?
69. Порядок вирівнювання корелатним способом полігонометричного ходу довільної форми? .
70. Порядок оцінювання точності вирівняних корелатним способом кутів і довжин сторін полігонометричного ходу? .
71.Навести приклад вирівнювання корелатним способом полігонометричного ходу? .

Глава 12. .

72. Які виділяють комбіновані способи вирівнювання геодезичних мереж? .
73. Як виконується вирівнювання параметричним способом із залежними параметрами? .
74. Навести приклад вирівнювання корелатним способом із залежними параметрами? .
75. Суть корелатного способу з додатковими невідомими? .
76.Навести приклад вирівнювання за способом умов з додатковими невідомими? .
77. Суть вирівнювання параметричним способом з врахуванням похибок вихідних даних? .
78. Навести приклад вирівнювання параметричним способом з врахуванням похибок вихідних даних? .
79. Навести приклад вирівнювання корелатним способом з врахуванням похибок вихідних даних? .
80. Суть вирівнювання з врахуванням залежних вимірів?
81. Як виконується вирівнювання параметричним способом з врахуванням залежних вимірів? .
82. Як виконується вирівнювання корелатним способом з врахуванням залежних вимірів? .

83. Навести приклад остаточного вирівнювання дирекційних кутів в мережі тріангуляції із врахуванням залежних вимірів?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.

1. Створення та реконструкція міських геодезичних мереж в УСК – 2000. Інструкція. Видання офіційне: / Ю. Карпінський, проф. д. т. н. О. Кучер, к. т .н., І. Куриляк, к. т. н., І. Тревого, проф. д. т. н. та ін. – К.: Укргеодезкартографія, НДІГК, 2007. – 55с. .

2. С.П. Войтенко. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів : навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2005. –236 с. .

3. В.Д. Большаков. Теория математической обработки геодезических измерений : учебн. [для студ. висш. учеб. завед] / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаєв. М.: Недра, 1977. – 366 с. .

4. В.Д. Большаков. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений : учебн. пособ. [для студ. висш. учеб. завед.] / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с. .

5. Ю.И. Маркузе. Теория математической обработки геодезических измерений. Книга 2. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений : учеб. пособ. [для студ. висш. учеб. завед.] /. Ю.И. Маркузе. – М.: МИИГАиК, 2005. – 280 с. .

6. П.М. Зазуляк. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань : навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / П.М. Зазуляк , В.І. Гавриш , Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук – Львів : Растр-7, 2007. - 408 с. .

7. К.О. Метешкин. Математична обробка геодезичних вимірів.: навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / К.О.Метешкин, Д.В. Шаульський. – Харьків : ХНАМГ, 2012. – 176 с. .

8. Л.И. Мазмишвили. Способ наименьших квадратов: учеб. пособ. [для студ. высш. учеб. завед.] / Л.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968. – 437 с. .

9. В.М. Третенков. Математична обробка геодезичних вимірів. Ч 1. Основи теорії похибок вимірів : навч. посіб.[для студ. вищ. навч. закл.] / В.М. Третенков. – Одеса : ОДАБА, 2010.- 216 с. .

10. В.Д. Большаков . Справочник геодезиста (в двух книгах). [изд. 2 перераб. и доп.] : / Под ред. В.Д. Большаков, Г.П. Левчука. – М.: Недра, 1975. – 1056 с. .

Навчальне видання

Третенков Валерій Михайлович

Математичне оброблення геодезичних вимірів.
Частина2. .

Основи застосування методу найменших квадратів.

Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів напряму «Геодезія і землеустрій».

Редагування та коректура
Комп`ютерний набір .
Підписано до друку .
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Тираж прим. .
ОДАБА, вул. Дідріхсона,14, Одеса,Україна, 65029
E-meil: isdat@ua.fm. .

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі: .
Одеська державна академія будівництва та архітектури .
Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої діяльності