УДК 624.012.45

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Фомин В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)*

В статье [1] была предложена физически и геометрически нелинейная теория изгиба стержней, которая позволила исследовать изгиб консольной балки, выполненной из материалов, обладающих различными нелинейно упругими свойствами в растянутой и сжатой зонах [2]. Однако, как известно, бетон обладает еще различными нелинейно упругими свойствами при увеличении или при уменьшении нагрузки (т.е. при нагружении и разгрузке). В книге [3] для каждого из таких этапов строится диаграмма деформирования бетона в приращениях напряжений и деформаций. В настоящей работе предлагается обобщение теории [1], пригодное как для этапов нагружения, так и разгрузки. Рассматривается такой диапазон нагрузок, при которых нелинейность на каждом из этапов оказывается сравнительно малой, что позволяет применить метод малого параметра.

В [1] было определено, что элементы тензора конечных деформаций при физически и геометрически нелинейном изгибе стержня имеют следующий вид

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}(\lambda_s^2-1-2\lambda_s^2B\varphi'),\ \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\lambda_s A_2,$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}(A_2^2+B_2^2-1),\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{33}=0. \qquad (1)$$

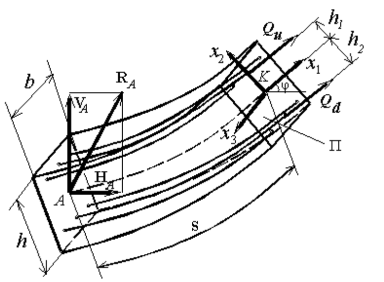

Рис.1

Здесь $\lambda_s = 1+\varepsilon_s$, ε_s – продольная относительная деформация оси балки; $A(x_2)$ и $B(x_2)$ – искомые функции ординаты x_2 точки поперечного сечения балки (рис.1), $A_2(x_2) = dA/dx_2$, $B_2(x_2) = dB/dx_2$; φ – угол наклона касательной к деформированной оси балки к ее недеформированной оси; $\varphi' = d\varphi/ds$, s– длина деформированного отрезка оси балки между рассматриваемым поперечным сечением и левым концом балки. Пользуясь малостью ε_s, можно записать (1) так:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_s-B\varphi',\ \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}A_2,\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}(A_2^2+B_2^2-1),\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{33}=0. \qquad (2)$$

Поэтому будем разыскивать приращения элементов тензора **D** деформаций $\varepsilon_{ij\Delta}=\varepsilon_{ij}-\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ на некотором этапе деформирования балки (под приращением какой-либо величины X понимается разность $X - X^*$, где X^* – значение этой величины в начале рассматриваемого этапа) в следующем виде:

$$\varepsilon_{11\Delta}=\varepsilon_{s\Delta}-B\varphi_\Delta{}',\ \varepsilon_{12\Delta}=\frac{1}{2}A_2,\varepsilon_{22\Delta}=\frac{1}{2}(A_2^2+B_2^2-1) \qquad (3)$$

($\varphi_\Delta = \varphi - \varphi^*$; приращения остальных элементов тензора **D** равны нулю). Следуя методу, предложенному в [2], запишем зависимость между приращениями напряжений и деформаций так:

$$\overline{\sigma}_\Delta=3K^{[0]}[1+\mu p(\overline{\varepsilon}_\Delta)]\overline{\varepsilon}_\Delta,\ \mathrm{T}_{1\Delta}=2G^{[0]}[1+\mu q(\overline{\gamma}_\Delta)]\,\mathbf{D}_{1\Delta}. \qquad (4)$$

Здесь $K^{[0]}$- начальный модуль объемного сжатия материала балки (т.е. значение этого модуля при линейно упругой деформации материала), $G^{[0]}$- начальный модуль сдвига, $\overline{\sigma}_\Delta$ – приращение среднего напряжения $\overline{\sigma}=(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3$ (σ_{ii} - элементы тензора напряжений,i=1,2,3), $\overline{\varepsilon}_\Delta$ – приращение среднего удлинения $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})/3$, $\overline{\gamma}_\Delta$ – приращение октаэдрической деформации сдвига $\overline{\gamma}=\frac{2}{3}[\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2-$ $-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}+3(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2)]^{1/2}$, $\mathbf{T}_1=\mathbf{T}-\overline{\sigma}\,\mathbf{I}$ и $\mathbf{D}_1=\mathbf{D}-\overline{\varepsilon}\,\mathbf{I}$ – девиаторы тензоров напряжений **T** и деформаций **D** соответственно, $\mathbf{T}_{1\Delta}$ и $\mathbf{D}_{1\Delta}$ – их приращения, μ – малый параметр. Функции $p(\overline{\varepsilon}_\Delta)$ и $q(\overline{\varepsilon}_\Delta)$ характеризуют нелинейно-упругое поведение материала и при μ = 0 (2) переходит в обычный закон Гука для изотропных материалов. Наличие малого параметра μ означает, что возникающие деформации материала таковы, что отклонение соотношения (4) от закона Гука не очень велико. Заметим, что если $|\,p(\overline{\varepsilon}_\Delta)|<<1$ и $|\,q(\overline{\varepsilon}_\Delta)|<<1$ параметр μ может быть введен формально с целью получения асимптотических разложений, затем в окончательных выражениях следует μ положить равным единице.

Будем разыскивать элементы приращений тензоров напряжений и деформаций в виде следующих асимптотических разложений:

$$\sigma_{ij\Delta}=\sum_{k=0}^{n}\mu^k\sigma_{ij\Delta}^{[k]},\ \varepsilon_{ij\Delta}=\sum_{k=0}^{n}\mu^k\varepsilon_{ij\Delta}^{[k]}\ \ (i,j=1,2,3)\,. \qquad (5)$$

Тогда $\bar\sigma_\Delta, \bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta$, $\mathbf{T}_{1\Delta}$ и $\mathbf{D}_{1\Delta}$ представятся так

$$\bar\sigma_\Delta = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \bar\sigma_\Delta^{[k]},\ \bar\varepsilon_\Delta = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \bar\varepsilon_\Delta^{[k]},\ \bar\gamma_\Delta = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \bar\gamma_\Delta^{[k]},$$
$$\mathbf{T}_{1\Delta} = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \mathbf{T}_{1\Delta}^{[k]},\ \mathbf{D}_{1\Delta} = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \mathbf{D}_{1\Delta}^{[k]}. \qquad (6)$$

Полагая, что функции $p(x)$ и $q(x)$ бесконечно дифференцируемы (если это не так, то их можно аппроксимировать с любой степенью точности бесконечно дифференцируемыми функциями), можно записать

$$p(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{(m)}(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]})}{m!} x^m,\ q(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]} + x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{(m)}(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]})}{m!} x^m \qquad (7)$$

Подставляя в (7) вместо x выражение $x = \sum_{k=1}^{n} \bar\varepsilon_\Delta^{[k]} \mu^k$, получим разложение $p(\bar\varepsilon_\Delta)$ по степеням μ:

$$p(\bar\varepsilon_\Delta) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k p^{[k]}(\bar\varepsilon_\Delta) \qquad (8)$$

Например, $p^{[0]}(\bar\varepsilon_\Delta) = p(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]})$, $p^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta) = p'(\bar\varepsilon_\Delta^{[0]})\bar\varepsilon_\Delta^{[1]}$.

Аналогично получаем выражения и для $q(\bar\gamma_\Delta)$:

$$q(\bar\gamma_\Delta) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k q^{[k]}(\bar\gamma_\Delta) \qquad (9)$$

Причем $q^{[0]}(\bar\gamma_\Delta) = q(\bar\gamma_\Delta^{[0]})$, $q^{[1]}(\bar\gamma_\Delta) = q'(\bar\gamma_\Delta^{[0]})\bar\gamma_\Delta^{[1]}$.

Подставляя (6), (8) и (9) в (4), будем иметь для первых двух членов разложения

$$\begin{aligned} &\bar\sigma_\Delta^{[0]} = 3K^{[0]}\varepsilon_\Delta^{[0]},\ \mathbf{T}_{1\Delta}^{[0]} = 2G^{[0]}\mathbf{D}_{1\Delta}^{[0]}, \\ &\bar\sigma_\Delta^{[1]} = 3[K^{[0]}\bar\varepsilon_\Delta^{[1]} + K^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta)\bar\varepsilon_\Delta^{[0]}],\ \mathbf{T}_{1\Delta}^{[1]} = 2[G^{[0]}\mathbf{D}_{1\Delta}^{[1]} + G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)\mathbf{D}_{1\Delta}^{[0]})], \end{aligned} \qquad (10)$$

где $K^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta) = K^{[0]}p^{[0]}(\bar\varepsilon_\Delta)$, $G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta) = G^{[0]}q^{[0]}(\bar\gamma_\Delta)$. Из первой строки (10) находим

$$\begin{aligned} &\sigma_{11\Delta}^{[0]} + \sigma_{22\Delta}^{[0]} + \sigma_{33\Delta}^{[0]} = 3K^{[0]}(\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[0]}), \\ &2\sigma_{11\Delta}^{[0]} - \sigma_{22\Delta}^{[0]} - \sigma_{33\Delta}^{[0]} = 2G^{[0]}(2\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} - \varepsilon_{22\Delta}^{[0]}), \\ &-\sigma_{11\Delta}^{[0]} + 2\sigma_{22\Delta}^{[0]} - \sigma_{33\Delta}^{[0]} = 2G^{[0]}(-\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + 2\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}), \\ &-\sigma_{11\Delta}^{[0]} - \sigma_{22\Delta}^{[0]} + 2\sigma_{33\Delta}^{[0]} = -2G^{[0]}(\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[0]}), \\ &\sigma_{13\Delta}^{[0]} = \sigma_{31\Delta}^{[0]} = \sigma_{23\Delta}^{[0]} = \sigma_{32\Delta}^{[0]} = 0,\ \sigma_{12\Delta}^{[0]} = \sigma_{21\Delta}^{[0]} = 2G^{[0]}\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}, \end{aligned} \qquad (11)$$

а из второй

$$\begin{aligned} &\sigma_{11\Delta}^{[1]} + \sigma_{22\Delta}^{[1]} + \sigma_{33\Delta}^{[1]} = 3[K^{[0]}(\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[1]}) + K^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta)(\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[0]})], \\ &2\sigma_{11\Delta}^{[1]} - \sigma_{22\Delta}^{[1]} - \sigma_{33\Delta}^{[1]} = 2[G^{[0]}(2\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} - \varepsilon_{22\Delta}^{[1]}) + G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)(2\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} - \varepsilon_{22\Delta}^{[0]})], \\ &-\sigma_{11\Delta}^{[1]} + 2\sigma_{22\Delta}^{[1]} - \sigma_{33\Delta}^{[1]} = 2[G^{[0]}(-\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} + 2\varepsilon_{22\Delta}^{[1]}) + G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)(-\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + 2\varepsilon_{22\Delta}^{[0]})], \\ &-\sigma_{11\Delta}^{[1]} - \sigma_{22\Delta}^{[1]} + 2\sigma_{33\Delta}^{[1]} = -2[G^{[0]}(\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[1]}) + G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)(\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + \varepsilon_{22\Delta}^{[0]})], \\ &\sigma_{13\Delta}^{[1]} = \sigma_{31\Delta}^{[1]} = \sigma_{23\Delta}^{[1]} = \sigma_{32\Delta}^{[1]} = 0,\ \sigma_{12\Delta}^{[1]} = \sigma_{21\Delta}^{[1]} = 2[G^{[0]}\varepsilon_{12\Delta}^{[1]} + G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}]. \end{aligned} \qquad (12)$$

Из (11) и (12) находим

$$\begin{aligned} &\sigma_{11\Delta}^{[0]} = K_1^{[0]}\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{22\Delta}^{[0]},\ \sigma_{22\Delta}^{[0]} = K_2^{[0]}\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + K_1^{[0]}\varepsilon_{22\Delta}^{[0]},\ \sigma_{12\Delta}^{[0]} = 2G^{[0]}\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}, \\ &\sigma_{11\Delta}^{[1]} = K_1^{[0]}\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{22\Delta}^{[1]} + K_1^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} + K_2^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}, \\ &\sigma_{22\Delta}^{[1]} = K_1^{[0]}\varepsilon_{22\Delta}^{[1]} + K_2^{[0]}\varepsilon_{11\Delta}^{[1]} + K_1^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{22\Delta}^{[0]} + K_2^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}, \\ &\sigma_{12\Delta}^{[1]} = 2G^{[0]}\varepsilon_{12\Delta}^{[1]} + 2G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где $K_1^{[0]} = (3K^{[0]} + 4G^{[0]})/3$, $K_2^{[0]} = (3K^{[0]} - 2G^{[0]})/3$, $K_1^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta) = [3K^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta) + 4G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)]/3$, $K_2^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta, \bar\gamma_\Delta) = [3K^{[1]}(\bar\varepsilon_\Delta) - 2G^{[1]}(\bar\gamma_\Delta)]/3$.

Представим функции $A(x_2)$ и $B(x_2)$, а также приращения угла поворота сечения φ и относительного удлинения оси стержня ε_s в виде асимптотических разложений по степеням μ:

$$A = \sum_{k=0}^{n} \mu^k A^{[k]},\ B = \sum_{k=0}^{n} \mu^k B^{[k]},\ \varphi_\Delta = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \varphi_\Delta^{[k]},\ \varepsilon_{s\Delta} = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \varepsilon_{s\Delta}^{[k]}. \qquad (14)$$

Подставив (14) в (3), будем иметь для первых двух членов разложения (5)

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11\Delta}^{[0]} = \varepsilon_{s\Delta}^{[0]} - B^{[0]}\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds}, \\ &\varepsilon_{22\Delta}^{[0]} = \frac{1}{2}[(A_2^{[0]})^2 + (B_2^{[0]})^2 - 1],\ \varepsilon_{12\Delta}^{[0]} = \frac{1}{2}A_2^{[0]}, \end{aligned} \qquad (15a)$$

$$\varepsilon^{[1]}_{11\Delta} = \varepsilon^{[1]}_{s} - [B^{[0]}\frac{d\varphi^{[1]}_{\Delta}}{ds} + B^{[1]}\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}],$$
$$\varepsilon^{[1]}_{22\Delta} = \frac{1}{2}(A^{[0]}_2 A^{[1]}_2 + B^{[0]}_2 B^{[1]}_2),\ \varepsilon^{[1]}_{12\Delta} = \frac{1}{2}(A^{[1]}_2 + \varepsilon^{[1]}_s A^{[0]}_2). \tag{15б}$$

Здесь $A^{[k]}_2(x_2) = \dfrac{dA^{[k]}(x_2)}{dx_2}, B^{[k]}_2(x_2) = \dfrac{dB^{[k]}(x_2)}{dx_2}\quad (k = 0{,}1)$.

Как и в [1] будем разыскивать функции $A^{[k]}$ и $B^{[k]}$ $(k = 0{,}1)$ в следующем виде:

$$A^{[k]} = a^{[k]}_1 x_2 + a^{[k]}_2 x_2^2 + a^{[k]}_3 x_2^3,\ \ B^{[k]} = b^{[k]}_1 x_2 + b^{[k]}_2 x_2^2. \tag{16}$$

Тогда

$$A^{[k]}_2 = \frac{dA^{[k]}}{dx_2} = a^{[k]}_1 + 2a^{[k]}_2 x_2 + 3a^{[k]}_3 x_2^3,\ \ B^{[k]}_2 = \frac{dB^{[k]}}{dx_2} = b^{[k]}_1 + 2b^{[k]}_2 x_2.$$

Касательные напряжения, а значит и их приращения на верхней и нижней гранях равны нулю:

$$\sigma_{12\Delta} = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \tag{17}$$

Это означает, что $\sigma^{[0]}_{12\Delta} = 0$, а следовательно и $\varepsilon^{[0]}_{12\Delta} = 0$ при $x_2 = \pm\dfrac{h}{2}$. Из (15) и (16) находим:

$$a^{[0]}_1 + 2a^{[0]}_2 x_2 + 3a^{[0[}_3 x_2^2 = 0 \quad (x_2 = \pm\frac{h}{2}), \tag{18}$$

откуда следует, что

$$a^{[0]}_2 = 0,\ a^{[0]}_1 = -\frac{3}{4}h^2 a^{[0]}_3,\ A^{[0]} = -a^{[0]}_3 d(x_2),\ d(x_2) = \frac{3}{4}h^2 x_2 - x_2^3,$$
$$A^{[0]}_2 = -a^{[0]}_3 d_2(x_2),\ d_2(x_2) = \frac{3}{4}h^2 - 3x_2^2,\ \varepsilon^{[0]}_{12\Delta} = -\frac{1}{2}a^{[0]}_3 d_2(x_2). \tag{19}$$

Приращения нормальных напряжений на верхней и нижней гранях равны нулю:

$$\sigma_{22\Delta} = 0\ \ (x_2 = \pm h/2). \tag{20}$$

Следовательно $\sigma^{[0]}_{22\Delta} = 0$ и из (13) получаем $K^{[0]}_2\varepsilon^{[0]}_{11} + K^{[0]}_1\varepsilon^{[0]}_{22} = 0$ ($x_2 = \pm h/2$), т.е.

$$K^{[0]}_2[\varepsilon^{[0]}_{s\Delta} - (b^{[0]}_1 x_2 + b^{[0]}_2 x_2^2)\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}] +$$
$$+\frac{K^{[0]}_1}{2}[(b^{[0]}_1 + 2b^{[0]}_2 x_2)^2 - 1] = 0 \quad (x_2 = \pm h/2). \tag{21}$$

Пренебрегая слагаемыми, содержащими $(d\varphi^{[0]}_{\Delta}/ds)^2$, находим из (21)

$$b^{[0]}_1 = [1 - 2\frac{K^{[0]}_2}{K^{[0]}_1}\varepsilon^{[0]}_{s\Delta})^2]^{1/2},\ b^{[0]}_2 = \frac{K^{[0]}_2}{2K^{[0]}_1}\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}, \tag{22}$$

а следовательно,

$$\varepsilon^{[0]}_{11\Delta} = \varepsilon^{[0]}_{s\Delta} - 2b^{[0]}_1 x_2\, d\varphi^{[0]}_{\Delta}/ds. \tag{23}$$

Из (13) и (15) находим

$$\varepsilon^{[0]}_{22\Delta} = \frac{1}{2}[(a^{[0]}_3)^2 d_2^2 + 2\frac{K^{[0]}_2}{K^{[0]}_1}(\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}x_2 - \varepsilon^{[0]}_{s\Delta})],$$
$$\sigma^{[0]}_{11\Delta} = E^{[0]}_1(\varepsilon^{[0]}_{s\Delta} - x_2\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}) + \frac{K^{[0]}_2}{2}(a^{[0]}_3)^2 d_2^2,\ \sigma^{[0]}_{22\Delta} = \frac{K^{[0]}_1}{2}(a^{[0]}_3)^2 d_2^2,$$
$$\sigma^{[0]}_{33\Delta} = E^{[0]}_2(\varepsilon^{[0]}_{s\Delta} - x_2\frac{d\varphi^{[0]}_{\Delta}}{ds}) + \frac{K^{[0]}_2}{2}(a^{[0]}_3)^2 d_2^2,\ \sigma^{[0]}_{12\Delta} = -G^{[0]}a^{[0]}_3 d_2(x_2) \tag{24}$$
$$(E^{[0]}_1 = K^{[0]}_1 - \frac{(K^{[0]}_2)^2}{K^{[0]}_1},\ E^{[0]}_2 = K^{[0]}_2 - \frac{(K^{[0]}_2)^2}{K^{[0]}_1}).$$

Главный вектор $\mathbf{Q}$ внутренних усилий в поперечном сечении равен

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_b + \boldsymbol{Q}_u + \boldsymbol{Q}_d \tag{25}$$

где $\mathbf{Q}_b$ - главный вектор внутренних усилий в бетоне, $\mathbf{Q}_u$ и $\mathbf{Q}_d$ - усилия в верхней и нижней арматуре соответственно (рис.1). Положим, что участок *AB* балки, для которого предполагается вывести уравнение изгиба, свободен от нагрузки. Тогда из условия равновесия имеем

$$\mathbf{Q}_b + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{R}_A \tag{26}$$

($\mathbf{R}_A$ – главный вектор сил, приложенных в точках балки, расположенных левее точки *A*, а также в ней самой).

Представим вектор $\mathbf{R}_A$, а также его горизонтальную $\mathbf{H}_A$ и вертикальную $\mathbf{V}_A$ составляющие в виде асимптотических разложений по степеням μ:

$$\mathbf{R}_A = \sum_{k=0}^{n}\mu^k \mathbf{R}^{[k]}_A,\ \ \mathbf{H}_A = \sum_{k=0}^{n}\mu^k \mathbf{H}^{[k]}_A,\ \ \mathbf{V}_A = \sum_{k=0}^{n}\mu^k \mathbf{V}^{[k]}_A \tag{27}$$

В [1] показано, что

$$
\begin{aligned}
&R_{A,1}^{[0]} = H_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]} + V_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]},\\
&R_{A,1}^{[1]} = -\varphi^{[1]}(H_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]} - V_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]}) + H_A^{[1]}\cos\varphi^{[0]} + V_A^{[1]}\sin\varphi^{[0]},\\
&R_{A,2}^{[0]} = -H_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]} + V_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]},\\
&R_{A,2}^{[1]} = -\varphi^{[1]}(H_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]} + V_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]}) - H_A^{[1]}\sin\varphi^{[0]} + V_A^{[1]}\cos\varphi^{[0]}.
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

Здесь $R_{A,j}^{[0]}\ (j=1,2)$ – проекции $R_A^{[0]}$ на оси x_j (j= 1,2), $R_{A,j}^{[1]}\ (j=1,2)$ – проекции $R_A^{[1]}$ на эти оси.

Заметим, что выражения для $R_{A,j}^{[k]*}\ (k, j=1,2)$ могут быть получены из (27) заменой $H_{A,j}^{[k]}, V_{A,j}^{[k]}, \varphi^{[k]}\ (k, j=1,2)$ на $H_{A,j}^{[k]*}, V_{A,j}^{[k]*}, \varphi^{[k]*}\ (k, j=1,2)$.

Проектируя векторное равенство (25) на ось x_2, получаем

$$Q_{b,2} + Q_{u,2} + Q_{d,2} = -R_{A,2},$$

откуда следует, что

$$Q_{b,2\Delta}^{[0]} + Q_{u,2\Delta}^{[0]} + Q_{d,2\Delta}^{[0]} = -R_{A,2\Delta}^{[0]}. \qquad (29)$$

Предполагая, что материал, из которого изготовлена арматура, в рассматриваемом диапазоне деформаций является линейно упругим, будем иметь для первого приближения

$$Q_{u,2\Delta}^{[0]} = G_a\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}(h_1)S_1,\ Q_{d,2\Delta}^{[0]} = G_a\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}(-h_2)S_2, \qquad (30)$$

где G_a – модуль сдвига материала арматуры, S_1 и S_2 – площади поперечных сечений верхней и нижней арматуры соответственно, $\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}(h_1) = -\frac{1}{2}a_3^{[0]}d_2^{[0]}(h_1)$, $\varepsilon_{12}^{[0]}(-h_2) = -\frac{1}{2}a_3^{[0]}d_2^{[0]}(h_2)$ (h_1 и h_2 – расстояния от центра тяжести сечения до верхней и нижней арматуры).

Приращение проекции главного вектора внутренних усилий в бетоне на ось x_2 определяем из формулы

$$Q_{b,2\Delta}^{[0]} = b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12\Delta}^{[0]}dx_2$$

(b - ширина сечения балки). Из (24) и (19) получаем

$$Q_{b,2\Delta}^{[0]} = -bG^{[0]}a_3^{[0]}h^3/2 \qquad (31)$$

Из (29)–(31) следует

$$a_3^{[0]} = 2R_{A,2\Delta}^{[0]}/H_s\ \ (H_s = G^{[0]}bh^3 + G_a d_2(h_1)S_1 + G_a d_2(h_2)S_2). \qquad (32)$$

Аналогично (29) получаем равенство

$$Q_{b,1\Delta}^{[0]} + Q_{u,1\Delta}^{[0]} + Q_{d,1\Delta}^{[0]} = -R_{A,1\Delta}^{[0]}. \qquad (33)$$

По закону Гука имеем

$$Q_{u,1\Delta}^{[0]} = E_a\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(h_1)S_1,\ Q_{d,1\Delta}^{[0]} = E_a\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(-h_2)S_2, \qquad (34)$$

где E_a - модуль упругости материала арматуры. Из (23) следует

$$Q_{u,1\Delta}^{[0]} = E_aS_1(\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} - h_1\,d\varphi_\Delta^{[0]}/ds),\ Q_{d,1\Delta}^{[0]} = E_aS_2(\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} + h_2\,d\varphi_\Delta^{[0]}/ds). \qquad (35)$$

Проекция приращения главного вектора внутренних усилий в бетоне на ось x_1 определяется из формулы

$$Q_{b,1\Delta}^{[0]} = b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11\Delta}^{[0]}dx_2.$$

Пренебрегая слагаемыми, содержащими $(d\varphi_\Delta^{[0]}/ds)^2$ и $(a_3^{[0]})^2$, получаем

$$Q_{b,1\Delta}^{[0]} = SE_1^{[0]}\varepsilon_{s\Delta}^{[0]}\ \ (S = bh). \qquad (36)$$

Из (33)–(36) находим

$$\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} = [E_a\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds}(S_1h_1 - S_2h_2) - R_{A,1\Delta}^{[0]}]/H_l\ \ (H_l = SE_1^{[0]} + E_a(S_1+S_2)). \qquad (37)$$

Приращение главного момента внутренних усилий в первом приближении в сечении П относительно оси x_3, определяется по формуле

$$M_{3\Delta}^{[0]} = M_{b\Delta}^{[0]} - h_1Q_{u,1\Delta}^{[0]} + h_2Q_{d,1\Delta}^{[0]},\ M_{b\Delta}^{[0]} = -b\int_{-h/2}^{h/2}x_2\sigma_{11\Delta}^{[0]}dx_2. \qquad (38)$$

Из (24) получаем

$$M_{b\Delta}^{[0]} = -E_1^{[0]}J\,d\varphi_\Delta^{[0]}/ds. \qquad (39)$$

Тогда

$$M_{3\Delta}^{[0]} = H\,d\varphi_\Delta^{[0]}/ds + E_a(S_1h_1 - S_2h_2)R_{A,1\Delta}^{[0]}/H_l \qquad (40)$$

$$(H = E_1^{[0]}J + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2) - E_a^2(S_1h_1 - S_2h_2)^2/H_l,\ J = bh^3/12).$$

Воспользуемся соотношением [2]

$$d\mathbf{M}/ds = -\mathbf{e}_1\times\mathbf{Q}, \qquad (41)$$

где $\mathbf{M}$ – главный момент внутренних усилий в сечении балки относительно его центра тяжести, $\mathbf{Q}$ – их главный вектор, $\mathbf{e}_1$ – орт оси x_1. Проектируя равенство (42) на ось x_3, получаем для первого приближения

$$dM_3^{[0]}/ds = -Q_2^{[0]}.$$

Из условия равновесия имеем $Q_2^{[0]} = -R_{A,2}^{[0]}$. Следовательно,

$$dM_3^{[0]}/ds = R_{A,2}^{[0]},$$

откуда вытекает, что

$$dM_{3\Delta}^{[0]}/ds = R_{A,2\Delta}^{[0]}. \tag{42}$$

Из (40) и (42) следует

$$H\frac{d^2\varphi_\Delta^{[0]}}{ds^2} + D\frac{dR_{A,1\Delta}^{[0]}}{ds} = R_{A,2\Delta}^{[0]} \tag{43}$$

$(D = E_a(S_1h_1 - S_2h_2)/H_I)$. Из (28) и (43) получаем дифференциальное уравнение изгиба балки в первом приближении

$$\begin{gathered} H\frac{d^2\varphi^{[0]}}{ds^2} - (H_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]} - V_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]})(D\frac{d\varphi^{[0]}}{ds} - 1) = \\ = H\frac{d^2\varphi^{[0]*}}{ds^2} + D\frac{dR_{A,1}^{[0]*}}{ds} - R_{A,2}^{[0]*}. \end{gathered} \tag{44}$$

Заметим, что правая часть уравнения (44) зависит от величин, определенных на предыдущих этапах загружения балки.

Аналогично проводятся выкладки и для второго приближения. Из (17) получаем

$$\sigma_{12\Delta}^{[1]} = 0 \ \ (x_2 = \pm h/2), \tag{45}$$

откуда следует

$$\varepsilon_{12\Delta}^{[1]} = 0 \ \ (x_2 = \pm h/2). \tag{46}$$

Из (15б) и (46) находим:

$$a_1^{[1]} + 2a_2^{[1]}x_2 + 3a_3^{[1[}x_2^2 = 0 \ \ (x_2 = \pm h/2). \tag{47}$$

Из (47) вытекает,что

$$\begin{gathered} a_2^{[1]} = 0, \ a_1^{[1]} = -\frac{3}{4}h^2a_3^{[1]}, \ A^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d(x_2), \\ A_2^{[1]}(x_2) = -a_3^{[1]}d_2(x_2), \ \varepsilon_{12\Delta}^{[1]} = -\frac{1}{2}a_3^{[1]}d_2(x_2). \end{gathered} \tag{48}$$

Из условий

$$\sigma_{22\Delta}^{[1]} = 0 \ \ (x_2 = \pm h/2) \tag{49}$$

с учетом (13) и (15б) находим, что

$$\begin{gathered} \frac{K_1^{[0]}}{2}[A_2^{[0]}(\pm\frac{h}{2})A_2^{[1]}(\pm\frac{h}{2}) + B_2^{[0]}(\pm\frac{h}{2})B_2^{[1]}(\pm\frac{h}{2})] + K_2^{[0]}[\varepsilon_{s\Delta}^{[1]} - B^{[1]}(\pm\frac{h}{2})\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds} - \\ - B^{[0]}(\pm\frac{h}{2})\frac{d\varphi_\Delta^{[1]}}{ds}] + K_1^{[1]}(\pm\frac{h}{2})\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}(\pm\frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\pm\frac{h}{2})\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(\pm\frac{h}{2}) = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Здесь и в дальнейшем под выражением $K_j^{[1]}(x_2)$ $(j = 1,2)$ понимается $K_j^{[1]}(\overline{\varepsilon}_\Delta(x_2), \overline{\gamma}_\Delta(x_2))$ $(j = 1,2)$.

Учитывая, что $b_2^{[0]} \sim \dfrac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds}$ и пренебрегая $(\dfrac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds})^2$, получаем из (50)

$$b_1^{[1]} = -\frac{2K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\varepsilon_{s\Delta}^{[1]} - \frac{1}{K_1^{[0]}}D^+, \ b_2^{[1]} = \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\frac{d\varphi_\Delta^{[1]}}{ds} - \frac{1}{K_1^{[0]}h}D^-. \tag{51}$$

Здесь

$$\begin{gathered} D^+ = K_1^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}(\frac{h}{2}) + K_1^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}(-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(\frac{h}{2}) + \\ + K_2^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(-\frac{h}{2}), \\ D^- = K_1^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}(\frac{h}{2}) - K_1^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{22\Delta}^{[0]}(-\frac{h}{2}) + K_2^{[1]}(\frac{h}{2})\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(\frac{h}{2}) - \\ - K_2^{[1]}(-\frac{h}{2})\varepsilon_{11\Delta}^{[0]}(-\frac{h}{2}). \end{gathered} \tag{52}$$

Второй член асимптотического разложения приращения проекции главного вектора внутренних усилий в бетоне на ось x_2 в соответствии с (13) определяется из формулы

$$Q_{\text{б}2\Delta}^{[1]} = b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12\Delta}^{[1]}dx_2 = 2b[G^{[0]}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{12\Delta}^{[1]}dx_2 + \int_{-h/2}^{h/2}G^{[1]}(\overline{\gamma}_\Delta)\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}dx_2].$$

Используя (48), находим

$$Q_{\text{б}2\Delta}^{[1]} = b[-\frac{G^{[0]}}{2}a_3^{[1]}h^3 + 2\int_{-h/2}^{h/2}G^{[1]}(\overline{\gamma}_\Delta)\varepsilon_{12\Delta}^{[0]}dx_2]. \tag{55}$$

Приращение проекции усилия в верхней арматуре на ось x_2 (т.е. срезающее усилие в ней) определяется по формуле

$$Q_{u,2\Delta}^{[1]} = G_a\varepsilon_{12\Delta}^{[1]}(h_1)S_1 = -\frac{G_a}{2}d_2(h_1)S_1a_3^{[1]}. \tag{56}$$

Аналогично для нижней арматуры получаем

$$Q_{d,2\Delta}^{[1]} = G_a\varepsilon_{12\Delta}^{[1]}(-h_2)S_2 = -\frac{G_a}{2}d_2(h_2)S_2a_3^{[1]}. \tag{57}$$

Из условия равновесия

$$Q_{\text{б},2\Delta}^{[1]} + Q_{u,2\Delta}^{[1]} + Q_{d,2\Delta}^{[1]} + R_{A,2\Delta}^{[1]} = 0 \tag{59}$$

имеем

$$a_3^{[1]} = 2[R_{A,2\Delta}^{[1]} + 2b\int_{-h/2}^{h/2} G^{[1]}(\gamma_0)\varepsilon_{12}^{[0]}dx_2]/H_s\,. \tag{60}$$

Аналогично из равенства

$$Q_{б,1\Delta}^{[1]} + Q_{u,1\Delta}^{[1]} + Q_{d,1\Delta}^{[1]} + R_{A,1\Delta}^{[1]} = 0\,. \tag{61}$$

находим

$$\varepsilon_s^{[1]} = -D\,d\varphi_\Delta^{[1]}/ds - R_{A,1}^{[1]}/H_l + \varepsilon_s^{\otimes}\,. \tag{62}$$

Здесь

$$\varepsilon_s^{\otimes} = -\frac{\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} b\overline{E}_1^{[1]}}{H_l} - \frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds}[\frac{E_1^{[0]} ShD^-}{12K_1^{[0]}H_l} + \frac{1}{K_1^{[0]}}(DD^+ + D_1D^-)],$$

$$D_1 = E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2)/(hH_l).$$

Заметим, что $\varepsilon_s^{\otimes}$ зависит только от величин, найденных на предыдущем шаге, т.е. в первом приближении.

Аналогично (40) записываем равенство

$$M_{3\Delta}^{[1]} = -M_{b\Delta}^{[1]} - h_1Q_{u,1\Delta}^{[1]} + h_2Q_{d,1\Delta}^{[1]},\; M_{b\Delta}^{[1]} = b\int_{-h/2}^{h/2} x_2\sigma_{11\Delta}^{[1]}dx_2. \tag{63}$$

Можно убедиться, что

$$M_{b\Delta}^{[1]} = J[-E_1^{[0]}\frac{d\varphi_\Delta^{[1]}}{ds} + \frac{(K_1^{[0]} + E_1^{[0]})D^+}{2K_1^{[0]}}\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds} - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\frac{D^-}{h}] + b\tilde{E}_1^{[1]}\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} -$$

$$-b\tilde{\tilde{E}}_1^{[1]}\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds}\;(\tilde{E}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2)x_2dx_2,\; \tilde{\tilde{E}}_1^{[1]} = \int_{-h/2}^{h/2} E_1^{[1]}(x_2)x_2^2dx_2).$$

Тогда

$$M_{3\Delta}^{[1]} = H\,d\varphi_\Delta^{[1]}/ds + DR_{A,1\Delta}^{[1]} + M_3^{\otimes}, \tag{64}$$

где

$$M_3^{\otimes} = -E_a(S_1h_1 - S_2h_2)\varepsilon_{s\Delta}^{[0]} - [\frac{K_1^{[0]} + E_1^{[0]}}{2K_1^{[0]}}JD^+ + \frac{E_aS_1h_1^2}{K_1^{[0]}}(D^+ + \frac{h_1}{h}D^-) +$$

$$+\frac{E_aS_2h_2^2}{K_1^{[0]}}(D^+ - \frac{h_2}{h}D^-) - b\tilde{\tilde{E}}_1^{[1]}]\frac{d\varphi_\Delta^{[0]}}{ds} + J\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\frac{D^-}{h} - b\tilde{E}_1^{[1]}\varepsilon_{s\Delta}^{[0]}.$$

Так же, как и $\varepsilon_s^{\otimes}$, $M_3^{\otimes}$ выражается только через величины, найденные в первом приближении.

Аналогично (42) имеем

$$dM_{3\Delta}^{[1]}/ds = R_{A,2\Delta}^{[1]}\,.$$

Отсюда и из (64) находим

$$H\frac{d^2\varphi_\Delta^{[1]}}{ds^2} + D\frac{dR_{A,1\Delta}^{[1]}}{ds} + \frac{dM_3^{\otimes}}{ds} = R_{A,2\Delta}^{[1]}. \tag{65}$$

С учетом (28) равенство (65) можно записать так

$$H\frac{d^2\varphi^{[1]}}{ds^2} - D(H_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]} - V_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]})\frac{d\varphi^{[1]}}{ds} +$$

$$+(H_A^{[0]}\cos\varphi^{[0]} + V_A^{[0]}\sin\varphi^{[0]})(1 - D\frac{d\varphi^{[0]}}{ds})\varphi^{[1]} + H_A^{[1]}\sin\varphi^{[0]} - \tag{66}$$

$$-V_A^{[1]}\cos\varphi^{[0]} = H\frac{d^2\varphi^{[1]*}}{ds^2} + D\frac{dR_{A,1}^{[1]*}}{ds} - R_{A,2}^{[1]*} - DR_{A,2}^{[0]}\frac{d\varphi^{[0]}}{ds} - \frac{dM_3^{\otimes}}{ds}.$$

Заметим, что правая часть уравнения (66) зависит от величин, определенных в первом приближении, а также на предыдущих этапах деформирования балки.

Вывод

Уравнения (44) и (66) позволяют исследовать плоский изгиб железобетонных балок с учетом специфики нелинейного поведения бетона в зонах нагружения и разгрузки.

Литература

1. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вестник ОГАСА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – с. 273 – 287.
2. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вестник ОГАСА. Вып. 28, – Одесса, 2008. – с. 354 – 368.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М: Стройиздат, 1996.– 416 с.