

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Лимаренко А.М. (Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса)

Разработаны методики расчета тонкостенных стержней открытого профиля методами граничных и конечных элементов (МГЭ и МКЭ). Для реализации МГЭ использована среда MATLAB, а для реализации МКЭ — программа ANSYS. Сравнение полученных результатов свидетельствует об их хорошей сходимости. Сделан вывод о том, что при одинаковых результатах расчета эффективнее метод граничных элементов.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, граничный элемент, конечный элемент, MATLAB, ANSYS

Тонкостенные конструкции наилучшим образом отвечают требованиям экономичности при обеспечении надлежащих прочности и жесткости. Этим объясняется их широкое применение в различных областях техники – машиностроении, строительстве, авиации и т.д. Расчет тонкостенных систем методами теории оболочек сложен и далеко не всегда оправдан. Теории расчета тонкостенных стержней, созданные В.З.Власовым [2], А.А.Уманским [4], и развитые целым рядом их учеников и последователей упрощают задачу, но и здесь возникают проблемы при расчете сложных несимметричных систем. Весьма эффективным оказывается использование численных методов.

Целью работы является отработка методик расчета тонкостенных стержней открытого профиля методами граничных и конечных элементов с последующим сравнением полученных результатов.

В качестве объекта исследования выбрана двутавровая балка, имеющая составленное из трех прямоугольников поперечное сечение (рис.1).

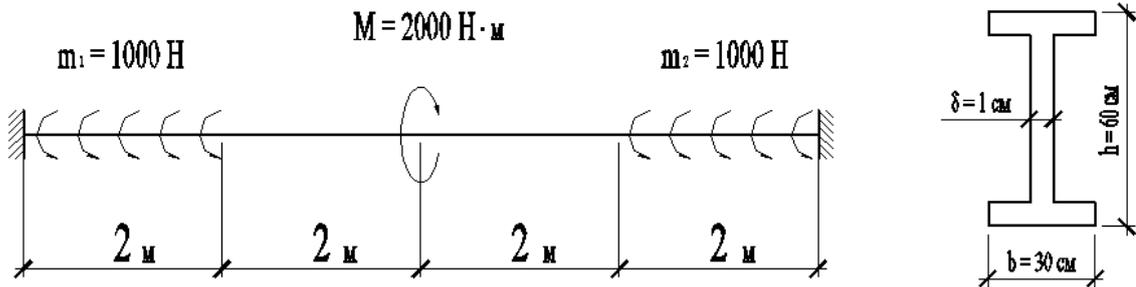


Рис.1

Расчет по методу граничных элементов

Уравнение стесненного кручения тонкостенного стержня имеет вид [2]

$$\theta^4(x) - k^2 \theta(x) = \frac{m(x)}{EI_w}, \quad (1)$$

где k – изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_w}}; \quad (2)$$

EI_w – секториальная жесткость; GI_d – жесткость при чистом кручении; θ – угол закручивания.

Уравнение (1) дополняется начальными параметрами:

кинематические

$GI_d \theta(0)$ – угол закручивания в масштабе жесткости;

$GI_d \theta'(0)$ – производная угла закручивания (имеет механический смысл крутящего момента);

статические

$B_w(0) = -GI_d \theta''(0)$ – бимомент;

$M_w(0) = -GI_d \theta'''(0)$ – изгибно-крутящий момент.

(3)

Отметим, что при стесненном кручении кинематический параметр $\theta'(x)$ имеет механический смысл статической величины — крутящего момента, а статические параметры $B_w(x)$ и $M_w(x)$ не определяются из уравнений статики.

Уравнение (1) и начальные условия (3) образуют задачу Коши стесненного кручения тонкостенного стержня. По стандартному алгоритму ее решение удобно представить в матричной форме [1]

$$\begin{bmatrix} GI_d \theta(x) \\ GI_d \theta'(x) \\ B_w(x) \\ M_w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & & A_{33} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GI_d \theta(0) \\ GI_d \theta'(0) \\ B_w(0) \\ M_w(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{13}(x) \\ -B_{41}(x) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где фундаментальные ортонормированные функции и слагаемые от внешней нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned} A_{13} &= chkx - 1; \quad A_{14} = \frac{shkx - kx}{k}; \quad A_{23} = kshkx; \quad A_{33} = chkx; \quad A_{34} = \frac{shkx}{k}; \\ B_{11} &= M \times A_{14}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{13}(x - a_B)_+ + m[A_{15}(x - a_H)_+ - A_{15}(x - a_K)_+]; \\ B_{21} &= M \times A_{13}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m[A_{14}(x - a_H)_+ - A_{14}(x - a_K)_+]; \\ B_{31} &= M \times A_{34}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{33}(x - a_B)_+ + m[A_{13}(x - a_H)_+ - A_{13}(x - a_K)_+] \div k^2; \\ B_{41} &= M \times A_{33}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m[A_{34}(x - a_H)_+ - A_{34}(x - a_K)_+ - A_{34}(x - a_K)_+]; \\ A_{15} &= \frac{chkx - H(x)}{k^2} - \frac{x^2}{2}; \end{aligned} \quad (5)$$

M - сосредоточенный крутящий момент; B_w - сосредоточенный бимомент;

m - распределенный крутящий момент; a_M, a_B, a_H, a_K - координаты внешней нагрузки.

Для определения неизвестных начальных параметров в уравнении (4) составляется и решается система линейных алгебраических уравнений по схеме (при $x = l$)

$$Y(l) = A(l) \times X(0) + B(l) \rightarrow A(l) \times X(0) - Y(l) = -B(l) \rightarrow A_*(l) \times X_*(l, 0) = -B(l); \quad (6)$$

Из уравнения (6) определяются неизвестные начальные параметры, а напряженное деформированное состояние во всех внутренних точках стержня определяется по уравнению (4). Рассмотрим на примере (рис.1).

Расчетные соотношения по МГЭ [1]:

$$\begin{bmatrix} GI_d \theta(x) \\ GI_d \theta'(x) \\ B_w(x) \\ M_w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & -A_{13} & -A_{14} \\ & & -A_{23} & -A_{13} \\ -1 & & A_{33} & A_{34} \\ & -1 & A_{23} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w^{0-1}(l) \\ M_w^{0-1}(l) \\ B_w^{0-1}(0) \\ M_w^{0-1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{11}^{0-1}(l) \\ -B_{21}^{0-1}(l) \\ B_{31}^{0-1}(l) \\ B_{41}^{0-1}(l) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Для практической реализации (7) использована среда MATLAB. Определено НДС рассматриваемой конструкции, которое представлено на рис.2 в виде эпюр углов закручивания $GI_d \theta(x)$, крутящих моментов $GI_d \theta'(x)$, бимоментов $B_w(x)$ и изгибно-крутящих моментов $M_w(x)$.

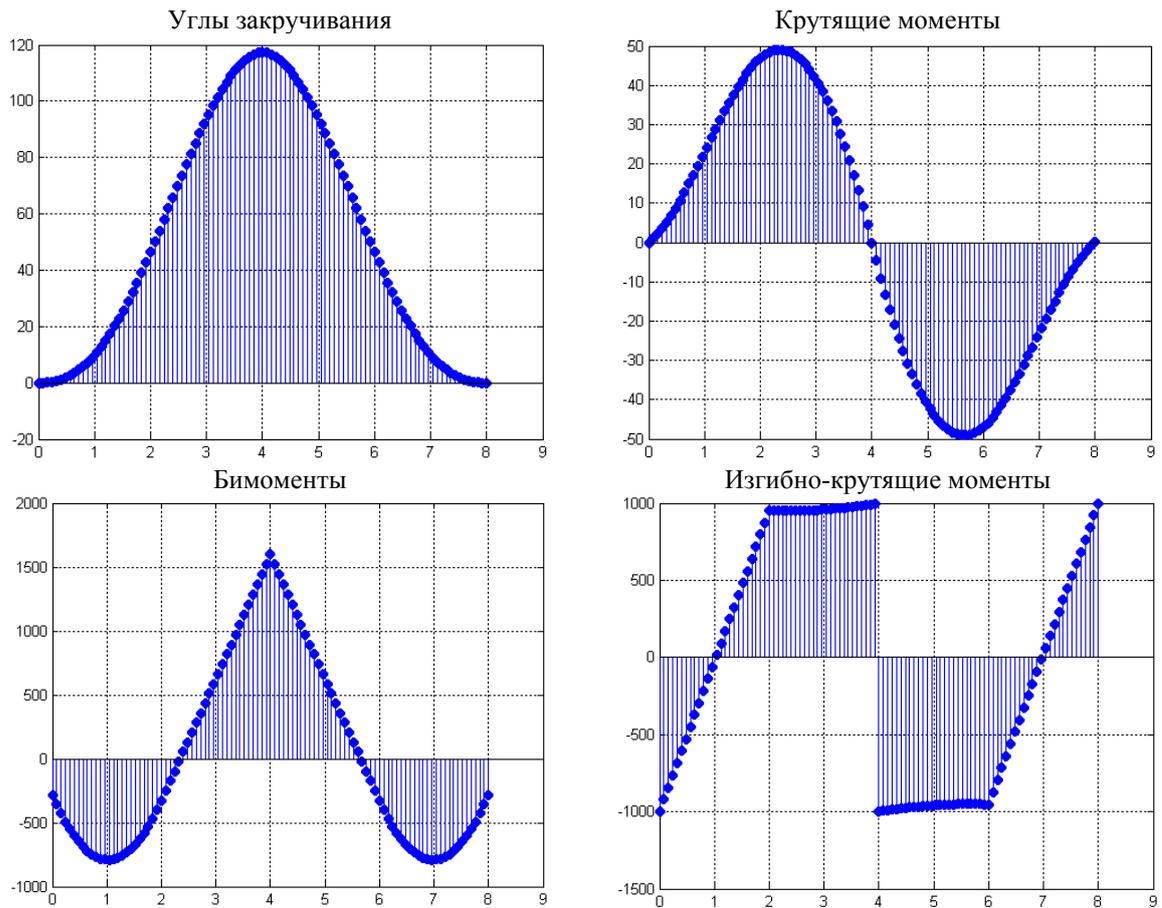


Рис.2

Расчет по методу конечных элементов

Для реализации алгоритма МКЭ выбрана программа ANSYS, которая является ведущим конечно-элементным пакетом на мировом рынке.

Аппроксимация трехмерной модели (рис.1) выполнена элементом BEAM189 из библиотеки конечных элементов программы ANSYS. Это квадратичный трехузловой стержневой элемент, используемый главным образом при расчете тонкостенных профилей (рис.3).

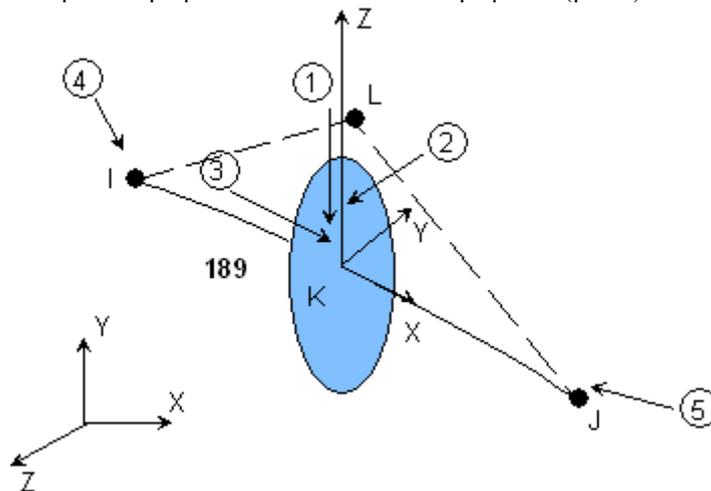


Рис.3

Конструкция элемента BEAM189 (как и BEAM188) позволяет выводить в результате расчета изгибно-крутящие бимоменты B_w , что не предусмотрено при использовании других балочных элементов. При этом на тонкостенный профиль не накладывается никаких ограничений.

На рис.4 показано деформированное состояние стержня, эпюры изгибно-крутящих бимоментов, крутящих моментов и углов закручивания, полученных в результате расчета в программе ANSYS.

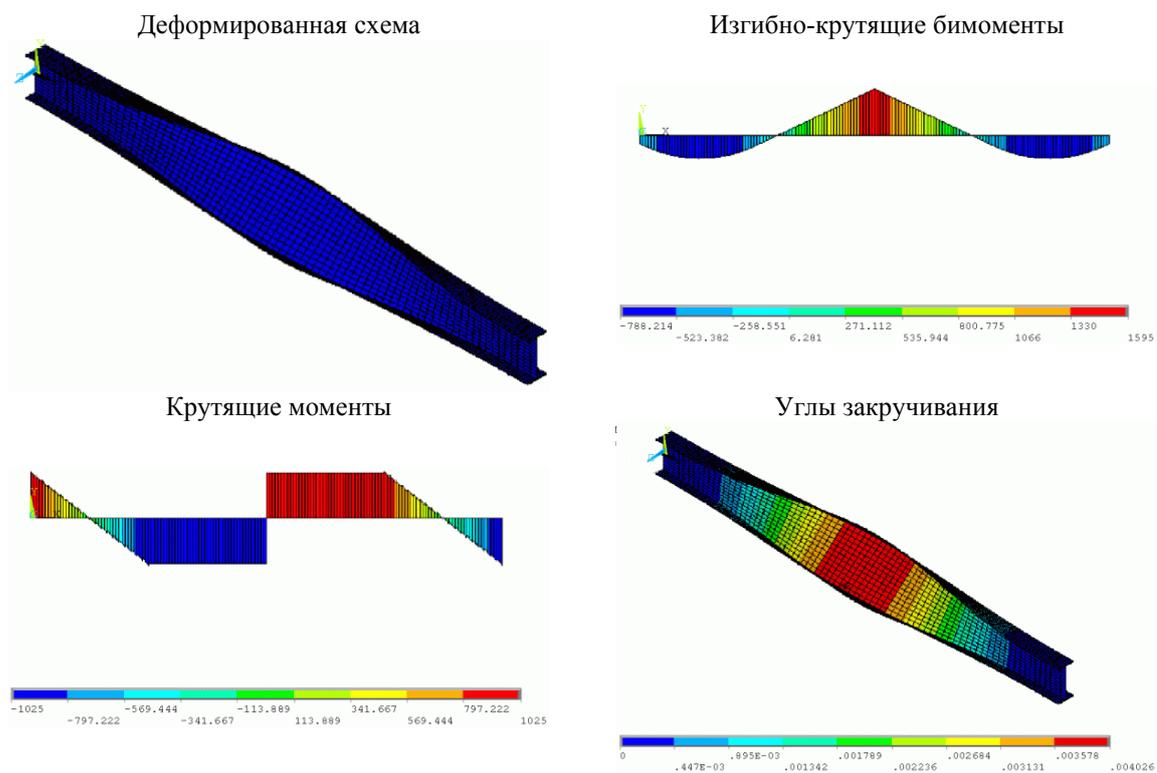


Рис.4

Сравнение результатов

В таблице представлены бимоменты, крутящие моменты и углы закручивания, вычисленные для ряда сечений стержня обоими численными методами.

Таблица

Сравнение результатов МГЭ и МКЭ

x, м	Угол поворота			Крутящий момент			Бимомент		
	МГЭ	МКЭ	%	МГЭ	МКЭ	%	МГЭ	МКЭ	%
0,0	0	0	0	-1000	-1025	2,44	-281,19	-273,82	2,62
0,5	0,000067	0,000068	1,47	-500	-512,50	2,44	-658,19	-650,72	1,13
1,0	0,000335	0,000340	1,47	0	0	0	-791,14	-783,35	0,98
1,5	0,000845	0,000861	1,86	500	512,50	2,44	-681,29	-674,37	1,01
2,0	0,00156	0,00159	1,89	1000	1025	2,44	-327,61	-320,54	2,16
2,5	0,00238	0,00242	1,65	1000	1025	2,44	148,10	144,29	2,57
3,0	0,00315	0,00320	1,56	1000	1025	2,44	625,20	618,81	1,02
3,5	0,00372	0,00379	1,85	1000	1025	2,44	1108,13	1102,94	0,47
4,0	0,00395	0,00403	1,98	-1000	-1025	2,44	1601,43	1595	0,40
4,5	0,00372	0,00379	1,85	-1000	-1025	2,44	1108,13	1102,94	0,47
5,0	0,00315	0,00320	1,56	-1000	-1025	2,44	625,20	618,81	1,02
5,5	0,00238	0,00242	1,65	-1000	-1025	2,44	148,10	144,29	2,57
6,0	0,00156	0,00159	1,89	-1000	-1025	2,44	-327,61	-320,54	2,16
6,5	0,000845	0,000861	1,86	-500	-512,50	2,44	-681,29	-674,37	1,01
7,0	0,000335	0,000340	1,47	0	0	0	-791,14	-783,35	0,98
7,5	0,000067	0,000068	1,47	500	512,50	2,44	-658,19	-650,72	1,13
8,0	0	0	0	1000	1025	2,44	-281,19	-273,82	2,62

Сравнение результатов свидетельствует об их незначительных расхождениях. Заметим, однако, что при решении методом граничных элементов пришлось решать 4 алгебраических уравнения, в то время как решение этой же задачи методом конечных элементов потребовало решения 160 алгебраических уравнений.

Литература

1. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика специальный курс применение метода граничных элементов. Одесса, «Астропринт», 2004. – 285 с.
2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 568 с.
3. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. Изд.2-е, испр., М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
4. Уманский А.А. Строительная механика самолета. М.: Государственное научно-техническое издательство ОБОРОНГИЗ, 1961. – 529 с.