ВІСНИК

ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО МОРСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

20

УДК 539.3

Н.Г. Сурьянинов

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разработана методика построения функции Грина при решении плоской задачи теории упругости методом граничных элементов (МГЭ). Приводится общий алгоритм построения функции Грина, в соответствии с которым получено ее выражение для случая свободных краев продольных кромок пластины.

Ключевые слова: *плоская задача теории упругости, функция Грина, граничный элемент.*

Задачи механики деформируемого твердого тела сводятся, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Получить их решение в замкнутом виде удается далеко не всегда, поэтому используются численные методы расчета.

Одним из быстро развивающихся в последние годы является метод граничных элементов (МГЭ), применение которого во многих случаях более эффективно, чем использование метода конечных элементов (МКЭ). С помощью МГЭ получены решения целого ряда задач, однако многие вопросы остаются пока нерешенными.

В работе исследуется одна из важнейших и актуальных проблем, возникающих при использовании МГЭ для решения плоской задачи теории упругости – построение функции Грина.

При решении плоской задачи в напряжениях основное разрешающее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = q, \tag{1}$$

где φ – функция напряжений Эри.

Используя метод Канторовича-Власова, уравнение (1) можно привести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, общим решением которого будет

$$Y = C_1 y_1(y) + C_2 y_2(y) + C_3 y_3(y) + C_4 y_4(y) + y_*(y). \tag{2}$$

Частное решение $y_*(y)$ в (2) зависит от вида внешней нагрузки; его удобно представить как

$$y_*(y)=\int_0^y G(y,\xi)q(\xi)d\xi, \tag{3}$$

где $G(y,\xi)$ – функция Грина.

Алгоритм построения функции Грина не зависит от краевых условий задачи и включает следующие операции:

1. Определение констант интегрирования $C_k(\xi)$ $(k=1,2,3,4)$ из линейной системы уравнений

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) & y_4'(\xi) \\ y_1''(\xi) & y_2''(\xi) & y_3''(\xi) & y_4''(\xi) \\ y_1'''(\xi) & y_2'''(\xi) & y_3'''(\xi) & y_4'''(\xi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/a_0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Определитель системы (4) является определителем Вронского, который не равен нулю на (0, l), поэтому система (4) имеет единственное решение.

2. Формирование частного решения

$$Y(y,\xi)=C_1(\xi)y_1(y)+C_2(\xi)y_2(y)+C_3(\xi)y_3(y)+C_4(\xi)y_4(y). \tag{5}$$

3. Построение функции Грина.

$$G(y,\xi)=Y(y,\xi)H(y-\xi), \tag{6}$$

где $H(y-\xi)$ – функция Хевисайда.

Если оговорить, что для функции Грина всегда выполняется неравенство $y>\xi$, то функцию Хевисайда в (6) можно опускать.

В случае свободных краев продольных кромок пластины (при условии, что коэффициент a_0 в основном дифференциальном уравнении равен единице),приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_1C_1+y_2C_2+y_3C_3+y_4C_4=0; \\ y_1'C_1+y_2'C_2+y_3'C_3+y_4'C_4=0; \\ y_1''C_1+y_2''C_2+y_3''C_3+y_4''C_4=0; \\ y_1'''C_1+y_2'''C_2+y_3'''C_3+y_4'''C_4=1, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$y = ch\alpha\xi \sin\beta\xi; \;\; y = ch\alpha\xi \cos\beta\xi;$$
$$y = sh\alpha\xi \cos\beta\xi; \;\; y = sh\alpha\xi \sin\beta\xi.$$

Решая систему (7) методом Гаусса, получим

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\alpha\, ch\alpha\xi \cos\beta\xi + \beta\, sh\alpha\xi \sin\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; \\ C_2 = \dfrac{-\alpha\, ch\alpha\xi \sin\beta\xi + \beta\, sh\alpha\xi \cos\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; \\ C_3 = \dfrac{\alpha\, sh\alpha\xi \sin\beta\xi - \beta\, ch\alpha\xi \cos\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; \\ C_4 = \dfrac{-\alpha\, sh\alpha\xi \cos\beta\xi - \beta\, ch\alpha\xi \sin\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}, \end{cases} \tag{8}$$

где

$\alpha = \sqrt{\dfrac{s^2 + r^2}{2}}$; $\beta = \sqrt{\dfrac{s^2 - r^2}{2}}$; s, r – коэффициенты характеристического уравнения задачи

$$k^4 - 2r^2k^2 + s^4 = 0.$$

Учитывая (5) и (6), для функции Грина находим

$$G(y,\xi) = C_1(\xi)y_1(y) + C_2(\xi)y_2(y) + C_3(\xi)y_3(y) + C_4(\xi)y_4(y) =$$
$$= \frac{\alpha\, ch\alpha\xi \cos\beta\xi + \beta\, sh\alpha\xi \sin\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} ch\alpha y \sin\beta y -$$
$$- \frac{\alpha\, ch\alpha\xi \sin\beta\xi - \beta\, sh\alpha\xi \cos\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} ch\alpha y \cos\beta y +$$
$$+ \frac{\alpha\, sh\alpha\xi \sin\beta\xi - \beta\, ch\alpha\xi \cos\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} sh\alpha y \cos\beta y -$$
$$- \frac{\alpha\, sh\alpha\xi \cos\beta\xi + \beta\, ch\alpha\xi \sin\beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} sh\alpha y \sin\beta y,$$

или, после несложных преобразований,

$$G(y,\xi)=\frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}[\alpha\, ch\alpha(y-\xi)\sin\beta(y-\xi)-$$
$$-\beta\, sh\alpha(y-\xi)\cos\beta(y-\xi)]. \tag{9}$$

Легко убедиться, что функция (9) обладает всеми свойствами, характерными для функции Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. / Численные методы в механике. – Одесса: СТАНДАРТЪ, 2005. – 563 с.*
2. *Оробей В. Ф. Работягов Д. Д. Расчет пластин на изгиб одномерным вариантом метода граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. «Строительство». – 1993. – № 1. – С. 20-27.*

Надійшла 12.05.06