

Сурьянинов Н.Г.
Одесский национальный
политехнический
университет

УДК 531/534:624(075.8)
**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ
ЗАДАЧИ ИЗГИБА
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН К
ОДНОМЕРНОЙ**

Розглянуто застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів (МГЕ) до розрахунку ортотропних пластин. Алгоритм МГЕ припускає приведення двовимірної задачі до одновимірної, що виконано варіаційним методом Канторовича-Власова. Для вибору функції поперечного розподілу прогинів пропонується два способи — статичний і динамічний. Отримані результати дозволяють визначити аналітичні вирази фундаментальних функцій, функції Гріна, які потім використовуються для вирішення крайових задач вигину ортотропних пластин за різних граничних умов.

Application of numeral-analytical boundary elements method (BEM) is considered to the calculation of ortotropic plate. The algorithm of BEM supposes bringing a two-dimensional task over to unidimensional, that it is executed by the variation method of Kantorovich-Vlasov. For the choice of function of transversal distribution of bending two methods — are offered static and dynamic. The got results allow, following the algorithm of BEM, to define analytical expressions of fundamental functions, Green function, that is after used for the decision of regional tasks of bend of ortotropic plate at different border terms.

Введение

Примерами анизотропных пластин, имеющих различную изгибную жесткость по разным направлениям, могут служить пластины из фанеры, текстолита, стеклопластика и т. п.

Если анизотропия механических свойств подчиняется закону симметрии относительно некоторых взаимно перпендикулярных осей, то такие пластины называют ортотропными.

К ортотропным пластинам относят также пластины с часто расположенными ребрами или гофрированные. В этом случае пластины называют конструктивно ортотропными.

Для решения задачи изгиба ортотропной пластины используются те же методы расчета, что и для расчета изотропной; применение этих методов сопряжено с известными трудностями.

Предлагается использовать для расчета численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ). При этом снимаются ограничения, как на граничные условия, так и на характер приложения внешних нагрузок. Одновременно повышается точность вычисле-

ний, т.к. МГЭ использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений [3].

Постановка задачи исследования

Рассмотрим изгиб пластины постоянной толщины, изготовленной из ортотропного материала.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины (уравнение Жермен-Лагранжа) имеет вид [1]

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})};$$
$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль упругости 2-го рода; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Кинематические параметры (прогиб и углы поворота)

$$\begin{aligned} W(x, y); \quad \theta_x(x, y) &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}; \\ \theta_y(x, y) &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Статические параметры (изгибающие моменты, поперечные силы и крутящий момент) определяются выражениями (3).

Основное разрешающее уравнение задачи имеет четвертый порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же время алгоритм МГЭ, предполагает решение одномерной задачи.

Это достигается применением метода Канторовича-Власова.

$$\begin{cases} M_x = -D_1 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ M_y = -D_2 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[D_2 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ H = -D_k \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

Разложим $W(x, y)$ в функциональный ряд:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \\ &+ \dots + W_n(y)X_n(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Безразмерную систему функций $X_i(x)$ необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси Ox . Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси Ox . Для выбора функции поперечного распределения прогибов $X(x)$ существуют два способа — *статический* и *динамический* [3].

При использовании статического способа прогиб балки определяется статической нагрузкой (рис. 1). Эта нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции $X_i(x)$ задаются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать, вычислять без применения сложных программ.

При использовании динамического способа прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний (рис. 2). Если в статическом способе необходимо строить функции $X_i(x)$ в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно изменять значения собственных частот, что весьма удобно. Но, применение функции $X_i(x)$ по этому способу возможно только с применением компьютеров. Функции $X_1(x)$ (индекс 1 у этих функций в дальнейшем опущен) для различных условий опирания представлены в табл. 1, где $\lambda = \omega$.

Будем удерживать в (4) один член ряда, что, как показано в наших предыдущих работах (например, в [3]), оказывается вполне достаточным для получения приемлемой точности результата, т.е.

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad q=1 \quad (5)$$

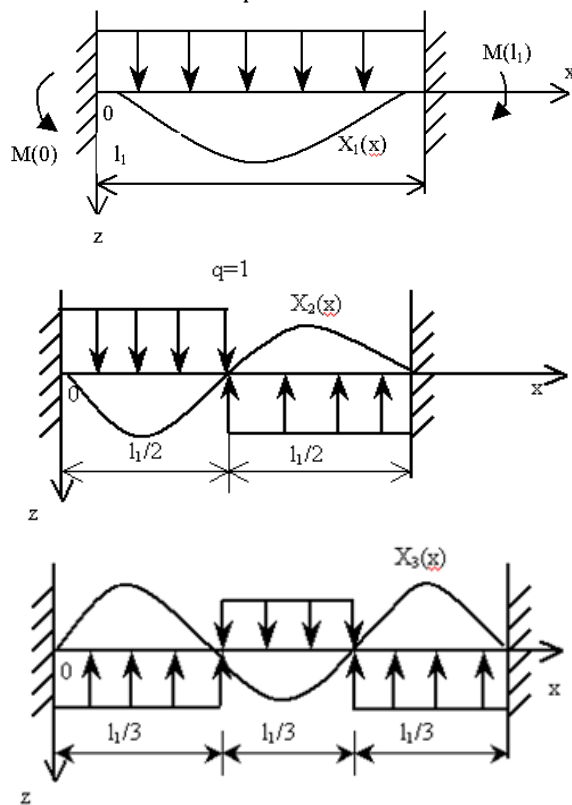


Рис. 1. Функции прогибов (статика)

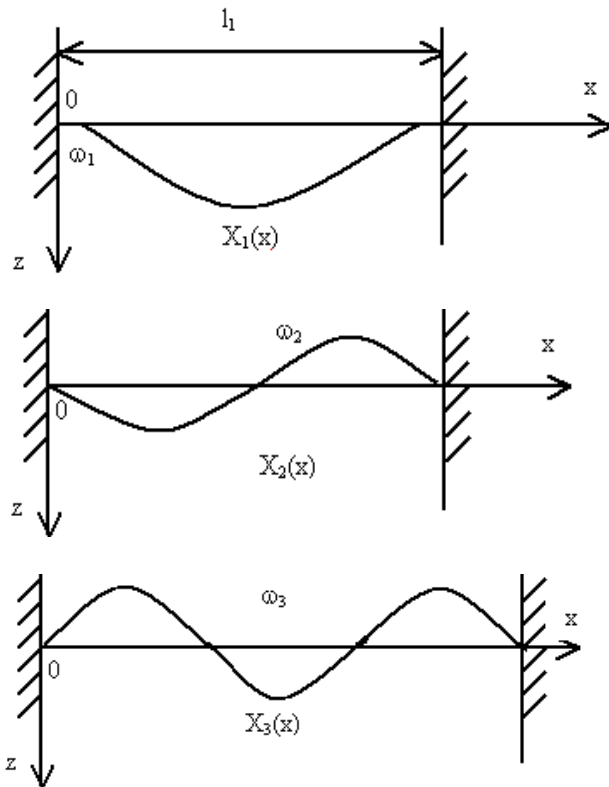


Рис. 2. Функции прогибов (динамика)

Таблица 1

Функции $X_1(x)$ для разных условий опирания

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - \text{sh}(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - \text{ch}(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - \text{sh}(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - \text{ch}(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - \text{sh}(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - \text{ch}(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1)$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) + \alpha_* \text{sh}(\lambda x / \ell_1)$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda}{\text{sh} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) + \text{sh}(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) + \text{ch}(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda}$

Подставим (5) в (1):

$$D_1 X^{IV} W + 2D_3 X'' W'' + D_2 X W^{IV} = q. \quad (6)$$

Умножим обе части уравнения (6) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x :

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{IV} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{IV} \int_0^{l_1} X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Введем обозначения:

$$D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx = A; \quad D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx = B; \quad D_1 \int_0^{l_1} X^{IV} X dx = C,$$

тогда

$$W^{IV} A + 2W'' B + W C = q(y),$$

где

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Коэффициенты A, B, C можно вычислить в каком-либо математическом пакете, например, в MATLAB.

Обозначая $B/A = -r^2$; $C/A = s^4$, получим

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = \frac{1}{A} q(y). \quad (7)$$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = 0. \quad (8)$$

При постоянных значениях D_1, D_2, D_3 поперечные силы Q_x, Q_y в (3) определяются так:

$$Q_x = - \left(D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial x^2} \right); \quad (9)$$

$$Q_y = - \left(D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (10)$$

После применения процедуры метода Канторовича-Власова, внутренние силовые факторы (3) с учетом (9) и (10) принимают вид

$$\begin{cases} M_x(x, y) = -D_1 (W X'' + \mu_{xy} W'' X); \\ M_y(x, y) = -D_2 (W'' X + \mu_{yx} W X''); \\ Q_x(x, y) = -(D_1 W X''' + D_3 W'' X'); \\ Q_y(x, y) = -(D_2 W''' X + D_3 W' X''); \\ H(x, y) = -D_k W' X'. \end{cases} \quad (11)$$

Дополним (11) кинематическими параметрами (углами поворотов)

$$\begin{cases} \theta_x = WX'; \\ \theta_y = W'X. \end{cases} \quad (12)$$

В соответствии с концепцией МГЭ [3], пластина рассматривается как обобщенный одномерный модуль, поэтому вектор ее состояния будет таким же, как и при изгибе балки:

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где W, θ_y, M_y, Q_y — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила соответственно.

Индекс "y" в дальнейшем будем опускать.

Решение уравнения (7) зависит от корней соответствующего характеристического уравнения [2]

$$K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (14)$$

Т.к. вектор состояния (13) содержит 4 компонента, а характеристическое уравнение имеет 4 корня, то для полного решения задачи об изгибе ортотропной пластины необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций.

Вид этих функций определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных (вдоль оси y) краях пластины.

В соответствии с алгоритмом МГЭ [3] сначала нужно решить задачу Коши. Это решение в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} W(y) \\ \theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^y \begin{pmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Решение (15) записано для случая, когда ось z направлена "вниз". Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба ортотропной прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня [3].

Положительное направление поперечной нагрузки показано на рис. 3.

Таким образом, решение уравнения (1) с использованием метода Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогиба

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (16)$$

где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (15).

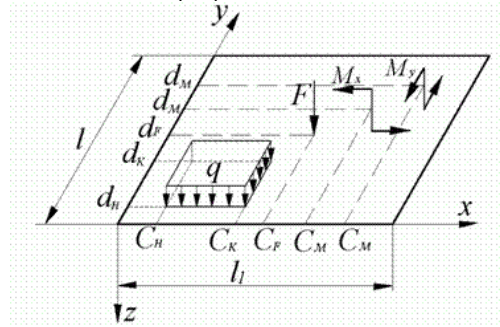


Рис. 3. Положительное направление нагрузки

Заключение

Используя полученные результаты, можно определить аналитические выражения фундаментальных функций, функции Грина и вектора нагрузок для каждого из четырех корней характеристического уравнения, которые затем позволяют решать краевые задачи изгиба ортотропных пластин при различных граничных условиях. Алгоритм решения легко программируется в среде MATLAB, и позволяет получить параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке ортотропной пластины.

Литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов — М.: Высшая школа, 1990. — 398 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа / А.Ф. Бермант — М.: Гостехиздат, 1953. — 358 с.
3. Дашченко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашченко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.