

О.Ф. Дащенко, д.т.н., Г.О. Оборський, д.т.н., М.Г. Сур'янінов, д.т.н.

ДОДАТОК МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗРАХУНКУ РЕБРИСТИХ ПЛАСТИН

ВСТУП

Рєбрїста пластїна являє собою сполучення взаємодїючих при деформації елементів — власне пластїни і ребер (одномірних стрижнів). Напружено-деформований стан кожного з цих елементів, обумовлений у рамках вїдомих прикладних теорїй, має свої особливості. У зв'язку з цим при вивченні ребристих пластин виникає необхідність побудови спецїальної теорїї, що враховує основні особливості, властивим окремим елементам, і умови їхньої спільної роботи. Представляється, що для рїшення цієї задачї може виявитися ефективним чисельно-аналїтичний метод граничних елементів [1, 4].

МЕТОД ДОСЛІДЖЕНЬ

Диференційне рївняння вигину пластинки при наявності ребер має вид [3]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D}, \quad (1)$$

де $W = W(x, y)$ — прогин пластинки; $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$ — вільний член рївняння, що враховує не тїльки зовнішні навантаження, але і наявність підкрїплювальних ребер у подовжньому напрямку, під яким будемо розумїти напрямок, рївнобїжний осї y (рис. 1).

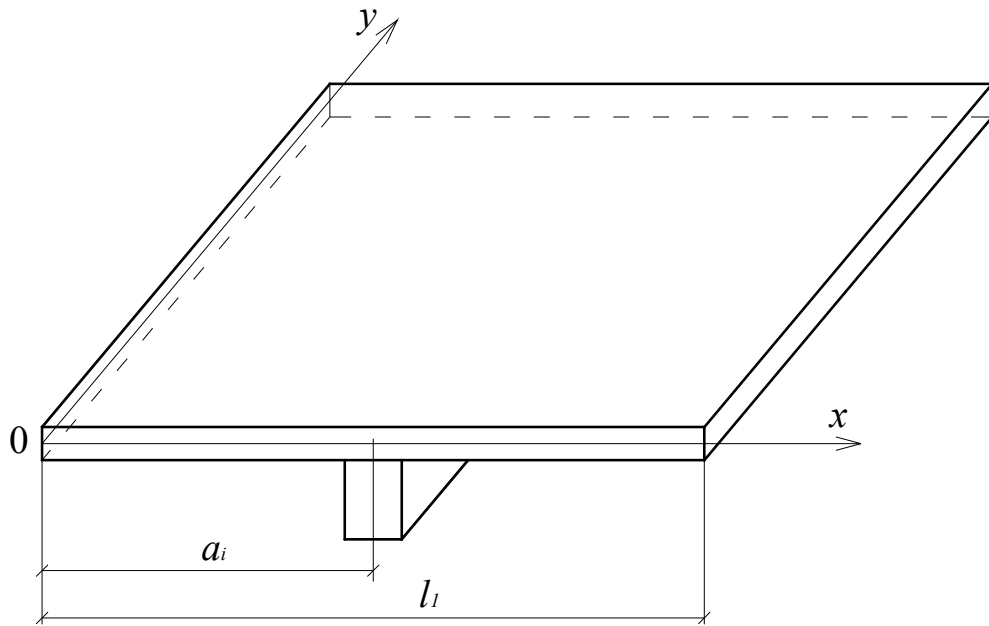


Рис. 1. Пластинка з ребром у подовжньому напрямку

Шляхом застосування для (1) методу Канторовича-Власова ця двовірна задача може бути зведена до одновірної, як того потребує загальна концепція методу граничних елементів [4].

Тоді прогин точки серединної площини пластини буде

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (2)$$

де $X(x)$ — функцію поперечного розподілу прогинів пластини, яка має точно описувати форму вигнутої поверхні пластини в напрямку осі x . Цій вимозі повною мірою задовольняють криві прогину балки, що має такі ж умови обпирання, як і пластини, у напрямку осі x .

Існують два способи для вибору цієї функції: статичний і динамічний [4]. При статичному способі прогин балки визначається прикладеної до неї статичним навантаженням (рис. 2). При динамічному способі прогини балки виражаються її формами власних коливань (рис. 3).

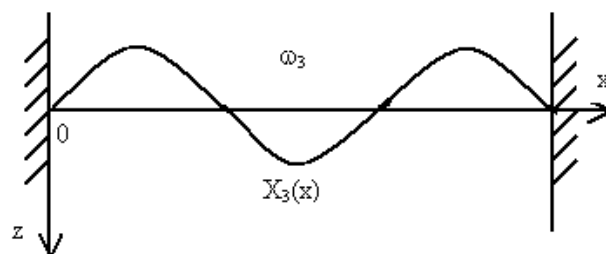
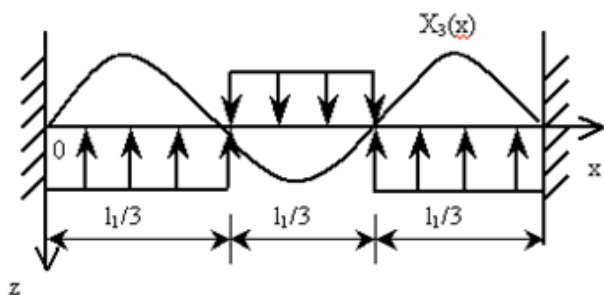
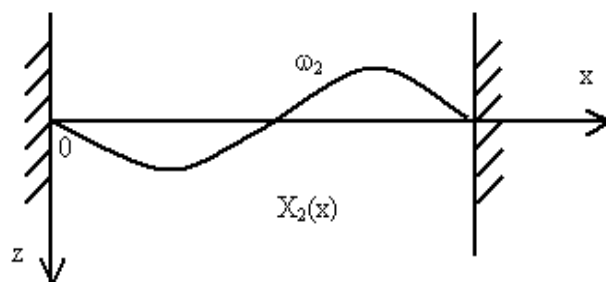
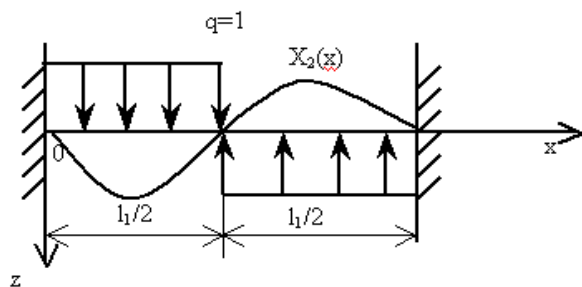
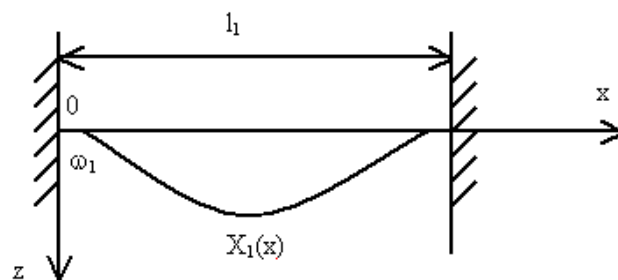
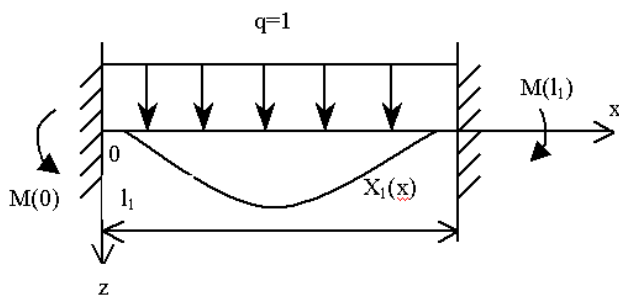


Рис. 2. Функції прогинів (статика)

Рис. 3. Функції прогинів (динаміка)

Підставимо (2) в (1) і у відомі з теорії вигину пластин вираження статичних параметрів (згинальних моментів і приведених поперечних сил). Множачи потім обидві частини кожного вираження на $X(x)$ й інтегруючи в межах $[0; l_1]$, одержимо задачу Коші одомірної моделі вигину прямокутної пластини, підкріпленої подовжніми ребрами:

$$W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = \frac{\bar{q}(y)}{D} \quad (3)$$

при початкових умовах

$$DW(0); D\theta(0) = DW'(0); M(0) = -D\bar{A}[W''(0) - \mu r^2 W(0)]$$

$$Q(0) = -D\bar{A}[W'''(0) - (2 - \mu)r^2W'(0)]; \quad (4)$$

де $r^2 = -\bar{B}/\bar{A}$; $s^4 = C/\bar{A}$; $\bar{q}(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y)X(x)dx/\bar{A}$; (5)

$$\bar{A} = A + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_x X^2(a_i) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_\omega [X'(a_i)]^2; \quad (6)$$

$$\bar{B} = B + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n EI_k [X'(a_i)]^2 + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} X^2(a_i); \quad (7)$$

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x)dx; \quad B = \int_0^{l_1} X''(x)X(x)dx; \quad C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x)X(x)dx. \quad (8)$$

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Диференційне рівняння (3) за своєю структурою аналогічно рівнянню, що описує вигин пластин без ребристих підкріплень, однак вигляд виражень (5) - (7) свідчить про те, що в (3) враховані параметри ребер.

Кінематичні і статичні параметри вигину підкріпленої пластини зовні збережуть той же вид, що і для пластини без ребер, але чисельно, звичайно, будуть відрізнятися, тому що вхідний у приведені нижче вираження прогин $W(y)$ буде відрізнятися від прогину відповідної “гладкої” пластини:

$$\theta_x(x, y) = W(y)X'(x); \quad \theta_y(x, y) = W'(y)X(x);$$

$$M_x(x, y) = -D[W(y)X''(x) + \mu W''(y)X(x)];$$

$$M_y(x, y) = -D[W''(y)X(x) + \mu W(y)X''(x)];$$

$$H_x(x, y) = -H_y(x, y) = -D(1 - \mu)W'(y)X'(x);$$

$$V_x(x, y) = -D[W_y(y)X'''(x) + W''(y)X'(x)];$$

$$V_y(x, y) = -D[W'''(y)X(x) + W'(y)X''(x)],$$

де $\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — кути поворотів; $M_x(x, y), M_y(x, y)$ — згинальні моменти;

$\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — крутильні моменти; $V_x(x, y), V_y(x, y)$; — поперечні сили.

Таким чином, при використанні методу Канторовича-Власова рішення основного диференційного рівняння задачі зводиться до визначення прогину (2),

де функція $X(x)$ задана, а функція $W(y)$ визначається у вигляді

$$DW(y) = A_{11} \cdot DW(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14}(y - \xi)q(\xi)d\xi.$$

Рішення рівняння (3) залежить від коренів відповідного йому характеристичного рівняння, що представляються вираженням

$$k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

Вид фундаментальних функцій визначається співвідношенням між r і s , що залежить від граничних умов на подовжніх крайках пластини і параметрів ребер жорсткості. Тут можливі шість випадків.

1. $|s| > |r|$, при цьому $k_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$,

де $\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}.$

2. $s = r$, $k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2}.$

3. $|s| < |r|$, $\lambda_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}.$

4. $k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = \pm r_1; \quad r_1 = -2\bar{B}/\bar{A}.$

5. $k_{1,2} = \pm i\beta; \quad k_{3,4} = \pm \alpha.$

6. $k_{1,2} = \pm\alpha i$; $k_{3,4} = \pm\beta i$;

Прогин $W(y)$ в кожному з цих випадків запишеться у виді

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4,$$

але функції $\Phi_1 - \Phi_4$ будуть різними.

Кожному з розглянутих вище коренів характеристичного рівняння відповідає своя система фундаментальних функцій [4].

Розглянемо квадратну пластинку, що жорстко закріплена по всьому контуру та завантажена рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 4).

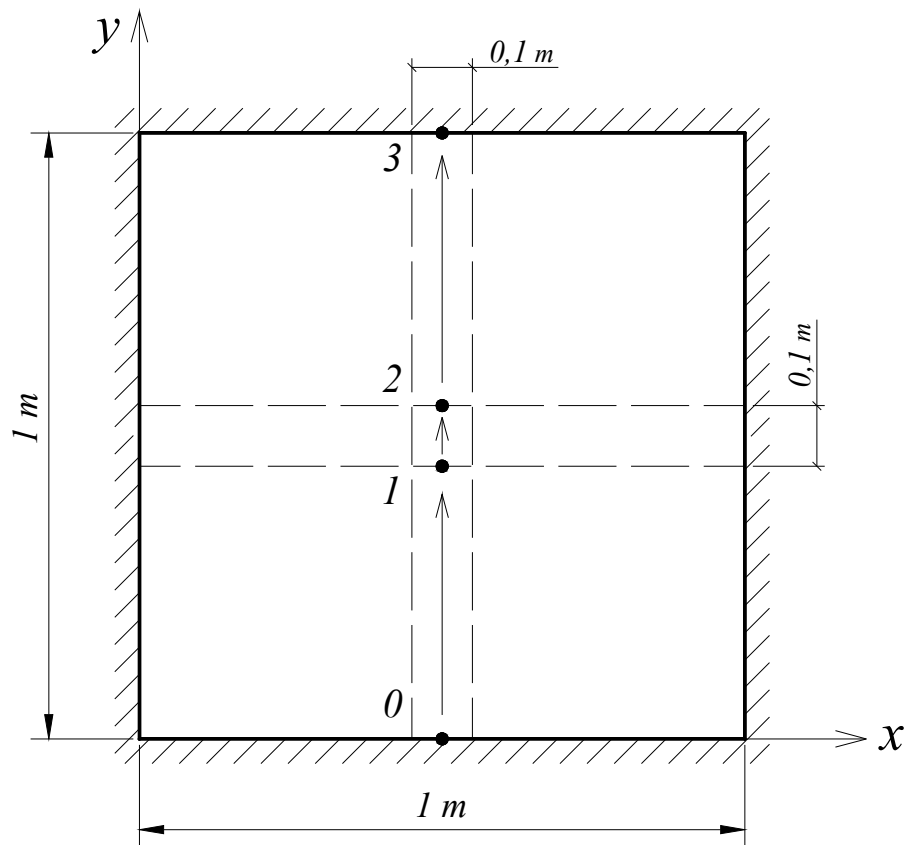


Рис. 4. Квадратна пластинка з жорстким закріпленням по контуру

Пластинка має по одному ребру жорсткості суцільного квадратного перетину в кожному напрямку. Це обмеження ніяк не позначиться на спільності розглянутого алгоритму МГЕ.

Сформуємо матриці X_* , Y й B і врахуємо, що область пластини дискретизується на три підобласті зі східчастою жорсткістю (рис. 5).

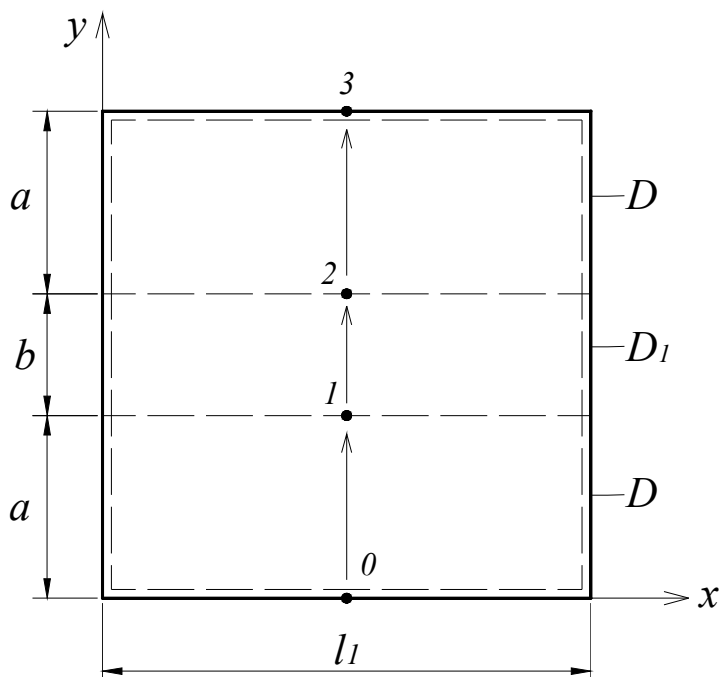


Рис. 5. Дискретизація пластини на три підобласті

Області 0 - 1 і 2 - 3 – це області пластини (з одним ребром у подовжньому напрямку), товщиною h , циліндрична жорсткість якої

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (9)$$

а область 1 – 2 теж будемо розглядати як пластину (без ребер), але товщиною $h_1 = h + h_{\text{ребра}}$ з циліндричною жорсткістю

$$D = \frac{Eh_1^3}{12(1 - \mu_1^2)}, \quad (10)$$

де μ_1 – усереднений коефіцієнт Пуассона пластини і ребра.

Матриці МГЕ приймають вид (11).

З (11) випливає, що в матриці A_* необхідно обнулити перший і третій стовпці. Далі параметри з вектора Y переносяться у вектор X_* .

$X_* =$	1	$DW^{0-1}(0) = 0;$ $D\theta^{2-3}(a)$	$; Y =$	$DW^{0-1}(a) = DW^{1-2}(0)$	$; B =$	$-B_{11}(a)$	(11)
	2	$D\theta^{0-1}(0)$		$D\theta^{0-1}(a) = D\theta^{1-2}(0)$		$-B_{21}(a)$	
	3	$M^{0-1}(0) = 0;$ $Q^{2-3}(a)$		$M^{0-1}(a) = M^{1-2}(0)$		$B_{31}(a)$	
	4	$Q^{0-1}(0)$		$Q^{0-1}(a) = Q^{1-2}(0)$		$B_{41}(a)$	
	5	$D_1W^{1-2}(0)$		$D_1W^{1-2}(b) = D_1W^{2-3}(0)$		$-b_{11}(b)$	
	6	$D_1\theta^{1-2}(0)$		$D_1\theta^{1-2}(b) = D_1\theta^{2-3}(0)$		$-b_{21}(b)$	
	7	$M^{1-2}(0)$		$M^{1-2}(b) = M^{2-3}(0)$		$b_{31}(b)$	
	8	$Q^{1-2}(0)$		$Q^{1-2}(b) = Q^{2-3}(0)$		$b_{41}(b)$	
	9	$DW^{2-3}(0)$		$DW^{2-3}(a) = 0$		$-B_{11}(a)$	
	10	$D\theta^{2-3}(0)$		$D\theta^{2-3}(a)$		$-B_{21}(a)$	
	11	$M^{2-3}(0)$		$M^{2-3}(a) = 0$		$B_{31}(a)$	
	12	$Q^{2-3}(0)$		$Q^{2-3}(a)$		$B_{41}(a)$	

Матричне рівняння МГЕ для пластини з ребрами жорсткості в двох напрямках прийме вигляд (12). Фундаментальні функції та вектор навантаження відповідають першому варіанту коренів характеристичного рівняння.

У (12) малими буквами a_{ij}, b_{i1} позначені матриці фундаментальних функцій і навантаження середньої частини 1 - 2 (рис. 5) як пластини, що не має ребер жорсткості. Великими буквами A_{ij}, B_{i1} позначені функції пластини з ребрами в подовжньому напрямку.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1		A_{12}		$-A_{14}$	$-\frac{D}{D_1}$								$D\theta^{2-3}(a)$	$-B_{11}^{0-1}(a)$
2		A_{11}		$-A_{13}$		$-\frac{D}{D_1}$							$D\theta^{0-1}(0)$	$-B_{21}^{0-1}(a)$
3		$-A_{32}$		A_{12}				-1					$Q^{2-3}(a)$	$B_{31}^{0-1}(a)$
4		$-A_{31}$		A_{11}				-1					$Q^{0-1}(0)$	$B_{41}^{0-1}(a)$
5					a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	$-a_{14}$	$-\frac{D_1}{D}$				$D_1W^{1-2}(0)$	$-b_{11}^{1-2}(b)$
6					a_{21}	a_{22}	$-a_{12}$	$-a_{13}$		$-\frac{D_1}{D}$			$D_1\theta^{1-2}(0)$	$-b_{21}^{1-2}(b)$
7					$-a_{31}$	$-a_{32}$	a_{22}	a_{12}				-1	$M^{1-2}(0)$	$b_{31}^{1-2}(b)$
8					$-a_{41}$	$-a_{31}$	a_{32}	a_{11}					$Q^{1-2}(0)$	$b_{41}^{1-2}(b)$
9									A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$DW^{2-3}(0)$	$-B_{11}^{2-3}(a)$
10	-1								A_{21}	A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$D\theta^{2-3}(0)$	$-B_{21}^{2-3}(a)$
11									$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	$M^{2-3}(0)$	$B_{31}^{2-3}(a)$
12			-1						$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{32}	A_{11}	$Q^{2-3}(0)$	$B_{41}^{2-3}(a)$

=
(12)

Прогини частин 0 – 1, 2 – 3 пластини визначаються вираженням

$$DW(x, y) = W(y) \cdot X(x) = [DW(0) \cdot A_{11}(y) + D\theta(0) \cdot A_{12}(y) - M(0) \cdot A_{13}(y) - Q(0) \cdot A_{14}(y) + B_{11}(y)] \cdot X(x).$$

Відповідно, прогин частини 1 – 2 (пластина з ребром у поперечному напрямку)

$$D_1W(x, y) = W_1(y) \cdot X(x) = [D_1W(0) \cdot a_{11}(y) + D_1\theta(0) \cdot a_{12}(y) - M(0) \cdot a_{13}(y) - Q(0) \cdot a_{14}(y) + b_{11}(y)] \cdot X(x).$$

Всі інші параметри вигину пластини з ребрами жорсткості в двох напрямках визначаються по рівняннях теорії пружності. У результаті розрахунку обчислені прогин і згинальний момент у центрі пластинки; результати розрахунку надані в табл. 1, де приводяться також значення прогину і згинаючого моменту в центрі пластинки, обчислені методом кінцевих елементів у програмі ANSYS.

Таблиця 1

Порівняння результатів (варіант 1)

Жорстке закріплення, розподілене навантаження			
Величина	МГЕ	МКЕ	Розбіжність, %
Прогин, м	-0,42923e-05	- 0,41665e-05	2,93
Згинальний момент, кН·м	3,6508e-02	3,6992e-02	1,31

Другий варіант розрахунку — квадратна пластинка, що жорстко закріплена по всьому контуру та завантажена зосередженою силою, прикладеною в її центрі.

Результати розрахунку надані в табл. 2.

Порівняння результатів (варіант 2)

Жорстке закріплення, зосереджена сила			
Величина	МГЕ	МКЕ	Розбіжність, %
Прогин, м	-0,16773e-04	- 0,16209e-04	3,36
Згинальний момент, кН·м	48,802	47,509	2,7

ВИСНОВКИ

Після побудови фундаментальних функцій, функції Гріна і формування векторів зовнішніх навантажень можна реалізувати алгоритм МГЕ [1] для будь-яких граничних умов і довільного числа ребер (як суцільного перетину, так і тонкостінного) в обох напрямках.

Загальна концепція пропонованого підходу полягає в наступному. Частина пластини, що мають ребра в поперечному напрямку (паралельно осі ox), розглядаються як «гладкі» пластини товщиною $h_1 = h + h_{\text{ребра}}$, де h — товщина власне пластини, $h_{\text{ребра}}$ — висота підкріплювального ребра. Для цих модулів справедлива теорія розрахунку «гладких» пластин методом граничних елементів, докладно викладена в [1, 4], з відповідними вираженнями фундаментальних функцій, функції Гріна, векторів навантажень і т.д. Інші модулі являють собою пластини, підкріплені ребрами жорсткості в подовжньому напрямку (паралельно осі Oy), і для них фундаментальні функції, функції Гріна, вектори навантажень визначаються вираженнями, отриманими для ребристих пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численные методы в механике / Баженов В.А., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. и др. — Одесса, «СТАНДАРТЪ», 2005. — 563 с.
2. Биргер И.А. Сопротивление материалов / Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / Власов В.З. — М.: Стройиздат, 1958. — 502 с.
4. Численно-аналитический метод граничных элементов / Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. — В 2-х томах. — Одесса. — СтандартЪ, 2010.