УДК 666.973

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТЕЛ ПРИ ИХ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Димитрова Ж.В. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

У статті розглядається задача з встановлення залежності між температурним полем досліджуваного тіла та його термодинамічними характеристиками.

Быстрый рост объема производства строительных и теплоизоляционных материалов, интенсификация его технологических процессов, получение и внедрение в практику новых материалов и конструкций вызывает необходимость разработки быстрых простых и надежных методов исследования и контроля их качества.

Известные стационарные и нестационарные методы определения коэффициента теплопроводности плоских тел оказались неприемлемыми в производственных условиях.

Одна из основных задач исследования заключается в установлении зависимости между формирующимся температурным полем исследуемого плоского тела и его теплофизическими характеристиками. Решение этой задачи производится аналитически (методом собсвенных функций).

Рассмотрим процесс, который осуществляется в условиях сопряженной в тепловом отношении плоской нестандартной задачи “Диск нагревателя – бесконечная пластина” при постоянной температуре спирали $t_{ст}$ = cjnst.

В плоскости Z=0 находится диск, $\delta << r_н$ причем нижняя поверхность диска контактирует с бесконечной пласттиной толщиной H. Внутри диска имеется спираль, нагреваемая электрическим током. Между спиралью и нижней частью диска находится слой изоляции. Задача отыскания температурного поля системы “диск-пластина” состоит в определении температур в диске (Z<0) и в бесконечной пластине $t_п$(Z<0). Распределение температуры в системе “диск-пластина” описывается уравнением Фурье в цилиндрических координатах

$$\frac{\delta^2 t_д}{\delta r^2} + \frac{\delta t_д}{\delta r} + \frac{\delta^2 t_д}{\delta Z^2} = \frac{1}{a_д} \cdot \frac{\delta t_д}{\delta \tau} \tag{1}$$

$$\frac{\delta^2 t_п}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta t_п}{\delta r} + \frac{\delta^2 t_п}{\delta Z^2} = \frac{1}{a_п} \cdot \frac{\delta t_п}{\delta \tau} \tag{2}$$

где $a_д$ и $a_п$ – соответственно коэффициенты температуропроводности диска и пластины.

Температура диска $t_д$ и температура пластины $t_п$ кроме уравнений (1) и (2) удовлетворяют соответствующим граничным условиям и условиям сопряжения тепловых потоков при Z=0

$$\lambda_д \frac{\delta t_п}{\delta Z} = \alpha_1 (t_д - t_{сп})\ при\ Z = -\delta$$

$$\lambda_д \frac{\delta t_д}{\delta Z} = \alpha_к (t_п - t_д)\ при\ Z = 0 (0 \le r \le R)$$

$$\lambda_п \cdot \frac{\delta t_п}{\delta Z} = \alpha_к (t_п - t_д)\ при\ Z = 0; (0 \le r \le R)$$

$$\lambda_д \cdot \frac{\delta t_д}{\delta Z} = \alpha_2 (t_п - t_0)\ при\ Z = 0; (R \le r > \infty)$$

$$\frac{\delta t_п}{\delta Z} = 0;\ при\ Z = H_т$$

где $\lambda_д$ и $\lambda_п$ – соответственно коэффициенты теплопроводности диска и пластины; α_1 $\alpha_к$ α_2 – коэффициенты теплоотдачи от спирали к диску, от диска к пластине, от пластины в окружающую среду соответственно; $t_о$ – температура окружающей среды; $H_т$ - текущая толщина, которой достигла температурная волна.

Так как $\varepsilon = \frac{\delta}{r_н}$ <1, а ε^2 <<1, то тепловым потоком в радиальном направлении можно пренебречь. Обозначим $t_д - t_{сп} = \Theta_1$. Тогда уравнение (1) принимает вид, характерный для одномерной задачи

$$\frac{1}{a_д} \cdot \frac{\delta \Theta_1}{\delta \tau} = \frac{\delta^2 \Theta_1}{\delta Z^2} - \frac{\delta t_{сп}}{\delta \tau} \tag{3}$$

Аналогично примем, что распространение тепла в бесконечной пластине происходмит только в направлении оси Z, аа растечки тепла вдоль пластины (по оси r) пренебрежимо малы. Допустимость такого упрощения обосновывается неравенством ℓ >>H, а так же тем, что согласно предварительному анализу и решениям на гидроинтеграторе влияние теплообмена свободной поверхности пластины с окружающей средой пренебрежимо мало (при $\alpha_{oc} = 0 \div 1200$ Вт/м^{2}К). В связи с этим уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial t_n}{\partial \tau} = a_n \frac{\partial^2 t}{\partial Z^2} \qquad (4)$$

$$t_n(Z, \tau_o) = t_n^o(Z) \qquad (5)$$

Используя условия сопряжения тепловых потоков (Z=0) от диска к пластине, получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} - \frac{\alpha_1}{\lambda_n} \cdot \Theta = 0; при\ Z = 0 \qquad (6)$$

где: $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\delta}{\lambda}$ – термическое сопротивление между спиралью и поверхностью пластины.

$$\frac{\partial t_n}{\partial Z} = 0; при\ Z = H \qquad (7)$$

Произведем замену искомой функции:

$$\Theta = t_n - t_{cm},$$

тогда решающие задачу уравнения (4-7) примут вид:

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} - \frac{\partial t_{cm}}{\partial \tau} \qquad (8)$$

$$\Theta(Z, \tau_o) = \Theta^o(Z) \qquad (9а)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} - \frac{\alpha_1}{\lambda_n} \cdot \Theta = 0; при\ Z = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0; при\ Z = H_m \qquad (10)$$

Решение задачи (8-10) проведем методом собственных функций. Собственные функции U(Z) и собственные значения γ определяем решением задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \gamma^2 U = 0 \qquad (11)$$

Находим решение уравнения (11)

$$U_k(Z) = \cos(\gamma_k \cdot Z) + \frac{h}{\gamma_k} \sin(\gamma_k \cdot Z) \qquad (12)$$

Где γ_k – корни уравнения, K=1,2…

$$ctg(\gamma_k \cdot H_m) \frac{\gamma}{h} \qquad (13)$$

Теперь решение задачи (8) представим в виде ряда Фурье по собственным функциям

$$\Theta(Z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(\tau) \cdot U_k(Z) \qquad (14)$$

где

$$W_k(\tau) = D_k^o e^{-a_n \gamma_k^2 (\tau - \tau_o)} - Q_k \int_0^{\tau_o} \frac{dt_{cm}}{d\tau} \cdot e^{-a_n \gamma_k^2 (\tau_o - t)} dt$$

Для нахождения коэффициентов $W_k(\tau)$ ряда (14) умножим уравнение (8) на $\frac{U_k(Z) dZ}{N_k^2}$ и результат проинтегрируем по Z от 0 до $H_т$ получим:

$$\frac{dW_k(\tau)}{d\tau} + a_n \cdot \gamma_k^2 \cdot W_k(\tau) = -Q_k \frac{dt_{cm}}{d\tau} \qquad (15)$$

$$Q_к = \frac{1}{N_к^2} \cdot \int_0^H U_к(Z) dZ$$

Решение этого уравнения с начальными условиями (9а) будет:

$$W_к(\tau) = D_к^o e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau - \tau_o)} - Q_к \int_0^{\tau_o} \frac{dt_{сп}}{d\tau} \cdot e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau_o - t)} dt$$

где: $D_к^o = \frac{1}{N_к^2} \int_o^{H_т} \Theta^o(Z, \tau_o) \cdot U_к(Z) dZ$

Итак, искомое распределение температуры в плите имеет вид:

$$t_к(Z, \tau) = t_{сп}(\tau) + \sum_{к=1}^{\infty} D_к^o \cdot e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau - \tau_o)} \cdot U_к(Z) -$$

$$- \sum_{к=1}^{\infty} Q_к \cdot U_к(Z) \cdot \int_o^{\tau_o} \frac{dt_{сп}}{d\tau} \cdot e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau_o - t)} dt \qquad (16)$$

Формула (16) показывает, что температурное поле плиты зависит от её начальной температуры, температуры спирали и скорости её изменения.

При расчетах формулы (16) следует применять в два этапа. Для первого участка когда $\tau = \tau_o = 0$, $\Theta^н$ и $t_{сп} = t_н + v_н \tau$ где: $v_н$ – скорость повышения температуры спирали. Температуру пластины на первом этапе определяем по формуле:

$$t_к^I = t_{сп}(\tau) \pm \sum_{к=1}^{\infty} Q_к U_к(Z) \frac{v_к}{a_к \gamma_к^2} \left(1 - e^{-a_п \gamma_к^2 \tau_o}\right) \qquad (17)$$

Для второго участка ($t_{сп}$ – const, а начальная температура $\Theta^н$ =70) температуру плиты определяем по формуле:

$$t_к^{II} = t_{сп} + \sum_{к=1}^{\infty} D_к^o e^{-a_п \gamma_к^2 \tau_o} \cdot U_к(Z)$$

где:

$$D_к^o = \Theta^o(Z) \left\{ \frac{\sin(\gamma_к H_т)}{\gamma_к} - \frac{h}{\gamma_к^2} \left[cos(\gamma_к H_т) - 1 \right] \right\} +$$

$$+ \left[cos(\gamma_к H_т) + \frac{h}{\gamma_к} \sin(\gamma_к H_т) - 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{cos(\gamma_к H_т)}{\gamma_к^2} (1 - hH_т) + \frac{\sin(\gamma_к H_т)}{\gamma_к} \left(H_т + \frac{h}{\gamma_к^2} \right) - \frac{h}{\gamma_к^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{H_т}{2} + \frac{\sin(2\gamma_к H_т)}{4\gamma_к} + \frac{h}{\gamma_к^2} \left[\sin^2(\gamma_к H_т) + \frac{hH_т}{2} \right] - \frac{h^2 \sin(2\gamma_к H_т)}{4\gamma_т^3} \right\}^{-1}$$

В дальнейшем исследовании представляет интерес температура поверхности пластины в центре под нагревателем (t^{xx}) в момент начала изменения температуры противоположной нагревателю поверхности пластины (t_2). Аналитическое выражение этой температуры определяем из уравнения (16).

$$t_к(0, \tau^{xx}) = t^{xx}(0, \tau^{xx}) = t_{сп}^{II} + \sum_{к=1}^{\infty} D_к^{II} e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau^{xx} - \tau_1)} \qquad (18)$$

Выражение (18) может быть использовано также для расчетов температуры поверхности тела в центре под нагревателем в квазиустановившийся период.

$$t^x(0, \tau^{xx}) = t_{сп}^{II} + \sum_{к=1}^{\infty} D_к^{II} e^{-a_п \gamma_к^2 (\tau^x - \tau_1)} \qquad (19)$$

В результате опытов, проведенных как путем прямого эксперимента, так и методом гидротепловой аналогии была получена обобщенная зависимость из которой можно по данным измерений Θ^{xx}, τ^{xx} определить $\lambda_п$,

$$\Theta^{xx} = \frac{t_{сп} - t^{xx}}{t_{сп} - t_н} = 0{,}37 \exp(28{,}2 \cdot F_o) \cdot (R_н / R_o)^{0{,}37} \qquad (20)$$

$$\lambda_к = 0{,}035 \frac{c_p \cdot \rho \cdot H^2}{\tau^{xx}} \cdot \ln \frac{\Theta^{xx}}{0{,}37 (R_н / R_o)^{0{,}37}} \qquad (21)$$

Результаты расчетов по формулам (17) и (18) для различных термических сопротивлений диска, а также расчетов по формуле (20) показывают, что они хорошо согласуются. Погрешность определения не превышает 9-14 %.

Вывод

В результате расчетов получена обобщенная зависимость для определения теплофизических характеристик тела.

1. Лыков А.В. “Теория теплопроводности”, М., “Высшая школа”, 1987г.
2. Лабай В.Й. Тепломасообмін, Львів, “Тріада Плюс” 1998г.