

УДК 531.55:521.2

©2006. Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

ЭВОЛЮЦИЯ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Момент сил сопротивления полагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо. Проведены аналитическое исследование и численный анализ. Установлен эффект убывания модуля кинетического момента. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат.

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Вращательное движение изучается в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электромагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1 – 8].

Для решения задачи введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $Ox_i (i = 1, 2, 3)$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу – вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oy_i (i = 1, 2, 3)$ связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента \mathbf{G} . Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы y_1, y_2, y_3 образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат $Oz_i (i = 1, 2, 3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Положение главных центральных осей инерции относительно осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано в [1–3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь L_i – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, $A_i (i = 1, 2, 3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i , $A_1 = A_2 \neq A_3$.

Проекции L_i момента внешних сил складываются из проекций гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r , на оси Oy_i они записываются в виде [2, 6]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$\begin{aligned}L_1 &= L_1^g + L_1^r \equiv \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \theta)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}) - \\ &- G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_1} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right), \\ S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \quad \beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta,\end{aligned}\quad (2)$$

ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты.

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}.\quad (3)$$

Рассматривается динамически симметричный спутник в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1 \omega_0/G \ll 1$.

В работе также предполагается, что момент сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1, 6]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|I\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Исследуем решение системы (1) – (3) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [9].

В случае невозмущенного движения Эйлера – Пуансо (при $\varepsilon = 0$), когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ, ψ являются линейными функциями, а угол θ – величина постоянная [10]. Величины G, δ, λ, ν в невозмущенном движении обращаются в постоянные. Для возмущенного движения углы φ, ψ являются быстрыми переменными, а переменные $G, \delta, \lambda, \nu, \theta$ – медленными. Поэтому проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных $G, \lambda, \delta, \theta$ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ . После усреднения по ψ и φ имеем:

$$\frac{dG}{dt} = -G \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right],$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \left[-\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda) \sin \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} \cos^2(\nu - \lambda) \cos \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Интегрируя второе уравнение системы (4) для угла прецессии, получим:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \exp \left[\left(-\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} \right) t \right], \quad (5)$$

где θ_0 – начальное значение угла прецессии.

Учитывая равенство (5), можно получить аналитическое решение для первого уравнения системы (4) в явном виде:

$$G = G_0 \cos \theta_0 \exp \left(-\frac{I_{33}}{A_3} t \right) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp \left(2 \left(-\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} \right) t \right)}. \quad (6)$$

Здесь G_0 – значение кинетического момента спутника в начальный момент времени.

Рассмотрим два последних уравнения системы (4) и уравнение для истинной аномалии (3).

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (4), δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения [11], имеем:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{2Gh(e)}, \quad N = (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right). \quad (7)$$

Исследуем систему, состоящую из двух первых уравнений системы (4) и двух уравнений системы (7), произведя ее обезразмеривание. Характерными параметрами задачи будут: G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Получим для безразмерных переменных систему вида:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \tilde{G} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\tilde{A}_1} (\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}) + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \cos^2 \theta \right], \quad \frac{d\theta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \left[-\frac{\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{\delta} &= 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\varepsilon^2 \tilde{N} \cos \delta}{2\tilde{G} h(e)}, \quad \tilde{N} = (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).\end{aligned}\quad (8)$$

Интегрирование системы (8) производится в медленном времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$ при начальных условиях $G(0) = 1$; $\delta(0) = \pi/4$ рад; $\lambda(0) = \pi/4$ рад; $\theta(0) = \pi/6$ рад и значениях

главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 4.175$; $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.04473$ – 1-й советский спутник; $e = 0.0487$ – 3-й советский спутник; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита [1]. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 2.0$; $I_{22} = 1.0$; $I_{33} = 0.5$. В первом случае величина в квадратных скобках второго уравнения системы (8) будет положительной, а во втором случае – отрицательной.

Для проверки корректности численного расчета уравнений системы (8) производился сравнительный анализ графиков численного и аналитического расчетов в безразмерном виде для кинетического момента G и угла нутации θ , для которых известны аналитические решения (5) и (6). Численный расчет совпадает с аналитическим решением в обоих случаях с точностью до шестого знака. Графики приведены на рис. 1, 2 в двух возможных расчетных случаях коэффициентов сопротивления, где 1 – первая комбинация коэффициентов, а 2 – вторая.

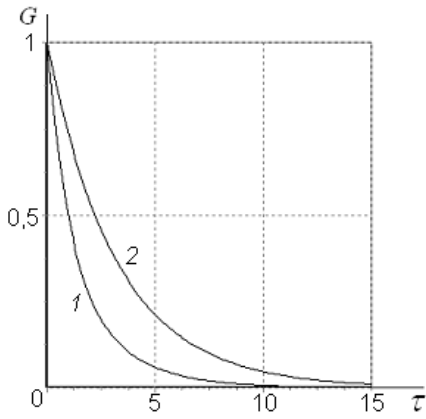


Рис. 1

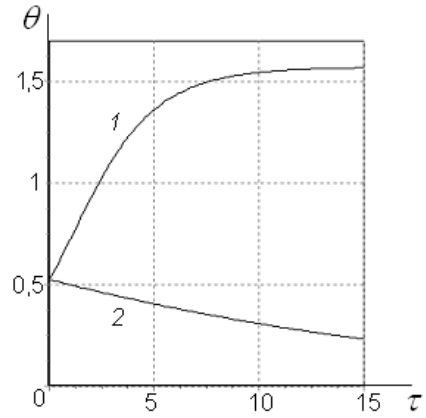


Рис. 2

Подставляя (5) и (6) в последнее уравнение системы (4), получим дифференциальное уравнение для угла λ , которое можно решить только численно независимо от системы (4):

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta (A_1 - A_3)}{2G_0 \cos \theta} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_0 e^{2kt}\right) e^{\beta t}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 e^{2kt}\right)^{3/2}}, \quad k = -\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3}, \quad \beta = \frac{I_{33}}{A_3}. \quad (9)$$

Сравнивались графики зависимости угла λ для решения системы дифференциальных уравнений (4) и решения автономного уравнения (9) в безразмерном виде в обоих расчетных случаях. Имеем в двух случаях на рис. 3, 4 совпадение с точностью до шестого знака.

Четвертое уравнение системы (8) требует дополнительного исследования, так как функция \tilde{N} является знакопеременной и зависит от знака выражения $(1 - 3/2 \sin^2 \theta)$. Необходимо определить, при каких значениях угла θ это выражение является положительным. Имеем, что угол $\theta \in [0; \approx 54.74^\circ]$. Поэтому во втором расчетном случае выражение $(1 - 3/2 \sin^2 \theta)$ остается положительным на всем интервале времени, а значит функция λ согласно четвертому уравнению системы (8), является монотонно возрастающей. В первом расчетном случае угол θ увеличивается и проходит критическое

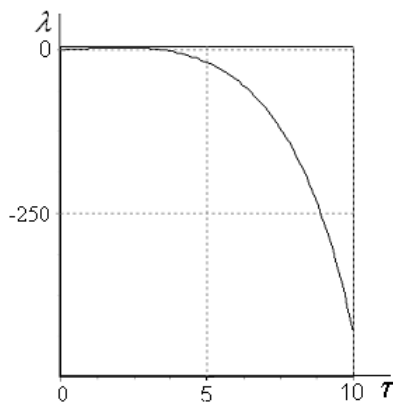


Рис. 3

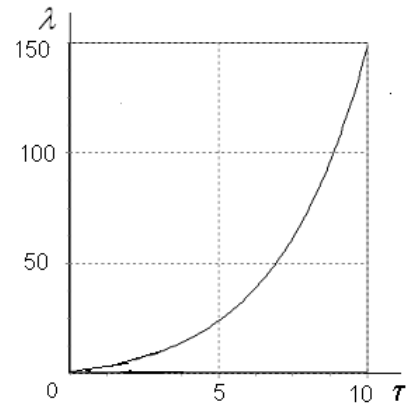


Рис. 4

значение 54.74° , поэтому знак выражения меняется. Подробное численное исследование показывает, что функция $\lambda(t)$ в первом расчетном варианте имеет вид, представленный на рис. 5.

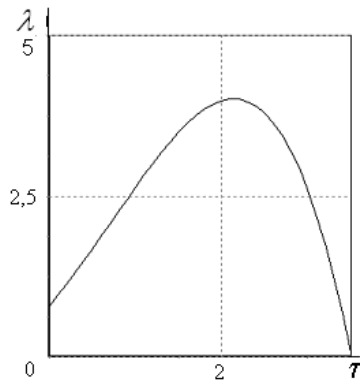


Рис. 5

Имеет смысл провести численный расчет для функции λ при различных начальных значениях угла нутации θ . Численный анализ приводит к кривым вида (см. рис. 6, 7).

Кривые 1 соответствуют начальному углу нутации $\theta_0 = \pi/6$ рад, а кривые 2 – $\pi/3$ рад. Для первого расчетного случая квадратная скобка во втором уравнении системы (8) является величиной положительной, а функция $\theta = \theta(t)$ является монотонно возрастающей. Для кривой 1 в начальный момент времени $\tilde{N} > 0$, следовательно, функция $\lambda = \lambda(t)$ возрастает. С течением времени угол θ

увеличивается, проходя критическое значение, а значит \tilde{N} становится величиной отрицательной и функция угла λ убывает. Согласно кривой 2 функция $\lambda = \lambda(t)$ является монотонно убывающей, так как всегда выполняется равенство $\tilde{N} > 0$.

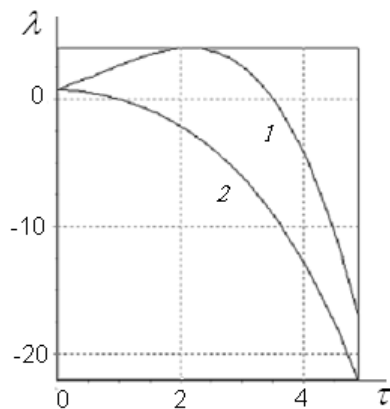


Рис. 6

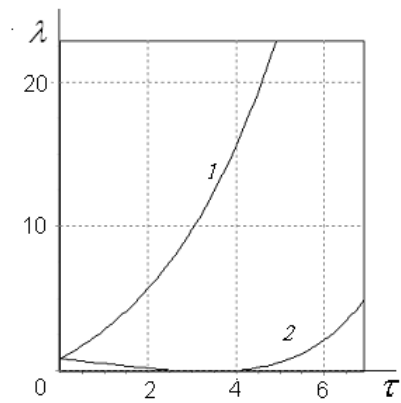


Рис. 7

Во втором расчетном случае коэффициентов сопротивления характер кривых меняется с точностью до наоборот, так квадратная скобка во втором уравнении системы (8) является величиной отрицательной, а функция $\theta = \theta(t)$ монотонно убывающей. Все приведенные графики (рис. 1–7) соответствуют круговой орбите ($e = 0$) центра масс спутника во вращательном движении вокруг Земли. Вид функций, характеризующих движения, не изменяется для эллиптических орбит, поэтому графики не приводятся.

Таким образом, исследовано движение динамически симметричного спутника относительно центра масс под действием совместного влияния гравитационного притяжения и вязкого сопротивления. Аналитически и численно установлены основные свойства вращений.

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Черноуцько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып.3. – С. 474 – 483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. – Киев: Наук. думка, 1984. – 188 с.
5. *Белецкий В.В., Грушевский А.В.* Эволюция вращательных движений спутника под действием диссипативного аэродинамического момента // Прикл. математика и механика. – 1994. – **58**, вып. 1. – С. 13 – 20.
6. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноуцько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5 – 13.
7. *Пупышев Ю.А.* О влиянии гравитационных и аэродинамических возмущающих моментов на вращательное движение около центра масс несимметричного твердого тела // Вестник Ленинградского ун-та. – 1971, № 7. Математика, механика, астрономия. – Вып.2. – С. 129 – 134.
8. *Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 2. – С. 3 – 14.
9. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
11. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып.2. – С. 165 – 176.