МЕХАНИКА

УДК 531.55:521.2

Л. Д. Акуленко*, Я. С. Зинкевич, А. Л. Рачинская***, Д. Д. Лещенко****

*Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского
Российской Академии наук
**Одесская государственная академия строительства и архитектуры
***Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И СВЕТОВОГО МОМЕНТОВ

Акуленко Л.Д., Зiнкевич Я.С., Рачинська А.Л., Лещенко Д.Д. Обертання супутника з порожниною, заповненою в'язкою рiдиною, пiд дiєю гравiтацiйного та свiтлового моментiв. Дослiджується швидкий обертальний рух вiдносно центру мас несиметричного супутника з порожниною, заповненою в'язкою рiдиною, при малих числах Рейнольдса пiд дiєю гравiтацiйного i свiтлового моментiв. Орбiтальнi рухи навколо Сонця з довiльним ексцентриситетом вважаються заданими. Аналiзується система, яка отримана пiсля усереднення по руху Ейлера – Пуансо та модифiкованого методу усереднення. Встановлено, що пiд впливом моменту сил в'язкої рiдини в порожнинi вiдбувається еволюцiя кiнетичної енергiї тiла. Проведено чисельний аналiз в загальному випадку i аналiтичне дослiдження в околi осьового обертання.
Ключовi слова: супутник, гравiтацiйний i свiтловий моменти, усереднення.

Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Рачинская А.Л., Лещенко Д.Д. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса, под действием гравитационного и светового моментов. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом считаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера – Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведен численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения.
Ключевые слова: спутник, гравитационный и световой моменты, усреднение.

Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Rachinskaya A.L., Leshchenko D.D. Rotations of a satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques. We investigate fast rotational motion of dynamically asymmetric satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques. Orbital motions with arbitrary eccentricity are assumed to be set. The system obtained after the averaging with respect to Euler – Poinsot motion and application the modified averaging method is analyzed. The numerical analysis in general case and analytical analysis is conducted in neighboring of axial rotation.
Key words: satellite, gravitation and light moments, resistance, averaging.

Введение. Рассмотрено движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в гравитационном поле. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца [1]. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близким к приведенному ниже, посвящены работы [1-15].

Основные результаты.

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2,3]. Система Ox_i $(i = 1, 2, 3)$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i $(i = 1, 2, 3)$ связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [2-4]. Оси системы координат Oz_i $(i = 1, 2, 3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [2]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ, как показано в [2-4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$
\begin{gathered}
\frac{dG}{dt} = L_3, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta},\\
\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G},\\
\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\operatorname{ctg}\delta.
$$

Здесь L_i моменты приложенных сил относительно осей Oy_i, G — величина кинетического момента, A_i $(i = 1, 2, 3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию

T, производная которой имеет вид

$$\frac{dT}{dt}=\frac{2T}{G}L_3+G\sin\theta\left[\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1}+\frac{\cos^2\varphi}{A_2}-\frac{1}{A_3}\right)(L_2\cos\psi-L_1\sin\psi)+\right.$$
$$\left.+\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)(L_1\cos\psi+L_2\sin\psi)\right]. \tag{2}$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и и частотой обращения ω_0. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{\omega_0(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{Q}=\sqrt{\frac{\mu(1-e^2)^3}{\ell_0^3}}. \tag{3}$$

Здесь ℓ_0 — фокальный параметр орбиты, ω_0 — угловая скорость орбитального движения, e — эксцентриситет орбиты, μ — гравитационная постоянная.

Проекции L_i момента приложенных сил складываются из момента сил светового давления L_i^c, момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p и из гравитационного момента L_i^g.

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси Oz_3. Как показано в [2,5], в этом случае для момента сил светового давления L_i^c, действующего на спутник, имеет место формула

$$\mathbf{L}^c=\left(a_c(\varepsilon_s)R_0^2/R^2\right)\mathbf{e}_r\times\mathbf{k},$$
$$a_c(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2}=p_cS(\varepsilon_s)Z_0'(\varepsilon_s),\quad p_c=\frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s — угол между направлениями $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{k}$ так, что $|\mathbf{e}_r\times\mathbf{k}|=\sin\varepsilon_s$; R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 — фиксированное значение R, например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S — площадь "тени" на плоскости, нормальной к потоку; Z_0' — расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c — скорость света; E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Здесь приведена проекция на ось Oy_1 гравитационного момента, на другие оси проекции имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом)

$$L_1^g=\frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3}\sum_{j=1}^{3}(\beta_2\beta_jS_{3j}-\beta_3\beta_jS_{2j}),$$
$$S_{mj}=\sum_{p=1}^{3}A_p\alpha_{jp}\alpha_{mp},\quad \beta_1=\cos(\nu-\lambda)\cos\delta,$$
$$\beta_2=\sin(\nu-\lambda),\quad \beta_3=\cos(\nu-\lambda)\sin\delta. \tag{5}$$

Проекции момента сил сильно вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i $(i=1,2,3)$ имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1A_2A_3}\left\{\omega \bullet \mathbf{B} + \left(a_c\left(\cos\varepsilon_s\right)\frac{R_0^2}{R^2}\mathbf{C} + \frac{3\mu}{R^3}\left(\mathbf{D}+\mathbf{S}\right)\right)\bullet\alpha\right\}\left(i=1,2,3\right), \qquad (6)$$

где

$$\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2A_3\left(A_3-A_2\right)\left\{-\gamma_{31}\gamma_{33}r + \alpha^*\left(F_1p_{\alpha1}+M_1p_{\alpha2}\right)\right\} \\ A_1A_3\left(A_1-A_3\right)\left\{-\gamma_{32}\gamma_{33}r + \alpha^*\left(F_2p_{\alpha1}+M_2p_{\alpha2}\right)\right\} \\ \left(A_2-A_1\right)\left\{\left(\gamma_{32}^2-\gamma_{31}^2\right)r - \alpha^*\left(F_3p_{\alpha1}+M_3p_{\alpha2}\right)\right\} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31}\gamma_{33}\alpha_{33} + \beta_{\alpha1}\gamma_{33} + \beta_{\alpha2}\gamma_{32} \\ \gamma_{32}\gamma_{33}\alpha_{33} + \beta_{\alpha3}\gamma_{33} + \beta_{\alpha2}\gamma_{31} \\ \left(\gamma_{32}^2-\gamma_{31}^2\right)\alpha_{33} + \beta_{\alpha3}\gamma_{32} + \beta_{\alpha1}\gamma_{31} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2\alpha_{32} + \gamma_{32}\gamma_{33}\alpha_{33} - \gamma_{32}\beta_3 \\ \gamma_{33}^2\alpha_{31} + \gamma_{31}\gamma_{33}\alpha_{33} - \gamma_{31}\beta_3 \\ \gamma_{33}\left[\gamma_{32}\alpha_{31} + \gamma_{31}\alpha_{32}\right] \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1-\alpha_{33}^2},$$

$$C_1 = A_3[A_2\alpha^*(p_{\alpha1}(\gamma_{31}\alpha_{33} - \alpha_{22}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2) + \alpha_{32}\gamma_{33}p_{\alpha2}) - r\gamma_{31}(A_1+A_3)],$$

$$C_2 = A_3[A_1\alpha^*(p_{\alpha1}(\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{33}\gamma_{32} - \alpha_{21}\beta_1) + \alpha_{31}\gamma_{33}p_{\alpha2}) + r\gamma_{32}(A_2+A_3)],$$

$$C_3 = q\gamma_{32}A_2(A_1-A_2-A_3) + p\gamma_{31}A_1(A_1-A_2+A_3),$$

$$S_1 = \gamma_{31}\left[\gamma_{33}rA_3(A_1A_2 - A_1^2 - A_2A_3 + A_3^2) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{32}qA_2(A_1A_3 - A_1^2 - A_2A_3 + A_2^2)\right],$$

$$S_2 = \gamma_{32}\left[\gamma_{31}pA_1(A_3A_2 - A_2^2 - A_1A_3 + A_1^2) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{33}rA_3(A_1A_2 - A_2^2 - A_1A_3 + A_3^2)\right],$$

$$S_3 = \gamma_{33}\left[\gamma_{32}qA_2(A_1A_3 - A_3^2 - A_1A_2 + A_2^2) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{31}pA_1(A_2A_3 - A_3^2 - A_1A_2 + A_1^2)\right],$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1\alpha_{1i} + \beta_2\alpha_{2i} + \beta_3\alpha_{3i} \quad (i=1,2,3), \quad p_{\alpha1} = p\alpha_{31} + q\alpha_{32},$$

$$\beta_{\alpha1} = -\alpha_{22}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \quad \beta_{\alpha2} = -\alpha_{23}\beta_1 + \alpha_{13}\beta_2, \quad \beta_{\alpha3} = -\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{11}\beta_2,$$

$$B_1 = \left[\omega_2^2A_2(A_1-A_2)(A_2-A_3+A_1) + \omega_3^2A_3(A_1-A_3)(A_3-A_2+A_1)\right]\alpha_{i1},$$

B_2, B_3 имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).

Здесь α_{ij} — направляющие косинусы между системами координат Oy_i $(i = 1,2,3)$ и Oz_i $(i = 1,2,3)$, p, q, r — проекции на оси Oz_i $(i = 1,2,3)$ вектора абсолютной угловой скорости ω спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Величина $\tilde{P}$ — тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил, обусловленный вязкой жидкостью, в квазистатическом приближении [1]. Для простоты в уравнениях (6) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$; компоненты которого имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера (такой вид тензор $\tilde{P}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$), форма полости сферическая, тогда [1]

$$\tilde{P} = Pdiag(1,1,1), \quad P = \frac{8\pi\rho b_0^7}{525\vartheta}. \tag{7}$$

Здесь ρ, ϑ — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, b_0 — радиус полости.

Полагаем [2], что в силу симметрии соответствующая функция имеет вид $a_c = a_c(\cos\varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом по степеням $\cos\varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1\cos\varepsilon_s + \ldots$. Рассмотрим второй член разложения, когда $a_c(\cos\varepsilon_s) = a_1\cos\varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon$.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c(\cos\varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (6) имеет порядок ε^3. Гравитационная постоянная μ пропорциональна квадрату угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\mu \sim \varepsilon^2$. Значит с точностью до величин второго порядка малости $\left(P \sim \varepsilon^2\right)$ проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_i^p = \tfrac{P}{A_1A_2A_3}\times \\
&\times\left\{p\left[q^2A_2(A_1-A_2)(A_2-A_3+A_1) + r^2A_3(A_1-A_3)(A_3-A_2+A_1)\right]\alpha_{i1} + \right.\\
&+q\left[r^2A_3(A_2-A_3)(A_3-A_1+A_2) + p^2A_1(A_1-A_2)(A_3-A_1-A_2)\right]\alpha_{i2} + \\
&\left.+\,r\left[p^2A_1(A_3-A_1)(A_1-A_2+A_3) + q^2A_2(A_3-A_2)(A_2-A_1+A_3)\right]\alpha_{i3}\right\}, \\
&(i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{8}$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура метода усреднения. Для рассматриваемой задачи решения системы (1) - (3) при малом ε на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения [3, 16, 17]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера Пуансо. Величины G, δ, λ, T, ν обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t. Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T, ν, а быстрыми — углы Эйлера φ, ψ, θ.

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)\left(2TA_1 - G^2\right)}{(A_1 - A_2)\left(G^2 - 2TA_3\right)} \quad \left(0 \le k^2 \le 1\right), \tag{9}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера - Пуансо в правые части уравнений движения (1), (2) и проведем усреднение по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [3] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = 0,\\
&\frac{d\delta}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(2GR^2\right)^{-1} H \sin\delta \sin 2(\lambda - \nu) - \frac{3\omega_0^2 \left(1 + e\cos\nu\right)^3}{2G\left(1 - e^2\right)^3}\beta_2\beta_3 N^*,\\
&\frac{d\lambda}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(GR^2\right)^{-1} H \cos\delta \cos^2(\lambda - \nu) + \frac{3\omega_0^2 \left(1 + e\cos\nu\right)^3}{2G\left(1 - e^2\right)^3 \sin\delta}\beta_1\beta_3 N^*,\\
&\frac{dT}{dt} = -\frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2A_2^2A_3^2S^2(k)} \times\\
&\qquad \times \left\{A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)\left[k^2V(k) - W(k)\right] + \right.\\
&\qquad + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)\left[(k^2 - 2)W(k) + k^2\right] +\\
&\qquad \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2\right]\right\},\\
&S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \quad V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}, \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)},\\
&\quad H = \frac{1}{2}\left[3a^2\frac{E(k)}{K(k)} - 1\right] \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 > 0,\\
&\quad H = \frac{1}{2}\left\{\frac{3a^2}{k^2}\left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)}\right] - 1\right\} \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 < 0,\\
&\quad a^2 = \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3}{A_1}\frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2}\right)\frac{A_2A_3}{A_2 - A_3},\\
&\quad N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [18]. Согласно первому уравнению (10) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0. Дифференцируя выражение для k^2 (9) и используя уравнения для кинетической энергии (10), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [1, 11]

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1-\chi)(1-k^2) - [(1-\chi) + (1+\chi)k^2]\frac{E(k)}{K(k)},$$

$$\chi = \frac{3A_2[(A_1^2+A_3^2)-A_2(A_1+A_3)]}{(A_1-A_3)[A_2(A_1+A_3-A_2)+2A_1A_3]}, \tag{11}$$

$$\xi = (t-t_*)/N, \quad N = \frac{3A_1^2A_2^2A_3^2}{PG_0^2(A_1-A_3)[A_2(A_1+A_3-A_2)+2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-2}.$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера - Пуансо. Уравнение (11) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере постоянного радиуса G_0.

3. Анализ усредненного собственного вращения спутника. Из уравнений движения (10) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси A_3(неустойчивое движение) до вращения вокруг оси A_1(устойчивое движение). Изменения углов λ, δ зависят как от действия внешних моментов сил светового давления и гравитационных сил, так и от действия внутреннего момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (10) для T, положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1-k^2)K \le E \le K$. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0,1]$.

Рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (10) и уравнения (11). Проведем обезразмеривание в уравнении изменения кинетической энергии, считая характерными величинами задачи N (11) и момент инерции A_1. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = -\frac{2(\tilde{T})^2(A_1-A_2)(A_2-A_3)}{A_1\left[A_2\left(A_1+A_3-A_2\right)+2A_1A_3\right]\left[A_2-A_3+\left(A_1-A_2\right)k^2\right]^2} \times \\ \times\left\{A_2(A_1-A_3)(A_1+A_3-A_2)\left[k^2V(k)-W(k)\right] + \right. \\ +A_1(A_2-A_3)(A_3+A_2-A_1)\left[(k^2-2)W(k)+k^2\right] + \\ \left. +A_3(A_1-A_2)(A_1+A_2-A_3)\left[(1-2k^2)W(k)+k^2\right]\right\}.\end{aligned} \tag{12}$$

где $\tilde{T} = \frac{2A_1T}{G_0^2}$, ξ определяется согласно (11). Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т.е. для случая $2TA_1 \ge G^2 \ge 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 4$; $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T = \frac{G_0^2}{2}\frac{A_2-A_3+(A_1-A_2)k^2(0)}{A_1(A_2-A_3)+A_3(A_1-A_2)k^2(0)}. \tag{13}$$

В безразмерном виде имеем

$$\tilde{T} = \frac{A_1(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

Рассмотрен также случай $\xi < 0$, что соответствует случаю $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Уравнение (11) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = \frac{2(\tilde{T})^2(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)}{A_3\left[A_2\left(A_1 + A_3 - A_2\right) + 2A_1A_3\right]S^2(k)} \times$$
$$\times \left\{A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)\left[k^2V(k) - W(k)\right] + \right.$$
$$+A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)\left[(k^2 - 2)W(k) + k^2\right] +$$
$$\left. +A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2\right]\right\}$$

с начальным условием

$$\tilde{T} = \frac{A_3(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений моментов инерции $A_1 = 4$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 8$. Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 1.

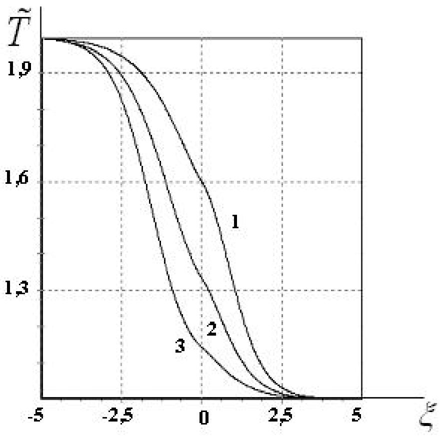

Рис. 1

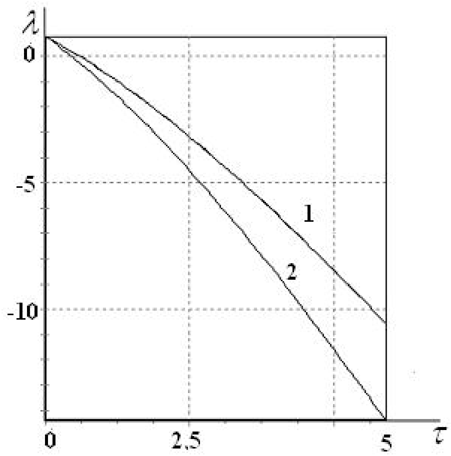

Рис. 2

Такой вид имеют графики изменения кинетической энергии в случае вращения спутника с полостью под действием только гравитационного момента [14] или только под действием светового давления [15], так как на эволюцию величины T оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости, целиком заполняющей полость.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$. Значение $\tilde{T} = 2$ соответствует вращению около оси A_3 (неустойчивое движение), $\tilde{T} = 1$ вращению около оси A_1 (устойчивое движение). При $\xi = 0$ (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба). Аналогичные графики изменения кинетической энергии могут быть получены пересчетом из формулы (9) для безразмерной кинетической энергии

$$\tilde{T} = \frac{A_1 S(k)}{A_1(A_2 - A_3) + k^2 A_3(A_1 - A_2)}.$$

Отсюда видно, что при $k^2 \to 0$ имеем $\tilde{T} \to 1$. Аналогично, для случая вращения около оси A_3 можно показать, что $\tilde{T} \to 2$.

4. Ориентация вектора кинетического момента. Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (10).

Как известно $R = l_0/\left(1 + e\cos\nu\right)$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \mu^{1/3}(1-e^2)\omega_0^{-2/3}$. Тогда первые два уравнения (10) примут вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{\omega_0^{4/3} r(e,\nu)}{2G}\left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \sin\delta\sin 2(\lambda-\nu) + \frac{3(1+e\cos\nu)\omega_0^{2/3}}{1-e^2}\beta_2\beta_3 N^*\right],$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\omega_0^{4/3} r(e,\nu)}{G}\left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \cos\delta\cos^2(\lambda-\nu) - \frac{\omega_0^{2/3}\left(1+e\cos\nu\right)}{2\left(1-e^2\right)\sin\delta}\beta_1\beta_3 N^*\right], \quad (14)$$

$$r(e,\nu) = \frac{\left(1+e\cos\nu\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}.$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (10), уравнений для истинной аномалии (3) и k^2 (11), уравнений системы (14). Характерными параметрами задачи являются G_0 — кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 — величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = G/G_0$, $\tilde{A}_i = A_i\Omega_0/G_0$, $\tilde{L}_i = L_i/(G_0\Omega_0)$, $\tilde{T} = T/(G_0\Omega_0)$, $\varepsilon^2\tilde{P} = P\Omega_0^2/G_0$.

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3}\omega_0^{2/3}} \quad (15)$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления. После обезразмеривания имеем систему уравнений движения вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2\frac{r(e,\nu)}{2\tilde{G}}\left(\Gamma\tilde{H}\sin\delta\sin 2(\lambda-\nu) + \frac{3\left(1+e\cos\nu\right)}{2\left(1-e^2\right)}\beta_2\beta_3\tilde{N}^*\right),\\
&\frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2\frac{r(e,\nu)}{\tilde{G}}\left(\frac{3\left(1+e\cos\nu\right)}{2\left(1-e^2\right)\sin\delta}\beta_1\beta_3\tilde{N}^* - \Gamma\tilde{H}\cos\delta\cos^2(\lambda-\nu)\right),\\
&\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \qquad \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0,\\
&\frac{dk^2}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2\frac{1}{\tilde{N}}\left\{(1-\chi)\left(1-k^2\right) - \left[(1-\chi) + (1+\chi)\,k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)}\right\},
\end{aligned} \quad (16)$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde N = \frac{3\tilde A_1^2 \tilde A_2^2 \tilde A_3^2}{\tilde P(\tilde A_1 - \tilde A_3)[\tilde A_2(\tilde A_1 + \tilde A_3 - \tilde A_2) + 2\tilde A_1 \tilde A_3]},\\
&\tilde H = \frac{1}{2}\left[3\tilde a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1\right] \quad \text{при} \quad 2\tilde T \tilde A_2 - \tilde G^2 > 0,\\
&\tilde H = \frac{1}{2}\left\{\frac{3\tilde a^2}{k^2}\left[k^2 - W(k)\right] - 1\right\} \quad \text{при} \quad 2\tilde T \tilde A_2 - \tilde G^2 < 0,\\
&\tilde a^2 = \frac{\tilde\sigma + \tilde h}{1 + \tilde\sigma}, \quad \tilde\sigma = \frac{\tilde A_3\left(\tilde A_1 - \tilde A_2\right)}{\tilde A_1\left(\tilde A_2 - \tilde A_3\right)}, \quad \tilde h = \left(\frac{2\tilde T}{\tilde G^2} - \frac{1}{\tilde A_2}\right)\frac{\tilde A_2 \tilde A_3}{\tilde A_2 - \tilde A_3},\\
&\tilde N^* = \tilde A_2 + \tilde A_3 - 2\tilde A_1 + 3\left(\frac{2\tilde A_1 \tilde T}{\tilde G^2} - 1\right)\left[\tilde A_3 + (\tilde A_2 - \tilde A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right],\\
&\frac{d\tilde T}{d\tilde t} = -\varepsilon^2 \frac{4\tilde P \tilde T^2 (\tilde A_1 - \tilde A_3)(\tilde A_1 - \tilde A_2)(\tilde A_2 - \tilde A_3)}{3\tilde A_1^2 \tilde A_2^2 \tilde A_3^2\left[\tilde A_2 - \tilde A_3 + \left(\tilde A_1 - \tilde A_2\right)k^2\right]^2} \times\\
&\quad \times \Big\{\tilde A_2(\tilde A_1 - \tilde A_3)(\tilde A_1 + \tilde A_3 - \tilde A_2)\left[k^2 V(k) - W(k)\right] +\\
&\quad + \tilde A_1(\tilde A_2 - \tilde A_3)(\tilde A_3 + \tilde A_2 - \tilde A_1)\left[(k^2 - 2)W(k) + k^2\right] +\\
&\quad + \tilde A_3(\tilde A_1 - \tilde A_2)(\tilde A_1 + \tilde A_2 - \tilde A_3)\left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Первые три уравнения для λ, δ и ν системы (16) можно записать следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\delta}{d\tilde t} = \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde t} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda),\\
\frac{d\nu}{d\tilde t} = \varepsilon \frac{(1 + e\cos\nu)^2}{h(e)}, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Здесь Δ, Λ — коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (16), δ, λ — медленные переменные, а ν — полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [17]

$$
\frac{d\delta}{d\tilde t} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2} d\nu, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde t} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2} d\nu.
$$

После усреднения получим

$$
\frac{d\delta}{d\tilde t} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde t} = \varepsilon^2\left(\frac{3\tilde N^*}{h(e)} - \frac{2\Gamma \tilde H}{(1 - e^2)^{1/2}}\right)\frac{\cos\delta}{4\tilde G}. \tag{18}
$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde t$. Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад. Численное интегрирование выполнялось для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ — круговая орбита; $e = 0.421$ — сильно эллиптическая орбита. Для безразмерного времени τ имеем следующую картину изменения угла ориентации вектора кинетического момента, представленную на рис. 2. Кривые 1, 2 соответствуют различным значениям: 1 — круговой орбите, 2 — сильно эллиптической.

На рис. 3 представлены графики изменения этого же угла при различных значениях моментов инерции спутника. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 3 видно, что характер изменения угла λ при близких значениях моментов инерции $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ носит почти линейный характер. С уменьшением значения момента инерции $\tilde{A}_2$ кривизна функции увеличивается, при этом функция перестает быть монотонной.

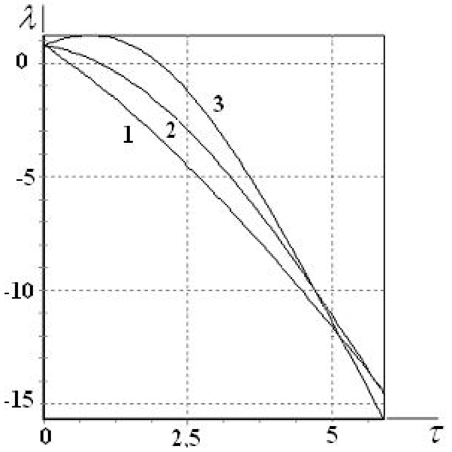

Рис. 3

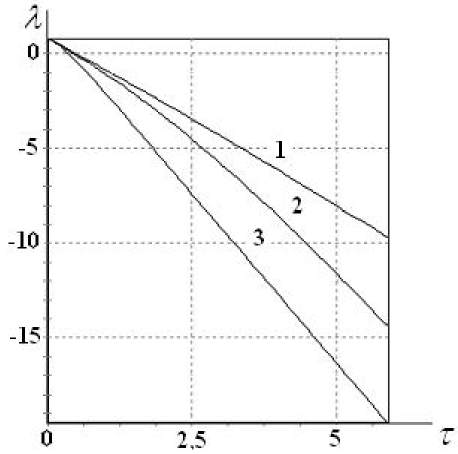

Рис. 4

Характер изменения угла λ имеет такой же вид, как и в задаче о движении спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью в гравитационном поле [14].

В случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [15] характер изменения угла λ носит почти линейный характер и с увеличением значения безразмерного момента инерции $\tilde{A}_2$ функция увеличивается быстрее.

Можно также провести анализ изменения характера функции $\lambda(\tau)$ при различных значениях безразмерной величины $\tilde{P}$. Кривые 1, 2, 3 на рис. 4 соответствуют различным значениям $\tilde{P}(0) = 10{,}100{,}1000$. Видно, что характер изменения угла имеет почти линейный вид.

Согласно численному расчету показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил светового давления вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора $\mathbf{G}$ движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до безразмерного значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси A_1. Такое же направление движение конца вектора кинетического момента характерно для задач о движении спутника с полостью под действием момента сил гравитационного притяжения [14] и момента сил светового давления [15].

5. Предельный случай вращения, близкого к осевому. Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1. В этом случае правую часть уравнения (10) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [18]. Тогда уравнение (10) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$\begin{gathered} k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi > 0, \\ k^2 = C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi < 0, \\ C_1 = const, \quad 0 \le C_1 \le 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Изменение кинетической энергии можно качественно грубо получить, следуя работе [1], простым пересчетом из соотношения (9), используя найденное решение для малых k^2 (19). Имеем

$$\begin{gathered} T = \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1-A_3)(A_1-A_2)}{2A_1^2(A_2-A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi > 0, \\ T = \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3-A_1)(A_3-A_2)}{2A_3^2(A_2-A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi < 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (20) примут вид

$$\begin{gathered} T^* = 1 + \frac{(A_1-A_3)(A_1-A_2)}{A_1(A_2-A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi > 0, \\ T^* = \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3-A_1)(A_3-A_2)}{A_3^2(A_2-A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \quad \text{при} \quad \xi < 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Постоянная интегрирования C_1 находится грубо из условия равенства кинетической энергии по формулам (20) при $\xi = 0$. Имеем

$$C_1 = \frac{A_1 A_3 (A_2-A_3)(A_1-A_2)}{A_3^2(A_1-A_2)^2 + A_1^2(A_2-A_3)^2}. \tag{22}$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии T^* в случае малых k^2 имеют вид, представленный на рис. 5.

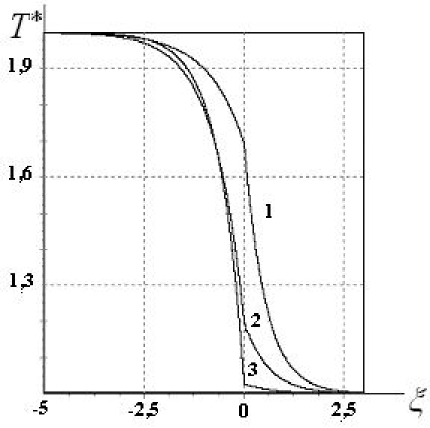

Рис. 5

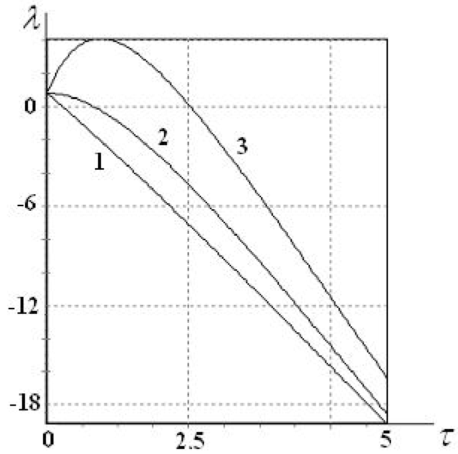

Рис. 6

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$, при постоянных значениях $A_1 = 8$, $A_3 = 4$ для $\xi > 0$ и $A_1 = 4$, $A_3 = 8$ для $\xi < 0$. Как видно из рисунка, характер функции $T^* = T^*(\xi)$ тот же, что и для $0 \le k^2 \le 1$, а также асимптотические значения T^* на положительных и отрицательных безразмерных временах сохраняют свои величины.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции по безразмерному времени τ

$$
\begin{aligned}
&k^2 = k_0^2 \exp\left[-\rho\tau\right], \\
&\rho = \frac{\tilde{P}}{\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2}\left[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\left(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\right) + \tilde{A}_1\tilde{A}_3\left(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3\right) + \tilde{A}_2\tilde{A}_3\right].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение изменения угла λ (17) в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (23). В правую часть уравнения входит непостоянная величина $\tilde{H}$. При $2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0$ функция $H(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид:

$$
\tilde{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp\left[-\rho\tau\right] - 1\right\}.
$$

Видно, что при $\tau \to \infty$ $\tilde{H} \to -0.5$.

Асимптотическое выражение кинетической энергии можно представить в виде функции по безразмерному времени τ

$$
\tilde{T} = \frac{\tilde{G}^2}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{G}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1^2(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp\left[-\rho\tau\right].
$$

Подставляем полученное выражение $\tilde{H}$ и $\tilde{T}$ в уравнение изменения угла λ, интегрируем и находим

$$\lambda = \frac{\cos\delta}{4\tilde{G}_0(1-e^2)^{1/2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{3(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)k_0^2}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\rho} \left(\Gamma\tilde{A}_3 - \frac{3(\tilde{A}_2+\tilde{A}_3)(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3)}{(1-e^2)} \right) (\exp[-\rho\tau]-1) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{(1-e^2)} \left(\tilde{A}_2+\tilde{A}_3-2\tilde{A}_1 \right) + \Gamma \right) \tau \right\} + \lambda_0,$$

где константы λ_0, k_0^2 определяются из начальных условий. График данной функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $k^2 \ll 1$ имеет вид, представленный на рис. 6.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 5, 6$, при постоянных значениях $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785$ рад. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda = \lambda(\tau)$ при произвольных k^2.

Характер изменения угла λ при малых k^2 имеет приблизительно тот же вид, что и в случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле [14]. При этом в нашей задаче убывание угла ориентации происходит несколько быстрее.

При движении спутника с вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления [15] угол λ возрастает, как и в случае движения спутника под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [8].

Заключение. Таким образом, возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора **G** и из медленной эволюции параметров этого движения. Величина кинетического момента остается постоянной, а изменение кинетической энергии зависит только от момента сил вязкой жидкости в полости спутника. Движение вектора кинетического момента вокруг вертикали к плоскости орбиты в первом приближении описывается уравнениями системы (14). Скорость вращения вектора **G** вокруг вертикали переменна с переменным отклонением вектора от вертикали. После применения модифицированного метода усреднения отклонение вектора **G** от вертикали остается постоянным, при этом угловая скорость вращения переменна (18).

1. **Черноусько Ф.Л.** Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса [текст] / Ф.Л. Черноусько // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т.5, №6. – С. 1049–1070.

2. **Белецкий В.В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

3. **Черноусько Ф.Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф.Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27, №3. – С. 474–483.

4. **Белецкий В.В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Изд–во МГУ, 1975. – 308 с.

5. **Карымов А.А.** Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления [текст] / А.А. Карымов // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 5. – С. 923–930.

6. **Поляхова Е.Н.** Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы [текст] / Елена Николаевна Поляхова. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

7. **Сазонов В.В.** Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления [текст] / В.В. Сазонов // Астрон. вестник. – 1994. – Т. 28, №2. – С. 95 107.

8. **Лещенко Д.Д.** Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [текст] / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12, вип. 7. Матем. i мех. – С. 85–98.

9. **Акуленко Л.Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №2. – С. 13–26.

10. **Осипов В.В.** О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите [текст] / В.В. Осипов, Р.С. Суликашвили // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. – 1978. – Т.58. – С. 175–186.

11. **Смирнова Е.П.** Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью [текст] / Е.П. Смирнова // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т.38, №6. – С. 980–985.

12. **Сидоренко В.В.** Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром [текст] / В.В. Сидоренко // Астрон. вестник. – 1993. – Т.27, №2. – С. 119–127.

13. **Вильке В.Г.** Эволюция вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью [текст] / В.Г. Вильке, А.В. Шатина //Космические исследования. – 1993. – 31, вып. 6. – С. 22–30.

14. **Акуленко Л.Д.** Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью [текст] / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 126–139.

15. **Акуленко Л.Д.** Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [текст] / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38.– С. 81–96.

16. **Волосов В.М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М.: Изд–во МГУ, 1971. – 507 с.

17. **Акуленко Л.Д.** Схемы усреднения высших степеней в системах с медленной и быстрой фазами [текст] / Л.Д. Акуленко // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т.66, №2. – С.165–176.

18. **Градштейн И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108с.

19. **Ландау Л.Д.** Теоретическая физика. Т.1. Механика [текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208с.