

М Е Х А Н И К А

УДК 62-50

Л. Д. Акуленко*, Я. С. Зинкевич**, Д. Д. Лещенко**,
А. Л. Рачинская***

*Інститут проблем механіки імені А. Ю. Ішлінського
Російської академії наук

**Одесська державна академія будівництва та архітектури

***Одесський національний університет імені І. І. Мечникова

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рекомендовано к публикации программным комитетом международной летней
математической школы памяти В. А. Плотникова

Акуленко Л. Д., Зінкевич Я. С., Лещенко Д. Д., Рачинська А. Л. Оптимальне гальмування обертань динамічно симетричного тіла з внутрішніми ступенями вільності в середовищі з опором. Досліджується задача про оптимальне по швидкодії гальмування обертань вільного твердого тіла. Припускається, що тіло містить сферичну порожнину, яка заповнена рідиною великої в'язкості, та рухому масу, яка з'єднана з тілом пружним зв'язком з квадратичною дисипацією. Крім того, на тверде тіло діє малий гальмуючий момент сил лінійного опору середовища. Вважається, що в недеформованому стані тіло динамічно симетричне, а маса знаходиться на осі симетрії. Визначені оптимальний закон керування для гальмування обертань несучого твердого тіла у формі синтезу, час швидкодії та фазові траекторії.

Ключові слова: оптимальне гальмування, тверде тіло, обертання, середовище з опором.

Акуленко Л. Д., Зінкевич Я. С., Лещенко Д. Д., Рачинська А. Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с внутренними степенями свободы в сопротивляющейся среде. Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможения вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости и подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса лежит на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Ключевые слова: оптимальное торможение, твердое тело, вращение, среда с сопротивлением.

Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L.
Optimal deceleration of rotation of a dynamic symmetric body with internal degrees of freedom in a resistive medium. The problem of time-optimal deceleration of rotation of a free solid body is studied. It is assumed that the body contains a spherical

cavity filled with highly viscous liquid and a moving mass connected to the body by an elastic coupling with square-low friction dissipation. Low deceleration moment of linear resistive medium forces also acts on the solid body. It is assumed that the body is dynamically symmetric in nondeformed state and mass can be found at axis of symmetry. The optimal control law for deceleration of rotation of the form of synthesis, the operation time, and the phase trajectories are determined.

Key words: optimal deceleration, rigid body, rotation, resistive medium.

ВВЕДЕНИЕ. Развитие исследования задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а в некотором смысле близки к указанным идеальным моделям. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.) Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Анализу пассивных движений твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, либо несущего подвижную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии вязкого или квадратичного трения, а также в сопротивляющейся среде уделялось значительное внимание [1-8]. Проблеме управления вращений "квазитвердых" тел посредством сосредоточенных (приложенных к корпусу) моментов сил, имеющей значение для приложений, уделялось недостаточное внимание. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения методов сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа "временных погранслоев" [2, 9-12]. Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела, со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Кроме того, тело содержит подвижную массу, прикрепленную демпфером к точке на оси симметрии посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. На твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая ниже модель обобщает исследованные ранее в работах [9-12].

Основные результаты.

1. Постановка задачи оптимального управления. На основе подхода [1,3,12] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [1,3,4,5,12]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= M_p + Lpr^2 + FG^2qr + Spr^6\omega_{\perp} - \lambda Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= M_q + Lqr^2 - FG^2pr + Sqr^6\omega_{\perp} - \lambda Aq, \\ C\dot{r} &= M_r + H(p^2 + q^2)r - AC^{-1}Sr^5\omega_{\perp}^3 - \lambda Cr, \end{aligned} \quad (1)$$

где p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $J = diag(A, A, C)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{M} ; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\omega$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = [A^2\omega_{\perp}^2 + C^2r^2]^{1/2}, \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2.$$

В систему (1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил внешнего сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\lambda J\omega, \quad (2)$$

где λ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами λAp , λAq , λCr [4,5].

Считается, что допустимые значения момента управляющих сил \mathbf{M} ограничены сферой [12]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (3)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t , \mathbf{G} согласно условиям (3). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для \mathbf{G} , $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$.

Обозначения L , H , F , S , введенные в (1), выражаются через параметры системы таким образом

$$\begin{aligned} L &= \beta Pv^{-1}A^{-2}C(A - C), & H &= \beta Pv^{-1}A^{-1}(C - A), \\ F &= m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, & S &= m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|C^4A^{-4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты L , H в (4) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости, β – объемная плотность, v – коэффициент кинематической вязкости, P – коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7/525$ [1]. Основное допущение – предположение о малости числа Рейнольдса Re

$$Re = lVv^{-1} \sim a_0^2T_*^{-1}v^{-1} \sim a_0^2\omega v^{-1} \ll 1. \quad (5)$$

Здесь l – характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$), V – характерная скорость, а T_* – некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$). Если взять за единицу длины и времени l и T_* соответственно, то, согласно (5), кинематическая вязкость v является большим параметром, $v \gg 1$ [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

F и S в (4) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии. Величины $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m = \Lambda\Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость (коэффициент упругости), μ – коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в следующем смысле [1]

$$\Omega \gg \omega. \quad (6)$$

Неравенство (6) позволяет ввести малый параметр в (4) и считать указанные возмущающие моменты малыми. Кроме того, условие (6) позволяют пренебречь погранслойными участками свободных колебательных движений массы, обусловленных начальными отклонениями, вследствие их быстрого затухания, и учесть вынужденные квазистационарные движения, вызванные вращением тела. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Таким образом, в квазистатическом приближении момент сил со стороны вязкой жидкости в полости определяется мономами компонент вектора ω третьей степени. Возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением, определяются мономами компонент вектора $\omega = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степеней соответственно. Тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости. Модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера–Пуансо (1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (7)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что моменты сил, обусловленные вязкой жидкостью в полости, а также движением подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [12]

$$M_p = -b \frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b \frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b \frac{Cr}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (8)$$

Для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (1) на Ap , второе – на Aq , третье – на Cr и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0,$$

$$T = T(t_0, G^0), \quad W(t, G) = T(t, G) - t.$$

В предположении $b = b(t)$ найдем решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau, \quad (9)$$

$$T = T(t_0, G^0).$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия. При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (9) имеет вид:

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} [(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (10)$$

Далее анализируется случай (10).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \lambda - A^{-2}C^{-1}H(G^2 - C^2r^2) + A^{-2}C^{-2}Sr^4(G^2 - C^2r^2)^{3/2} \right]. \quad (11)$$

После замены осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (11) принимает вид, допускающий разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = A^{-2}C^{-1}HG^2R(1 - C^2R^2) - A^{-2}C^{-2}SG^7R^7(1 - C^2R^2)^{3/2}. \quad (12)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos \theta$. Уравнение (12) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-2}[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \cos \theta \sin \theta + \\ & + A^{-2}C^{-6}S\lambda^{-7}[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^7 \cos^5 \theta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Не нарушая общности, можно принять, что начальное $\theta(0) = \theta^0$ принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (13) независимо от изменения G .

Исследуем поведение сферического угла в малой полуокрестности стационарной точки $\theta^* = 0$ уравнения (13): $\theta = \delta\theta > 0$. Уравнение (13) примет вид:

$$\dot{\delta\theta} = -A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-2}[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \delta\theta, |\delta\theta| = |\delta\theta_0| \exp(K(t)), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} K(t) = & -A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-2} \left[-\frac{1}{2}\lambda^{-1}(G^0 \lambda + b)^2(\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \\ & \left. + 2b\lambda^{-1}(G^0 \lambda + b)(\exp(-\lambda t) - 1) + b^2t \right]. \end{aligned}$$

Из (14) следует, что при $C > A$ (динамически сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, так $H > 0$, а при $C < A$ (динамически вытянутое тело) – монотонно возрастает, так как $H < 0$.

Рассмотрим второй случай $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$ ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$). Аналогично (14) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-2}[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]^2\delta\theta, \quad (15)$$

$$|\delta\theta| = |\delta\theta_0|\exp(-K(t)).$$

Из (15) следует, что при $A > C$ (динамически сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A < C$ (динамически вытянутое тело) — монотонно возрастает.

При $A \approx C$, а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + S(t), \quad (16)$$

где

$$S(t) = A^{-2}C^{-1}\lambda^{-3}\sin\theta^0\cos\theta^0 \times$$

$$\times \left\{ -B(\theta^0) \left[\frac{f(7\tau)}{7} - \frac{7f(6\tau)}{6} + \frac{21f(5\tau)}{5} - \frac{35f(4\tau)}{4} + \frac{35f(3\tau)}{4} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{21f(2\tau)}{2} + 7f(\tau) + b^7\tau \right] + H \left[\frac{f(2\tau)}{2b^5} - \frac{2f(\tau)}{b^5} - b^2\tau \right] \right\},$$

$$B(\theta^0) = C^{-5}S\lambda^{-3}\cos^4\theta^0\sin\theta^0, \quad f(\beta\tau) = b^{7-\beta}(b + \lambda G_0)^\beta(\exp(-\beta\tau) - 1).$$

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1). Введем переменную $N = A(p^2 + q^2)^{1/2}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1) на ApN^{-1} , а второе — на AqN^{-1} и складывая, получим для N уравнение вида:

$$\dot{N} = -d(t)N + f(t)N^2, \quad d(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A^{-1}Lr^2(t) + \lambda, \quad f(t) = A^{-2}Sr^6(t). \quad (17)$$

Это — уравнение Бернулли (см. [13], с. 297).

После интегрирования (17)

$$N^{-1} = -E(t)A^{-2}S \int r^6(t)E^{-1}(t)dt, \quad E(t) = \exp \left[\int d(t)dt \right]. \quad (18)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела записывается следующим образом:

$$G^2 = N^2 + C^2r^2.$$

Отсюда следует выражение для N

$$N = (G^2 - C^2r^2)^{1/2}$$

или, учитывая соотношение $Cr = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (19)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (10) получим

$$N = \frac{1}{\lambda} [(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b] |\sin \theta|. \quad (20)$$

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1) к виду уравнений с определенной симметрией. Данные уравнения содержат только "гироскопические" и "диссипативные" члены с коэффициентами $g(t), d(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{N} &= -[d(t) - f(t)N(t)] \mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (Ap, Aq)^T, \\ g(t) &= A^{-1}r(t)(A - C + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь I — симплектическая матрица, коэффициенты $d(t)$ и $f(t)$ определены в (17), а функция $N = N(t)$ задана согласно (18)–(20).

Уравнение (17) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде [12]. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ — орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = g(t)I\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}^0$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv |\mathbf{n}(t_0)| = |\mathbf{n}^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\sigma) \mathbf{n}^0, \quad \sigma = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где $\Pi(\sigma)$ — матрица поворота (начального вектора \mathbf{n}^0) на угол σ .

Таким образом, прецессионные вращения квазиверного тела полностью определены согласно (18), (22). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в разд. 2, 3.

5. Численный анализ и выводы. Обратимся к задаче определения сферического угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (13).

Уравнение (13) в безразмерном виде записывается следующим образом

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\Gamma_1 f^2(\tau) \cos \theta \sin \theta + \Gamma_2 f^7(\tau) \cos^5 \theta \sin^2 \theta, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-1}}{G_0^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{A^{-2}C^{-6}S\lambda^{-1}}{G_0^7}, \\ f(\tau) &= (1 + k^*) \exp(-\tau) - k^*, \quad k^* = b (\lambda G^0)^{-1}, \quad \tau = \lambda t. \end{aligned}$$

Уравнение (23) было численно проинтегрировано для произвольных значений Γ_1, Γ_2, k^* и начального угла $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения сферического угла θ представлены на рис. 1–3.

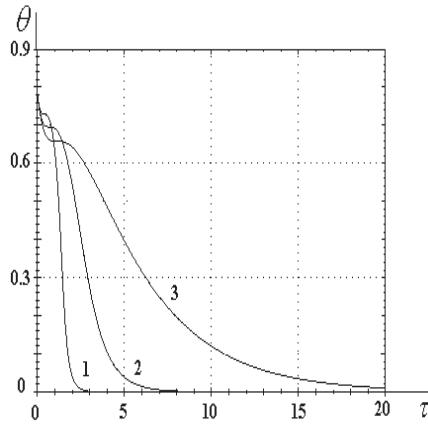


Рис. 1

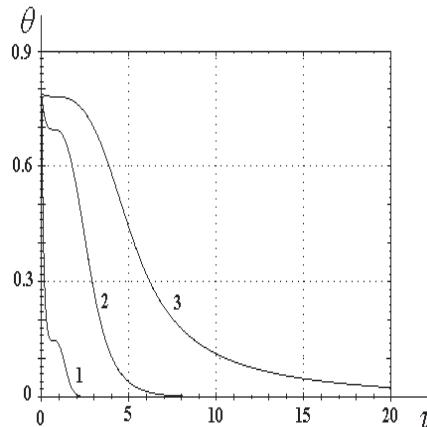


Рис. 2

Рис.1 соответствует значениям безразмерных коэффициентов $\Gamma_1 = 1$ и $\Gamma_2 = 1$. Кривые 1, 2 и 3 численно построены при различных значениях величины $k^* = 2, 1, 0.5$ соответственно. Во всех расчетных случаях сферический угол убывает до нуля. Видно, что скорость убывания функции существенно зависит от значения величины k^* . Чем больше управляющий момент торможения, тем за меньший промежуток времени угол θ достигает предельного значения и тело тормозится.

Исследуем характер поведения угла θ в зависимости от величины момента сил вязкой жидкости в полости тела. На рис.2 приведены графики соответствующие $\Gamma_1 = 0.1, 1, 10$ при $k^* = 1$ и $\Gamma_2 = 1$. Видно, что при увеличении момента сил вязкой жидкости в полости убывание сферического угла до предельного значения происходит за больший промежуток времени при постоянном моменте торможения.

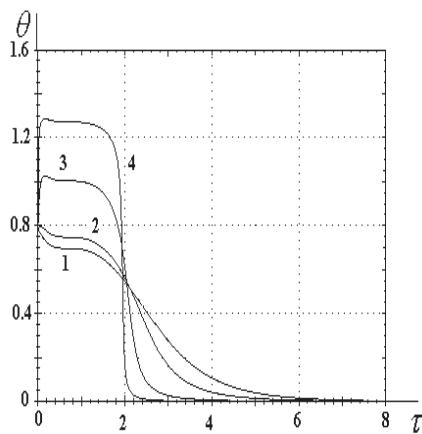


Рис. 3

На рисунке 3 представлены четыре кривые для различных значений коэффициента момента квадратичного трения $\Gamma_2 = 1, 10, 10^2, 10^3$ соответственно при

$k^* = 1$ и $\Gamma_1 = 1$. Во всех расчетных случаях угол θ убывает до предельного значения — нуль. Видно, что характер изменения функции существенно зависит от значения величины Γ_2 . Для малых значений коэффициента функция сферического угла является убывающей, а для $\Gamma_2 = 10^2, 10^3$ функция немонотонная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол, установлены качественные свойства оптимального движения.

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса [текст] / Ф. Л. Черноусько // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5, № 6. – С. 1049–1070.
2. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами [текст] / Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 33–44.
3. Акуленко Л. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 5. – С. 29–34.
4. Райс Э. Дж. Динамика системы твердых тел [текст] / Эдвард Джон Райс. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 544 с.
5. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы [текст] / Владимир Николаевич Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. Акуленко Л. Д. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
7. Акуленко Л. Д. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
8. Акуленко Л. Д. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т. 13, вип. 11. – С. 117–131.
9. Акуленко Л. Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 115–122.
10. Лещенко Д. Д. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 1. – С. 80–85.

11. Акуленко Л. Д. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 2. – С. 56–60.
12. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления [текст] / Леонид Денисович Акуленко. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [текст] / Эрих Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.