ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2011, № 1, с. 16–21

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2011 г. Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко

Россия, Москва, ИПМех РАН,

Украина, Одесса, Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Поступила в редакцию 01.08.10 г.

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. На твердое тело действует тормозящий момент сил вязкого трения. Считается, что тело динамически несимметрично. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Введение. Анализ гибридных систем, т.е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих "квазитвердые" тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера для некоторого фиктивного твердого тела. Анализу пассивных движений твердого тела в сопротивляющейся среде уделялось большое внимание [1–3]. Проблема управления вращениями "квазитвердых" тел посредством сосредоточенных моментов сил, имеющая значение для приложений, менее исследована.

Ниже рассматривается задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела. На твердое тело действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. В монографии [4] показано, что функциональное неравенство Шварца оказывается весьма полезным для построения синтеза закона торможения "квазитвердых" тел. Получены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения вращений твердых тел относительно центра масс, в том числе объектов с внутренними степенями свободы, имеющих приложения в динамике космических и летательных аппаратов. Свойство инвариантности неуправляемой системы по отношению к величине кинетического момента наблюдается для ряда механических моделей. Изучено торможение тел, содержащих полость с вязкой жидкостью. Проведен анализ торможения возмущенных вращений твердого тела, близкого к сферически-симметричному, под действием момента сил линейного сопротивления среды, направленного против вектора угловой скорости.

1. Постановка задачи оптимального управления. На основе подхода [4] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с фиксированным твердым телом системы координат (управления Эйлера), могут быть записаны в виде [1–4]

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} - \lambda J\boldsymbol{\omega}. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор абсолютной скорости, $J = \mathrm{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции тела, $\mathbf{M}$ – вектор управляющего момента сил, кинетический момент тела $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль

$$G = |\mathbf{L}| = (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)^{1/2}.$$

Для упрощения задачи в систему (1.1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил линейного сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту. Предполагается также, что допустимые значения момента управляющих сил **M** принадлежат шару [4]. Это допущение не противоречит распределению масс и форме твердого тела. Полагаем

$$\mathbf{M} = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \le 1, \quad b = b(t, \mathbf{L}), \quad 0 < b_* \le b < b^* < \infty, \tag{1.2}$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, **L** согласно уравнениям (1.2). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные. Тормозящий момент сопротивления является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений твердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1.1). Становится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \quad T - t_0 \to \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \le 1. \tag{1.3}$$

Решение задачи (1.1)–(1.3) строится в точной постановке без предположения о малости различных параметров. Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t, \boldsymbol{\omega}) - t$, т.е. текущее значение функционала.

2. Решение задачи оптимального торможения. Решим задачу синтеза оптимального управления в упрощенной постановке. Отметим, что момент сил линейного сопротивления является внешним. На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [4]

$$M_p = -b\frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b\frac{Bq}{G}, \quad M_r = -b\frac{Cr}{G}, \quad b = b(t, G). \tag{2.1}$$

Здесь для дальнейшего упрощения полагается $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \le b < b_2 < \infty$. Домножим первое уравнение (1.1) на Ap, второе – на Bq, третье – на Cr и сложим. Получим уравнение вида

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \quad W(t, G) = T(t, G) - t. \tag{2.2}$$

В предположении $b = b(t)$, т.е. функция $b(t)$ не зависит от модуля G, приходим к решению и условию для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t - t_0)} - \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\lambda t_0}\int_{t_0}^{T} b(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau, \quad T = T(t_0, G^0). \tag{2.3}$$

Решение всегда существует, что приводит к построению решения задачи оптимального быстродействия в форме синтеза. Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия. При $b = \mathrm{const}$ решения уравнения (2.2) для G и краевой задачи (2.3) упрощаются и записываются следующим образом:

$$G(t) = \frac{1}{\lambda}[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b], \quad T = \frac{1}{\lambda}\ln\left(G^0\frac{\lambda}{b} + 1\right), \quad t_0 = 0. \tag{2.4}$$

Далее подробно анализируется случай (2.4). Домножим первое уравнение (1.1) на p, второе – на q, третье – на r и сложим. В результате имеем выражение для производной от кинетической энергии H

$$\dot{H} = -\frac{2bH}{G} - 2\lambda H, \quad H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{2.5}$$

Поскольку функция $G(t)$ известна, то уравнение (2.5) допускает полное интегрирование

$$H = H^0 G^{0^{-2}} \lambda^{-2}[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]^2. \tag{2.6}$$

Примем для определенности, что $A > B > C$. Рассмотрим сначала движение при условии $2HA \ge G^2 > 2HB$, порождаемом траекториями, которые охватывают ось наибольшего момента инерции A. Введем функцию k, имеющую смысл модуля эллиптических функций [5]

$$k^2 = \frac{(B - C)(2HA - G^2)}{(A - B)(G^2 - 2HC)}, \quad 0 \le k^2 \le 1, \tag{2.7}$$

и однозначно связанную с кинетической энергией H и величиной кинетического момента G. Значение $k = 0$ отвечает вращению вокруг оси A, а $k = 1$ – движению по сепаратрисе. При помощи формул (2.7), (1.1), (2.1), (2.4), (2.6) получим выражение для производной k^2

$$\begin{gathered}\frac{dk^2}{dt} = \frac{2(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t)}{\sigma[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]}(\alpha + \beta k^2 + \gamma k^4), \quad k^2(0) = k^{0^2},\\ \sigma = \lambda^{-1}(A - B)(B - C)(A - C), \quad \alpha = A(B - C)^2(1 - 2AH^0G^{0^{-2}}),\\ \beta = (A - B)(B - C)(A + C - 4ACH^0G^{0^{-2}}), \quad \gamma = C(A - B)^2(1 - 2CH^0G^{0^{-2}}).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Стационарные точки k^{*2} соответствуют положительным корням уравнения $\alpha + \beta z + \gamma z^2 = 0$, $z = k^2$. Разделяя переменные и интегрируя уравнение (2.8), запишем неявную зависимость k^2 от времени t

$$\frac{\beta + 2\gamma k^2 - \sqrt{-\Delta}}{\beta + 2\gamma k^2 + \sqrt{-\Delta}} = \exp(4\lambda t)[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]^{4\lambda t}, \tag{2.9}$$

где $\Delta = -(A - B)^2(B - C)^2(A - C)^2$. Формула (2.9) связывает k^2 и t; она элементарно разрешима относительно k^2.

3. Построение оптимального управляемого движения. Приведем решение системы (1.1) другим способом. Система (1.1) в векторном виде записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} - \lambda\mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{L}$ – вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $J = \mathrm{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции тела. Обозначим

$$L_x = Ap, \quad L_y = Bq, \quad L_z = Cr. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\dot{L}_x = A\dot{p}, \quad \dot{L}_y = B\dot{q}, \quad \dot{L}_z = C\dot{r}, \tag{3.3}$$

где L_x, L_y, L_z – проекции вектора $\mathbf{L}$ на оси связанной системы координат $Oxyz$. Систему (3.1) с учетом (3.2), (3.3) можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{L}} + [J^{-1}\mathbf{L} \times \mathbf{L}] = -b\frac{\mathbf{L}}{G} - \lambda\mathbf{L}. \tag{3.4}$$

Проведем в (3.4) замену $\mathbf{L} = G\mathbf{l}$, где G – величина кинетического момента, $\mathbf{l}$ – орт вектора $\mathbf{L}$. В результате имеем

$$L(0) = L^0, \quad L(T) = 0, \quad \dot{\mathbf{L}} = \dot{G}\mathbf{l} + G\dot{\mathbf{l}}. \tag{3.5}$$

Подстановка формулы (3.5) в (3.4) с учетом равенства $\dot{C} = -b - \lambda G$ даст

$$G^{-1}\dot{\mathbf{l}} + \lfloor J^{-1}\mathbf{l} \times \mathbf{l} \rfloor = 0. \tag{3.6}$$

Выполним замену аргумента t на τ. Из (3.6) окончательно следует

$$\mathbf{l}' + \lfloor J^{-1}\mathbf{l} \times \mathbf{l} \rfloor = 0, \quad d\tau = G(t)dt, \quad l(0) = L^0/G^0. \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{K} = J^{-1}\mathbf{l}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получим систему уравнений, аналогичную системе уравнений в случае Эйлера для свободного твердого тела:

$$J\mathbf{K}' + [\mathbf{K} \times J\mathbf{K}] = 0. \tag{3.9}$$

Оно может быть полностью проинтегрировано [1–5]. Для этого умножим скалярно (3.9) на **K**, результатом чего будет уравнение

$$(\mathbf{K}, J\mathbf{K}') = 0. \tag{3.10}$$

Интегрируя это уравнение, получим выражение, аналогичное для кинетической энергии [5]

$$H_k = \frac{1}{2}(\mathbf{K}, J\mathbf{K}) = \text{const}. \tag{3.11}$$

Умножим теперь уравнение (3.9) скалярно на **l**. Имеем соотношение:

$$(J\mathbf{K}, J\mathbf{K}) = G_k^2 = 1, \tag{3.12}$$

где G_k – величина вектора **l** кинетического момента.

Выразим из (3.11) и (3.12) величины k_x^2 и k_z^2 через k_y^2, A, B, C, H_k, G_k

$$\begin{aligned} k_x^2 &= \frac{1}{A(C-A)}[(2H_kC - G_k^2) - B(C-B)k_y^2], \\ k_z^2 &= \frac{1}{C(C-A)}[(G_k^2 - 2H_kA) - B(B-A)k_y^2]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Определяемые из (3.13) значения k_x, k_z подставим во второе уравнение системы (3.9), что приведет к дифференциальному уравнению для k_y с разделяющимися переменными

$$\frac{dk_y}{d\tau} = \pm\frac{1}{B\sqrt{AC}}[(2H_kC - G_k^2) - B(C-B)k_y^2]^{1/2}[(G_k^2 - 2H_kA) - B(B-A)k_y^2]^{1/2}. \tag{3.14}$$

Если (3.10) проинтегрировано, то функции k_x, k_z найдутся из равенств (3.13). При этом при извлечении квадратных корней перед радикалами возможны два знака: плюс или минус. Конкретный выбор этих знаков делается при помощи уравнений (3.9).

Выделим два случая, соответствующих различным соотношениям между постоянными H_k и G_k. Будем для определенности считать, что $A > B > C$.

Рассмотрим случай $2H_kA \ge G_k^2 > 2H_kB$, при котором величина k_x во все время движения отлична от нуля. Для интегрирования уравнения (3.14) сделаем замены переменных

$$k_y = \pm\sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{B(A-B)}}\sin\varsigma, \quad \tau' = \sqrt{\frac{(A-B)(G_k^2 - 2H_kC)}{ABC}}t \tag{3.15}$$

и введем положительный параметр $0 \le k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(B-C)(2H_kA - G_k^2)}{(A-B)(G_k^2 - 2H_kC)}.$$

В новых переменных уравнение (3.14) запишется в виде

$$\frac{d\varsigma}{d\tau'} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varsigma}.$$

Пусть при $t = 0$ компонента $k_y = 0$; тогда $\varsigma = \mathrm{am}\tau'$, где am – эллиптическая амплитуда по модулю k. Решение уравнений Эйлера (3.9) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби dn, sn, cn

$$k_x = \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_kC}{A(A-C)}}\mathrm{dn}(\tau'; k), \quad k_y = \pm\sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{B(A-B)}}\mathrm{sn}(\tau'; k), \quad k_z = \mp\sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{C(A-C)}}\mathrm{cn}(\tau'; k). \tag{3.16}$$

Учитывая, что $\mathbf{l} = \mathbf{L}/G$, а также формулы (3.8) и (3.2), получим

$$p = G_k\sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_kC}{A(A-C)}}\mathrm{dn}(\tau'; k), \quad q = \pm G_k\sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{B(A-B)}}\mathrm{sn}(\tau'; k),$$
$$r = \mp G_k\sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{C(A-C)}}\mathrm{cn}(\tau'; k). \tag{3.17}$$

Перейдем к сферическим углам θ и φ, характеризующим проекции вектора кинетического момента $\mathbf{L}$ на оси системы координат, связанной с телом. Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz равны

$$p = \frac{G_k}{A}\sin\theta\sin\varphi, \quad q = \frac{G_k}{B}\sin\theta\cos\varphi, \quad r = \frac{G_k}{C}\cos\theta. \tag{3.18}$$

Тогда, подставив (3.18) в (3.17), приходим к соотношениям

$$\sin\theta\sin\varphi = \sqrt{\frac{A(G_k^2 - 2H_kC)}{(A-C)}}\mathrm{dn}(\tau'; k), \quad \sin\theta\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{B(2H_kA - G_k^2)}{(A-B)}}\mathrm{sn}(\tau'; k),$$
$$\cos\theta = \mp\sqrt{\frac{C(2H_kA - G_k^2)}{(A-C)}}\mathrm{cn}(\tau'; k). \tag{3.19}$$

Теперь проанализируем вариант $2H_kB > G_k^2 \geq 2H_kC$. В этом случае величина k_z во все время движения отлична от нуля. Сделаем замены переменных:

$$k_y = \pm\sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_kC}{B(B-C)}}\sin\varsigma, \quad \tau' = \sqrt{\frac{(B-C)(2H_kA - G_k^2)}{ABC}}t.$$

Если ввести параметр $0 \leq k^2 < 1$ по формуле

$$k^2 = \frac{(A-B)(G_k^2 - 2H_kC)}{(B-C)(2H_kA - G_k^2)},$$

то уравнение (3.14) запишется в виде

$$\frac{d\varsigma}{d\tau'} = \sqrt{1 - k^2\sin\varsigma}.$$

Допустим, что при $t = 0$ компонента $k_y = 0$. Тогда решениями уравнений (3.9) будут

$$k_x = \mp\sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_kC}{A(A-C)}}\mathrm{cn}(\tau'; k), \quad k_y = \pm\sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_kC}{B(B-C)}}\mathrm{sn}(\tau'; k), \quad k_z = \sqrt{\frac{2H_kA - G_k^2}{C(A-C)}}\mathrm{dn}(\tau'; k). \tag{3.20}$$

Учитывая, что $\mathbf{l} = \mathbf{L}/G$, привлекая формулы (3.8), (3.2) и (3.17), получим

$$\sin\theta\sin\varphi = \mp\sqrt{\frac{A(G_k^2 - 2H_kC)}{(A-C)}}\mathrm{cn}(\tau'; k), \quad \sin\theta\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{B(G_k^2 - 2H_kC)}{(B-C)}}\mathrm{sn}(\tau'; k).$$
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{C(2H_kA - G_k^2)}{(A-C)}}\mathrm{dn}(\tau'; k). \tag{3.21}$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Заметим, что в двух рассмотренных случаях величины k_x, k_y, k_z – периодические функции времени, поэтому полодии представляют собой замкнутые кривые.

Заключение. Исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде. Определены управление и время быстродействия (функция Беллмана). Управляемое движение представляет собой движение типа Эйлера–Пуансо с изменяющейся по времени согласно формулам (2.3), (2.4) величиной кинетического момента тела G_k. Отметим, что изложенный выше подход был развит в [4] на основе теории [6–8], разработанной для управляемых систем с инвариантной нормой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3.
2. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985.
3. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983.
4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
5. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
6. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
7. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
8. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.