

УДК 531.383

©2005. Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ УГЛОВ ПРЕЦЕССИИ И НУТАЦИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от углов прецессии и нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получена усредненная система уравнений движения для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном случае. Рассмотрены примеры движения тела под действием восстанавливающего момента сил конкретного вида.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки O под действием возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от углов прецессии и нутации. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= k(\theta, \psi) \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -k(\theta, \psi) \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\
 C\dot{r} &= M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad (i = 1, 2, 3), \\
 \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Величины M_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции на те же оси вектора возмущающего момента, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π . Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от углов нутации и прецессии $k(\theta, \psi)$. При отсутствии возмущений $M_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и $k(\theta) = \operatorname{const}$, уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i = 1, 2), \quad M_3 \sim k, \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, & q &= \varepsilon Q, & k &= \varepsilon K(\theta, \psi), \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi) \quad (i = 1, 2), & M_3 &= \varepsilon M_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Ранее рассматривались быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \text{const}$ [1] и момента, зависящего от угла нутации $k = k(\theta)$ [2]. Исследован [3, 4] случай восстанавливающего момента вида $k = k(\theta)$ и зависимости возмущающего момента также и от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Рассмотрены возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов, медленно изменяющихся во времени [5]. В [6–8] исследовался более общий случай зависимости восстанавливающего момента одновременно от угла нутации и медленного времени: $k = k(\tau, \theta)$.

Ниже рассматривается случай, когда восстанавливающий момент зависит от углов нутации и прецессии: $k = k(\theta, \psi)$.

Ставится задача об асимптотическом поведении системы (1) при малом ε ; если выполнены условия (2), (3), исследование проведем методом усреднения [9, 10] на интервале времени порядка ε^{-1} .

Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив на ε обе части первых двух уравнений (1) после замены переменных (3)) и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned} r &= r_0, & \psi &= \psi_0, & \theta &= \theta_0, & \varphi &= \varphi_0 + r_0 t, \\ P &= a \cos \gamma_0 + b \sin \gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(r_0 t + \varphi_0), \\ Q &= a \sin \gamma_0 - b \cos \gamma_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(r_0 t + \varphi_0), \\ a &= P_0 - K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, & b &= -Q_0 + K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ \gamma_0 &= n_0 t, & n_0 &= (C - A) A^{-1} r_0, & r_0 &\neq 0, & |n_0/r_0| &\leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$\theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3), (4), перейдем в системе (1) от переменных $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где $\alpha = \gamma + \varphi$. После ряда преобразований получим систему семи уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) + \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha - \\ &- \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos \theta (b - K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha) - \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin \alpha \left[(a \cos \alpha + \right. \\ &\left. + b \sin \alpha) \sin \theta \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} + (a \sin \alpha - b \cos \alpha + K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = & \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) - \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha + \\ & + \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos \theta (a + K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha) + \varepsilon C^{-1} r^{-1} \cos \alpha \left[(a \cos \alpha + \right. \\ & \left. + b \sin \alpha) \sin \theta \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} + (a \sin \alpha - b \cos \alpha + K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta) \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3^0,$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha),$$

$$\dot{\alpha} = CA^{-1}r - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos \theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r,$$

$$M_i^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим систему (5) с точки зрения применения метода усреднения [9, 10]. Зависимость восстанавливающего момента от угла прецессии приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (5) слагаемых, содержащих частные производные $\partial K(\theta, \psi)/\partial \psi$. Система (5) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и быстрые переменные φ и фазы α, γ . Проекции M_i^0 возмущающего момента являются периодическими функциями α, γ с периодом 2π . Система (5) содержит две вращающиеся фазы α и γ , а соответствующие им частоты $\omega_1 = CA^{-1}r$ и $\omega_2 = (C - A)A^{-1}r$ переменны.

При усреднении системы (5) имеют место два случая: нерезонансный, когда частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы (C/A – иррациональное число), и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \leq 2$; i, j – взаимно простые небольшие натуральные числа). В нерезонансном случае ($C/A \neq i/j$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (5) по обоим быстрым переменным α, γ :

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \varepsilon A^{-1} \mu_1 - \varepsilon b K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos \theta + \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-2} r^{-2} \sin \theta \mu_3^c - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon C^{-1} r^{-1} b \sin \theta \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \varepsilon C^{-1} r^{-1} a \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi}, \\ \dot{b} = & \varepsilon A^{-1} \mu_2 + \varepsilon a K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \cos \theta - \varepsilon K(\theta, \psi) C^{-2} r^{-2} \sin \theta \mu_3^c + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon C^{-1} r^{-1} a \sin \theta \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \varepsilon C^{-1} r^{-1} b \frac{\partial K(\theta, \psi)}{\partial \psi}, \\ \dot{r} = & C^{-1} \mu_3, \quad \dot{\psi} = K(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mu_1(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) d\alpha d\gamma,$$

$$\mu_2(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) d\alpha d\gamma,$$

$$\begin{aligned}\mu_3(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 d\alpha d\gamma, \quad \mu_3^s(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \sin \alpha d\alpha d\gamma, \\ \mu_3^c(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \cos \alpha d\alpha d\gamma.\end{aligned}$$

В результате усреднения частные производные от восстанавливающего момента сохранились. Отметим, что последнее уравнение системы (6) интегрируется и дает $\theta = \theta_0$. Решая усредненную систему (6) для восстанавливающего момента конкретного вида

$$k(\theta, \psi) = k(\theta) \sin \psi = \varepsilon K(\theta) \sin \psi, \quad (7)$$

определим движение тела в нерезонансном случае с погрешностью порядка ε^{-1} .

При помощи изложенной методики рассмотрим некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела. Вначале исследуем движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого возмущающего момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты M_i ($i = 1, 2, 3$) в этом случае имеют вид

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = \varepsilon M_3^* = \text{const.} \quad (8)$$

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения (6) для возмущающего момента (8) и восстанавливающего момента (7) имеет вид

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0, \quad r = r_0 + \varepsilon C^{-1} M_3^* t, \quad \text{tg} \frac{\psi}{2} = \left| 1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t \right|^{K(\theta)/M_3^*} \text{tg} \frac{\psi_0}{2}, \\ a &= \frac{F}{F_0} [P_0 \cos \beta + Q_0 \sin \beta - \lambda_0 \sin(\beta + \varphi_0)], \quad b = \frac{F}{F_0} [P_0 \sin \beta - Q_0 \cos \beta + \lambda_0 \cos(\beta + \varphi_0)], \\ F &= \left(\frac{1 + \text{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} \left| 1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t \right|^{2m}}{\left| 1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t \right|^m} \right)^{1/2}, \quad m = \frac{K(\theta)}{M_3^*}, \\ F_0 &= \left(1 + \text{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_0 = K(\theta_0, \psi_0) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0, \\ \beta &= \left[\sin \theta K(\theta) \frac{dK(\theta)}{d\theta} + 2 \cos \theta \right] \left[\text{arctg} \left(\left| 1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t \right|^{2m} \text{tg} \frac{\psi_0}{2} \right) - \frac{\psi_0}{2} \right].\end{aligned} \quad (9)$$

В результате подстановки в соотношения (3) выражений P, Q, a, b, r из (4), (9) определим

$$\begin{aligned}p &= \frac{F}{F_0} [p_0 \cos(\gamma - \beta) - q_0 \sin(\gamma - \beta) + \lambda_0 \sin(\gamma - \beta - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \\ q &= \frac{F}{F_0} [p_0 \sin(\gamma - \beta) + q_0 \cos(\gamma - \beta) - \lambda_0 \cos(\gamma - \beta - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \varphi, \\ \gamma &= (C - A) A^{-1} r_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon A^{-1} C^{-1} (C - A) M_3^* t^2.\end{aligned} \quad (10)$$

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Осевая составляющая r вектора угловой скорости монотонно возрастает или убывает в зависимости от знака возмущающего момента. Угол прецессии 2π -периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2}$. Медленные переменные a, b являются произведением осциллирующего сомножителя с частотой, обусловленной видом восстанавливающего момента, и сомножителя, представляющего собой отношение степенных функций.

Составляющие p, q вектора угловой скорости, согласно (10), содержат слагаемое, являющееся произведением степенной функции и осциллирующего сомножителя, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом.

Теперь изучим возмущенное вращательное движение динамически симметричного твердого тела с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Возмущающие моменты M_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [11]

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q, \quad M_3 = -\varepsilon I_3 r. \quad (11)$$

Здесь I_1, I_3 – положительные постоянные, зависящие от свойств среды.

Для нерезонансного случая при восстанавливающем моменте (7), с учетом возмущающих моментов (11), усредненная система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon a \left(A^{-1} I_1 + \frac{1}{2} C^{-1} r^{-1} K(\theta) \cos \psi \right) - \varepsilon C^{-1} r^{-1} b \sin \psi \left(\frac{1}{2} \sin \theta \frac{dK(\theta)}{d\theta} + K(\theta) \cos \theta \right), \\ \dot{b} &= -\varepsilon b \left(A^{-1} I_1 + \frac{1}{2} C^{-1} r^{-1} K(\theta) \cos \psi \right) + \varepsilon C^{-1} r^{-1} a \sin \psi \left(\frac{1}{2} \sin \theta \frac{dK(\theta)}{d\theta} + K(\theta) \cos \theta \right), \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} I_3 r, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K(\theta) \sin \psi C^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая усредненную систему уравнений (12), получим:

$$\begin{aligned} r &= r_0 \exp[-\varepsilon C^{-1} I_3 t], \quad r_0 \neq 0, \quad \theta = \theta_0, \\ \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(-n), \\ a &= F(t) \cos(\Delta G + \beta), \\ b &= F(t) \sin(\Delta G + \beta), \\ n &= \frac{K(\theta)}{I_3 r_0} (1 - \exp(\varepsilon C^{-1} I_3 t)), \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a_0}{b_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(\frac{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \exp(-n) \right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2}} \right)^{1/2} (a_0^2 + b_0^2)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} n - \varepsilon A^{-1} I_1 t\right), \\ \Delta G &= \left(K^{-1}(\theta_0) \sin \theta_0 \frac{dK(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} + 2 \cos \theta_0 \right) \left[\operatorname{arctg} \left(\exp(-n) \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \right) - \frac{\psi_0}{2} \right]. \end{aligned}$$

В результате подстановки в соотношения (3) выражений P, Q, a, b из (4), (13) определим

$$\begin{aligned} p &= F(t) [p_0 \cos(\gamma - \Delta G) - q_0 \sin(\gamma - \Delta G) + k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \Delta G - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q &= F(t) [p_0 \sin(\gamma - \Delta G) + q_0 \cos(\gamma - \Delta G) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \Delta G - \varphi_0)] + \\ &\quad + k(\theta, \psi) C^{-1} r^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Модуль осевой скорости вращения r уменьшается по экспоненте. Угол прецессии монотонно возрастает и зависит от начального значения. Медленные переменные a, b являются произведением степенной функции и осциллирующего множителя, зависящего от вида восстанавливающего момента.

1. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноуцько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 5. – С. 3-10.
2. Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Там же. – 1990. – № 5. – С. 16-23.
3. Кушпиль Т. А., Лещенко Д. Д., Тимошенко И. А. Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 119-125.
4. Akulenko L, Leshchenko D, Kushpil T. and Timoshenko I. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // Multibody System Dynamics. – 2001. – 6, № 1. – P. 3-16.
5. Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Вращения твердого тела под действием нестационарных восстанавливающего и возмущающего моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 3-12.
6. Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 57-62.
7. Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 77-84.
8. Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 6. – С. 32-38.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
11. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

Ин-т проблем механики Российской академии наук, Москва
Одесская гос. академия строительства и архитектуры
leshchenko_d@ukr.net

Получено 01.10.05