

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/258342259>

Возмущенные и управляемые вращения твёрдого тела

Book · January 2013

CITATIONS

0

READS

453

4 authors, including:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering a...

213 PUBLICATIONS 207 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Leonid D Akulenko](#)

Russian Academy of Sciences

531 PUBLICATIONS 1,106 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)



Homogenization in optimal control problems [View project](#)

Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская, Я.С. Зинкевич

**Возмущенные и управляемые
вращения твердого тела**

Одесса - 2013

УДК 31.36/38:629.7.017.2(075.8)

ББК 22.236.33я73

A441

Работа частично поддержана проектом № 953.1/010 третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2013 года

A441 Акуленко, Леонид Денисович

Возмущенные и управляемые вращения твердого тела/ Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская, Я.С. Зинкевич – Одесса:Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова - 2013. – 288 с.**ISBN 978-617-698-045-4**

В книге исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела относительно неподвижной точки под действием моментов сил различной физической природы. Такие задачи возникают в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов.

Для анализа нелинейной системы уравнений движения твердого тела применяются методы аналитической и небесной механики, а также асимптотические методы нелинейной механики. Содержащийся в книге материал представляет собой результаты собственных исследований авторов.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов, научных работников в области прикладной математики и механики.

Рецензенты:

Ф.Л. Черноусько, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, директор Института проблем механики Российской академии наук; профессор Московского физико-технического института;

А.М. Ковалев, академик НАН Украины, доктор физико-математических наук, директор Института прикладной математики и механики НАН Украины, профессор Донецкого национального университета;

А.В. Пироженок, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института технической механики НАН Украины и НКА Украины.

©Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко,
А.Л. Рачинская, Я.С. Зинкевич, 2013

ISBN 978-617-698-045-4

Содержание

Предисловие	5
Введение	12
Глава 1. Уравнения возмущенных вращений твердого тела относительно центра масс.....	34
§1. Понятие возмущенного вращения твердого тела.....	34
§2. Уравнения возмущенного движения и их приведение к случаю систем с быстро вращающимися фазами. Постановка задачи динамики	38
§3. Уравнения возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Эйлера.....	44
§4. Схема усреднения высших степеней в системах с быстрыми и медленными фазами.....	48
Контрольные вопросы и задания.....	54
Глава 2. Эволюция вращений твердого тела в среде с линейной диссипацией.....	55
§1. Вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде.....	55
§2. Вращение тяжелого гиристора в сопротивляющейся среде.....	71
§3. Быстрое вращение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением.....	79
Контрольные вопросы и задания	95
Глава 3. Влияние вязкой жидкости в полости на вращения спутника относительно центра масс.....	96
§1. Вращательные движения несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью.....	96
§2. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, с учетом момента сил светового давления от Солнца.....	112
§3. Вращения спутника с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и светового давления.....	126
Контрольные вопросы и задания	140

Глава 4. Влияние момента сил светового давления на вращение спутника.....	141
§1. О движении спутника Солнца с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс под действием момента сил светового давления.....	141
§2. Эволюция вращений спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления.....	152
Контрольные вопросы и задания	171
Глава 5. Оптимальное по быстродействию торможение вращений квазитвердого тела.....	172
§1. Оптимальное торможение вращений твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент и полость, заполненную сильно вязкой жидкостью.....	172
§2. Наискорейшее торможение вращений гиростата с массой, связанной демпфером с квадратичным трением.....	183
§3. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде.....	194
§4. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с подвижной массой в сопротивляющейся среде.....	202
§5. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением.....	211
Контрольные вопросы и задания	220
Глава 6. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела в среде с сопротивлением.....	221
§1. Активное торможение вращений симметричного гиростата с подвижной массой в вязкой среде.....	222
§2. Оптимальная стабилизация вращений симметричного гиростата с внутренними степенями свободы в среде с сопротивлением.....	231
§3. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в среде с сопротивлением.....	239
§4. Оптимальное торможение вращений несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде.....	246
Контрольные вопросы и задания	261
Литература.....	262

ПРЕДИСЛОВИЕ

Естественное развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а в некотором смысле близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияний различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.).

В книге исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела относительно неподвижной точки под действием моментов сил различной физической природы. Рассматриваются движения, близкие к случаю Эйлера-Пуансо, при наличии: а) гравитационного притяжения; б) сопротивляющейся среды; в) полости, заполненной вязкой жидкостью; г) светового давления; д) подвижной массы, соединенной с телом упругой связи с вязким или квадратичным трением, и некоторых сочетаний указанных возмущающих факторов.

Такие задачи возникают в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов. Возрастающие требования к точности расчетов движений искусственных спутников относительно центра масс, гироскопических систем ставят вопрос о решении задач с помощью современных методов теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Для анализа нелинейной системы уравнений движения твердого тела применяются методы аналитической и небесной механики, а также асимптотические методы нелинейной механики (сингулярных и регулярных возмущений, усреднения и др.).

Системы уравнений движения приводятся к стандартному виду систем с медленными и быстрыми переменными. При необходимости, применяется модифицированный метод усреднения. Последующий анализ усредненной системы проводится при помощи качественных и аналитических методов дифференциальных уравнений и численного интегрирования.

Для решения задач оптимального управления математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела строится в виде уравнений Эйлера. На основе динамического программирования и неравенства

Шварца из системы уравнений управляемых вращений получается уравнение, подлежащее интегрированию с учетом его структурных свойств.

Переходим к изложению содержания книги.

Введение посвящено обзору литературы по теме пособия. Также охарактеризовано состояние проблемы, рассматриваемой в книге, отмечены основные направления исследований.

В главе 1 рассматриваются возмущенные движения твердого тела относительно центра масс под действием моментов сил различной природы. В качестве невозмущенного движения рассматривается движение Эйлера-Пуансо. При исследовании эволюции возмущенного движения хорошие результаты дает применение метода усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Для его использования в уравнениях движения твердого тела нужно разделить все переменные на медленные и быстрые. Рассматриваются нелинейные системы, содержащие быструю и относительно медленную фазу. Применяется модифицированный метод усреднения, когда усредненные по быстрой фазе медленные переменные не изменяются. Проводится процедура разделения переменных на существенно больших по малому параметру интервалах времени, на которых происходит значительная эволюция всех переменных.

Во второй главе исследуются быстрые вращения твердого тела под действием внешних и внутренних моментов сил различной природы. В качестве невозмущенного движения во всех задачах данной главы рассматривается свободное движение Эйлера-Пуансо, влияние возмущений учитывается методом усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Рассматриваются возмущения, обусловленные влиянием моментов: сил линейного сопротивления, силы тяжести, вязкой жидкости в полости тела, гравитации.

В §1 рассматривается быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого тела в сопротивляющейся среде. Движение тела в этом случае состоит из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента с медленно убывающими величинами кинетического момента и кинетической энергией, и из движения самого вектора кинетического момента. Изменения кинетической энергии и модуля кинетического момента зависят только от сопротивления среды. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали зависит от действия силы тяжести и силы сопротивления среды.

В результате применения метода усреднения получается автономное уравнение для квадрата модуля эллиптических функций k^2 , описывающее движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Анализ этого уравнения позволяет найти квазистационарные движения, в которых движение в целом затухает (кинетический момент и ки-

нетическая энергия стремятся к нулю), но характер движения тела вокруг вектора кинетического момента остается неизменным.

В §2 исследуется быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде несимметричного твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Анализ усредненных уравнений движения показывает, что кинетическая энергия T и величина кинетического момента тела G строго убывают. Система усредненных уравнений для G и квадрата модуля эллиптических функций k^2 интегрируется численно. Проведен численный анализ скорости стремления к нулю величин k^2 и G при различных начальных значениях переменной k^2 . Рассматривается также случай осесимметричного тела.

В §3 рассматриваются возмущенные движения спутника относительно центра масс под действием моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления среды. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Момент сил сопротивления полагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Установлены эффекты убывания модуля кинетического момента и кинетической энергии. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. При этом получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения. Проведены численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения и для случая малой диссипации.

Глава 3 посвящена исследованию возмущенных вращательных движений спутника относительно центра масс. Тело содержит сферическую полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью.

В §1 изучается вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, заполненной сильно вязкой жидкостью, в гравитационном поле. Применяются процедура усреднения по движению Эйлера-Пуансо и модифицированный метод усреднения. Установлен эффект убывания кинетической энергии вращательных движений спутника. Получено, что вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 сначала против хода часовой стрелки за счет имеющейся начальной кинетической энергии, а затем по ходу часовой стрелки. В этом случае кинетическая энергия убывает до значения, соответствующего устойчивому вращению спутника вокруг оси с наибольшим моментом

инерции. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

В §2 исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, под действием момента сил светового давления. Орбитальные движения вокруг Солнца с произвольным эксцентриситетом предполагается заданными. Рассматривается движение спутника в предположении, что кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающихся сил. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Установлен эффект убывания кинетической энергии вращательного движения спутника. Определена ориентация вектора кинетического момента в пространстве. Рассматривается предельный случай, близкий к осевому вращению спутника. Изучается частный случай вращательного движения динамически симметричного спутника.

В §3 исследуется вращательные движения относительно центра масс несимметричного спутника (планеты) со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики квазитвердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите. Исследование эволюции вращений спутника проводится на асимптотически большом интервале времени. Получена система уравнений движения, содержащая медленные и быстрые переменные. Применяются процедура усреднения по движению Эйлера-Пуансо и модифицированный метод усреднения. В общем случае проведен численный анализ и аналитическое исследование в предельном случае вращения вокруг оси, соответствующей наибольшему моменту инерции. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

В четвертой главе исследуется влияние момента сил светового давления на вращение спутника относительно центра масс. В §1 изучается вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. В качестве невозмущенного движения рассматривается свободное движение твердого тела, влияние возмущений учитывается методом усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Показано, что момент сил светового давления совпадает с моментом, действующим на спутник в гравитационном поле, при определенных значениях главных центральных моментов инерции.

В §2 с помощью метода усреднения исследуется эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под

действием момента сил светового давления в случае, когда космический аппарат представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. Найден первый интеграл системы усредненных уравнений первого приближения для углов нутации и собственного вращения. В качестве примеров проводится учет нулевой и первой гармоник, четных и третьей гармоник при аппроксимации коэффициента момента сил светового давления. Проведен численный и качественный анализ фазовой плоскости, выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

В главе 5 исследуются задачи оптимального по быстродействию торможения вращений квазитвердого тела. В §1 изучается задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Получены качественные и количественные характеристики поведения сферического угла θ . Определены прецессионные вращения квазитвердого тела относительно оси в экваториальной плоскости.

В §2 исследуется задача об оптимальном торможении вращений свободного твердого тела, несущего элементы с распределенными параметрами. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости, и подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса лежит на оси симметрии. Асимптотическими методами нелинейной механики построена математическая модель управляемых движений гибридной системы в квазистатическом приближении. Проведены анализ осевого вращения для управляемого движения тела и анализ вращения тела в экваториальной плоскости. Показано, что вектор кинетического момента в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

В §3 аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол, установлены качественные свойства оптимального движения.

В §4 изучена задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений симметричного тела с вязкоупругим элементом в сопротивляющейся среде. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстрогодействия и фазовые траектории.

В §5 рассматривается задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела, соединенного в точке на оси симметрии с массой относительно малых размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения. Рассмотрен предельный случай вращения для управляемого движения тела, близкого к осевому. Получена формула, которая позволяет провести анализ изменения сферического угла θ во времени для различных значений параметров системы и начальных данных. Изучено вращение тела в экваториальной плоскости. Проведен численный анализ, который показал, что направление вектора кинетического момента \mathbf{G} в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующих наибольшим моментам инерции.

Глава 6 посвящена исследованию оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела в среде с сопротивлением. В §1 рассматривается активное торможение вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. На твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды.

Проведен анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Исследовано поведение сферического угла в малой окрестности стационарных точек $\theta^* = 0, \pi / 2$. Рассмотрены прецессионные вращения твердого тела. Проведен численный расчет, согласно которому тело сначала поворачивается в сторону уменьшения сферического угла, а затем вращение меняет свое направление и сферический угол достигает своего предельного значения. Численное исследование влияния сил вязкой жидкости в полости и момента сил, обусловленного наличием вязкоупругого элемента, показало, что характер поведения сферического угла θ зависит от отношения величин безразмерных коэффициентов, характеризующих эти возмущающие моменты сил, а также зависящих от характеристики управляемого движения. При существенном влиянии момента сил вязкой жидкости в полости происходит торможение твердого тела. Влияние момента сил, обусловленного наличием вязкоупругого элемента, приводит к росту

сферического угла до предельного значения, которое определяется самими безразмерными коэффициентами. При существенном влиянии момента сил, зависящего от вязкоупругого элемента, вращение тела затормозится, отклоняясь на угол $\theta^0 = \pi / 2$.

В §2 изучается оптимальная по быстродействию стабилизация вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Тело содержит также подвижную массу, прикрепленную демпфером к точке на оси симметрии посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует тормозящий момент сил вязкого трения.

Рассмотрено изменение экваториальных составляющих вектора угловой скорости тела p , q . Исследован характер поведения сферического угла в зависимости от величины момента сил вязкой жидкости в полости тела. При увеличении момента сил вязкой жидкости в полости убывание сферического угла до предельного значения происходит за больший промежуток времени при постоянном моменте торможения. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия и сферический угол θ , установлены качественные свойства оптимального движения.

В §3 рассматривается задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного твердого тела в среде с сопротивлением. Тормозящий момент сил сопротивления является линейным возмущением относительно угловой скорости. Ставится задача оптимальной стабилизации вращений, решение которой строится в точной постановке без предположения о малости различных параметров. Определены управление и время быстродействия (функция Беллмана). Показано, что управляемое движение представляет собой движение типа Эйлера-Пуансо с изменяющейся по времени величиной кинетического момента.

В §4 аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия, эволюции квадрата модуля эллиптических функций k^2 , безразмерных кинетической энергии и кинетического момента. Установлены качественные свойства оптимального движения.

Подчеркнем, что изложение материала по главам и параграфам независимо для облегчения усвоения материала.

Список литературы не претендует на полноту; он отражает основные интересы авторов и близок к содержанию книги.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о возмущенном движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из самых знаменитых проблем механики. Интерес к ней определяется ее практическим значением для динамики вращательного движения космических аппаратов и прикладной теории гироскопов. Эта проблема имеет также и самостоятельный теоретический интерес как раздел классической динамики, получивший в последние десятилетия весьма быстрое развитие.

В книге исследуются возмущенные вращательные движения спутника относительно центра масс под действием моментов сил различной физической природы. Рассматриваются движения спутника (твердого тела), близкие к случаю Эйлера–Пуансо, при наличии малых возмущающих моментов, обусловленных влиянием: а) гравитационного притяжения; б) сопротивляющейся среды; в) светового давления; г) полости, заполненной вязкой жидкостью, и некоторых сочетаний указанных возмущающих факторов.

Такие задачи возникают в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов. Возрастающие требования к точности расчетов движений искусственных спутников относительно центра масс, гироскопических систем ставят вопрос о решении задач с помощью современных методов теории нелинейных дифференциальных уравнений. Наиболее рациональным и строго обоснованным методом анализа нелинейной механики служит асимптотический метод усреднения. Реализация этого метода в динамике твердого тела является насущной. Анализ решений усредненных уравнений дает значительную информацию об эволюционных свойствах вращающегося твердого тела.

Исследования в указанных направлениях ведутся в течение ряда лет. Задачам эволюции вращательных движений спутников (твердых тел) посвящены работы В.В. Белецкого, В.Г. Демина, В.Н. Кошлякова, В.В. Румянцева, В.А. Сарычева, Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, А.И. Кобрин, Ю.Г. Мартыненко, В.В. Сазонова, В.В. Сидоренко, В.А. Самсонова, Г.Г. Денисова, Ю.М. Урмана, Д.Д. Лещенко, Kane T.R., Thomson W.T., Roberson R.E., Junkins J.L. и других. Здесь упомянуты авторы лишь тех работ, к которым наиболее близка наша книга.

Задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки издавна привлекает внимание механиков и математиков. Эйлер в 1758 году впервые рассмотрел решение этой задачи для случая свободного тела, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой. В 1788 году Лагранжем было исследовано движение тяжелого твердого тела в случае, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, а центр масс твердого тела находится на оси симметрии этого эллипсоида.

После Лагранжа исследование вращения твердого тела вокруг неподвижной точки продолжалось, но лишь С.В. Ковалевская нашла еще один случай, для которого решение может быть получено при произвольных начальных условиях. Кроме того, в конце XIX века было открыто несколько случаев, для которых могут быть получены частные решения уравнений движения. К ним относятся случаи В. Гесса, Д.К. Бобылева, В.А. Стеклова и другие.

В последние десятилетия получено много новых решений задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Предложены новые формы уравнений, развиты новые методы их исследования, и в результате этого число точных решения увеличилось более чем вдвое по сравнению с их числом в первой половине XX века. Основные результаты в этой области получены Л.Н. Сретенским, П.В. Харламовым, Е.И. Харламовой и другими.

Обзор полученных решений, их классификация и подробная библиография по данному вопросу приведена в статьях П.В. Харламова [1, 2], В.Г. Демина, Л.А. Степановой [3] и книгах Г.В. Горра, Л.В. Кудряшовой, Л.А. Степановой [4], Е.И. Харламовой, Г.В. Мозалевской [5], А.И. Докшевича [6], М.Е. Лесиной, Л.В. Кудряшовой [7], А.В. Борисова, И.С. Мамаева [8].

Наряду с точными решениями, для построения частных решений широко используются приближенные методы, в частности метод малого параметра Пуанкаре. Важные исследования в этом направлении проведены Ю.А. Архангельским, В.Г. Деминым, В.В. Козловым, ряд результатов которых изложен в монографиях Ю.А. Архангельского [9], В.В. Козлова [10], В.Г. Демина, Л.И. Конкиной [11].

В книге В.И. Арнольда, В.В. Козлова, А.И. Нейштадта [12] содержится обзор методов интегрирования уравнений движения механических систем. В монографии Г.В. Горра, А.А. Илюхина, А.М. Ковалева, А.Я. Савченко [13] изложены нелинейные методы исследования динамики, устойчивости, наблюдаемости и идентификации механических систем, основанные на методе инвариантных соотношений и топологических методах Колмогорова-Арнольда-Мозера.

В книгах Г.В. Горра, А.В. Мазнева, Е.К. Щетиной [14, 15] представлены результаты, полученные при исследовании прецессионных движений в динамике систем связанных твердых тел. Изложены современные результаты, полученные в задачах динамики гиростата, имеющего неподвижную точку.

Основная цель нашей книги заключается в исследовании эволюции возмущенного движения. При этом хорошие результаты дает применение метода усреднения [16-18]. Метод усреднения давно применялся в небесной механике, хотя и без надлежащего обоснования. Впервые он был строго сформулирован и обоснован в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова (см., например, [16]).

В настоящее время имеется много работ, посвященных обоснованию и приложениям асимптотических методов. Изложение этих методов, а также подробная библиография по данному вопросу содержится в книгах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского [16], В.М. Волосова и Б.И. Моргунова [17], Ю.А. Митропольского [18], Н.Н. Моисеева [19], В.Ф. Журавлева, Д.М. Климова [20], Е.А. Гребеникова [21], В.И. Арнольда, В.В. Козлова, А.И. Нейштадта [12, 22, 23].

Впервые методика усреднения была применена к исследованию возмущенных движений спутника относительно центра масс в работах В.В. Белецкого [24, 25] и Ф.Л. Черноушко [26]. В [24, 25] рассматривался осесимметричный спутник. В работе [26] построена процедура усреднения для спутника с произвольным трехосным эллипсоидом инерции, то есть по движению Эйлера-Пуансо в общем случае. Кроме того, в статье Ф.Л. Черноушко [26] проведено усреднение для трехосного спутника с близкими моментами инерции. В этих случаях движение спутника складывается из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента и движения самого вектора кинетического момента.

Остановимся кратко на работах, посвященных исследованию возмущенных движений твердого тела относительно центра масс. Монография В.В. Белецкого [25] посвящена описанию методов исследования и основных эффектов движения искусственного спутника относительно центра масс под действием гравитационных, магнитных, аэродинамических моментов и моментов сил светового давления. В обзорной статье этого же автора [27] подведен итог ряда работ, посвященных исследованию быстрых вращений тел. В книге В.В. Белецкого [28] изложена теория относительного движения спутника в гравитационном поле. Основное внимание уделено нелинейным резонансным эффектам. Эффекты движения спутника, описанные В.В. Белецким в [25] и Ф.Л. Черноушко в [26], были также исследованы в работе Holland R.L., Sperling H.J. [29].

В.В. Белецкий, А.М. Яншин в [30] исследовали влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников простой и сложной формы. Книга В.В. Белецкого, А.А. Хентова [31] посвящена проблеме теоретического объяснения закономерностей эволюционного формирования структуры орбитально-вращательных синхронизмов ряда больших тел Солнечной системы. Учитываются основные факторы: гравитационные и магнитные моменты, приливные эффекты, вековая эволюция орбиты.

В монографии В.В. Белецкого [32] рассмотрены модельные задачи динамики твердых тел применительно к небесным и земным телам. Большое внимание уделено сочетанию регулярности и хаотичности движения. С этой точки зрения описываются проблемы ориентации и стабилизации искусственных и естественных небесных тел. Работа Нам Тум По [33] посвящена изучению воздействия на вращательное движение спутников различной формы тормозящих аэродинамических моментов. В статье Л.И. Федоровой [34] исследованы эффекты, связанные с возмущенным движением несимметричного ИСЗ относительно центра масс под действием сил аэродинамической диссипации. В работе В.В. Белецкого, А.В. Грушевского [35] изучена эволюция вращения спутника с использованием полной формулы диссипативного аэродинамического момента.

Основные направления исследований движения космических аппаратов и моделирования внешних сил, действующих на спутники, подробно освещены в обзорах В.М. Морозова [36], В.А. Сарычева [37], Shrivastava S.K., Modi V.J. [38].

Анализу резонансных эффектов при исследовании вращательного движения спутника с неравными моментами инерции в гравитационном поле посвящена статья А.П. Торжевского [39]. В работе [40] (Hitzl D.L., Breakwell J.V.) исследуются нерезонансные и резонансные возмущенные вращения трехосного спутника в гравитационном поле.

Среди систем стабилизации искусственных спутников с помощью моментов внешних сил наибольшее распространение получили системы гравитационной стабилизации. Первая модель гравитационной стабилизации искусственных спутников и исследование динамики этой системы приведены в работах Д.Е. Охоцимского и В.А. Сарычева [41, 42]. Подробные сведения о системах гравитационной стабилизации можно найти в обзорах [36, 43].

В статье В.А. Сарычева [44] представлен обзор проблем и работ, связанных с разработкой пассивных систем ориентации спутника. Библиография многих российских и зарубежных исследований по пассивным системам ориентации спутников и космических аппаратов представлена также в книгах [45 – 50]. В работе Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева, Э.Л. Аки-

ма, В.А. Сарычева [51] дан обзор основных результатов, полученных в прикладной небесной механике и управлении движением космических аппаратов.

Модель спутника, движущегося в центральном гравитационном поле под действием момента сил аэродинамического сопротивления исследуется в работе Ю.А. Пупышева [52]. Автор рассматривает движение динамически несимметричного твердого тела, имеющего близкие моменты инерции. Вопросу эволюции быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов посвящена статья Е.Ю. Кузнецовой, В.В. Сазонова и С.Ю. Чебукова [53].

В работе Вас.В. Сазонова, В.В. Сазонова [54] предложена математическая модель вращательного движения спутника Фотон. Модель основана на динамических уравнениях Эйлера движения твердого тела и учитывает действие на спутник четырех внешних механических моментов: гравитационного, восстанавливающего аэродинамического, момента с постоянными компонентами в связанной со спутником системе координат и момента, возникающего при взаимодействии магнитного поля Земли с собственным магнитным моментом спутника. Для расчета аэродинамического момента использована специальная геометрическая модель внешней оболочки спутника.

В статье А.И. Масловой, А.В. Пирожено [55] рассмотрены вопросы моделирования моментов аэродинамических сил, действующих на спутник с гравитационной системой стабилизации.

В последнее время достигнут значительный прогресс в развитии гироскопической теории и техники. Наиболее подробно эти результаты отражены в книгах А.Ю. Ишлинского [56] и К. Магнуса [57]. В начале семидесятых годов к исследованию динамики гироскопа стали применять метод усреднения (см., например, [27]). В работе Д.М. Климова, Г.Н. Космодемьянской, Ф.Л. Черноусько [58] исследовано быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела или эквивалентное ему движение гироскопа с неконтактным подвесом. С помощью метода усреднения Ю.Г. Мартыненко в [59] продолжил исследования движений различных видов гироскопов с неконтактными подвесами. В его книге изложены вопросы теории движения проводящего твердого тела в электрических и магнитных полях.

Анализу прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой под действием моментов, имеющих силовую функцию, посвящены работы Г.Г. Денисова, Ю.М. Урмана [60-62]. В статьях Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько, А.Л. Рачинской [276 – 279] рассматривается быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Движение тела состоит из

движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента с медленно убывающими величинами кинетического момента и кинетической энергии, и из движения самого вектора кинетического момента. Изменение кинетической энергии и модуля кинетического момента зависят только от сопротивления среды. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента зависит от действия силы тяжести и силы сопротивления среды. В результате применения метода усреднения получается автономное уравнение для квадрата модуля эллиптических функций k^2 , описывающее движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Анализ этого уравнения позволяет найти квазистационарные движения, в которых движение в целом затухает (кинетический момент и кинетическая энергия стремятся к нулю), но характер движения тела вокруг вектора кинетического момента остается неизменным.

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Момент сил сопротивления полагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система полученная после усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

Движение гироскопов с неконтактным подвесом под действием неконсервативных моментов рассматривалось Г.Г. Денисовым, В.Н. Комаровым в статье [63].

Наряду с этим, известны работы, в которых изучались частные случаи интегрирования уравнений движения гироскопа в сопротивляющейся среде [8, 57, 64 – 77].

В статьях А.И. Нейштадта, М.Л. Пивоварова [78 – 81] рассматривается задача об эволюции вращений спутника под действием возмущающего момента, постоянного в связанных осях. Эта задача возникает, например, при учете травления в газореактивной системе ориентации космических аппаратов. Исследуется движение около центра масс несимметричного твердого тела, на которое действуют два малых возмущающих момента: постоянный в связанных с телом осях и линейный диссипативный, постоянный и содержащий слагаемые, квадратично зависящие от угловой скорости.

Ряд задач о движении гироскопа с самовозбуждением – свободно-го твердого тела, на которое действует момент, известный в системе координат, связанной с телом, рассмотрен ранее в [57, 72, 82 – 85].

В работах Van der Ha J.C. [86], Kane T.R., Levinson D.A. [87], Tsiotras P., Longuski J.M., Ayobi M.A. [88, 89] получены аналитические приближенные решения задачи о движении твердого тела, близкого к симметричному, или тела с произвольными инерционными характеристиками, подверженных воздействию постоянного в связанных осях момента. Полученные решения используются при изучении динамики КА Galileo, спутников GEOS-1, HIPPARCOS.

В работах А.В. Медведева [90] и В.А. Курякова [91] рассмотрены задачи о движении динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием постоянного момента в связанных осях и диссипативного, состоящего из суммы линейных и квадратичных составляющих угловой скорости. Исследовано движение тяжелого твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции в среде с квадратичным по отношению к угловой скорости сопротивлением. В статье С.Ф. Кудина, Ю.Г. Мартыненко [92] изучается движение относительно центра масс симметричного твердого тела при наличии сопротивления среды и активного вращающего момента, обеспечивающего постоянство угловой скорости вращения ротора.

В работе Г.Г. Денисова [93] исследуется устойчивость тела, вращающегося вокруг центра масс в линейно сопротивляющейся среде при наличии момента, направленного вдоль одной из главных его осей, и устойчивость по части переменных при вращении в режиме выбега с применением функции Ляпунова.

Б.Я. Локшин, В.А. Привалов, В.Н. Рубановский, В.А. Самсонов в [94, 95] и М.В. Шамолин в [96] исследовали квазистационарные модели воздействия среды на тело, плоскопараллельное и пространственное движение в сопротивляющейся среде, движение осесимметричных тел с неподвижной точкой в потоке среды.

В [97] (Кане Т.Р.) проинтегрированы уравнения Эйлера симметричного гиростата, рассматриваемого в виде твердого тела с расположенным внутри него симметричным ротором, с учетом внешних диссипативных моментов.

В статье В.Е. Пузырева, А.С. Суйкова [98] рассмотрена задача о движении несимметричного твердого тела относительно центра масс в сопротивляющейся среде. Дается качественное описание фазовых траекторий, приводятся их некоторые характеристики и количественные оценки.

В работе Г.А. Леонова, А.В. Морозова [99] получены условия глобальной асимптотической устойчивости в целом стационарных вращений несимметричного твердого тела вокруг центра масс в поле постоянного внешнего и диссипативного моментов. В [100] (D.J. McGill and L.S. Long)

исследуется влияние вязкого трения на устойчивость по Ляпунову вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

В статье А.М. Кривцова [101] рассматривается свободное вращательное движение твердого тела под действием линейного вязкого момента. Работа Е.А. Ивановой [102] посвящена построению точного решения задачи о свободном вращении осесимметричного твердого тела с учетом момента вязкого трения, линейно зависящего от угловой скорости тела. Решение представлено в форме экспоненциальных рядов. В статье К.Г. Тронина [103] исследована эволюция вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов (см. также [80]). В предположении малости возмущающих моментов при помощи численных методов в дополнение к полученному в [80] показано, что твердое тело асимптотически стремится к вращению вокруг оси наибольшего либо вокруг оси наименьшего момента инерции. В работе [104] (Ge Z.M. and Wu M.N.) рассматривается устойчивость изменяющихся по времени решений неавтономных нелинейных систем. Исследуются некоторые случаи вращения твердого тела, близкие к случаю Эйлера, с различными демпфирующими моментами.

В статье А.А. Бурова, А.В. Карапетяна [105] исследуется задача о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки, которая, как известно, носит существенно неконсервативный характер. Оказалось, что динамика тела в данной задаче при определенных предположениях может быть описана системой уравнений Гамильтона.

Движение уравновешенного тела переменной массы в среде с сопротивлением рассматривалось в работе В.П. Марченко, В.М. Поджио [106]. В статье [107] (Тюреходжаев А.Н., Берсугер М.А.) приводится решение задачи о движении гироскопа с переменными моментами инерции в сопротивляющейся среде.

В ряде случаев учет сопротивления среды, а также аэродинамических сил требуется при изучении искусственных спутников и космических кораблей [108, 109].

Задача исследования вращательного движения космического аппарата под действием момента сил светового давления является одним из важных разделов динамики вращательного движения твердого тела относительно центра масс. Вначале изучались спутники и КА, оснащенные протяженными солнечными батареями или отражающими антеннами. Затем появилась задача об управлении ориентацией с помощью сил светового давления. Литературу по этим вопросам можно найти в обзоре В.А. Сарычева [37], книгах Е.Н. Поляховой [110, 111], В.И. Попова [112], Л.И. Каргу [113].

В монографии В.В. Белецкого [25] исследовано вращение динамически симметричного спутника на гелиоцентрической орбите под действием момента сил светового давления. В работах [114, 115] А.А. Карымовым получены интегральные характеристики силового воздействия светового потока на корпус летательного аппарата, а также приведены формулы для момента сил светового давления, действующего на тело, ограниченное поверхностью вращения.

В статьях Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.С. Шамаева [280-282] исследуется вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. В качестве невозмущенного движения рассматривается свободное движение тела, влияние возмущений учитывается методом усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Показано, что момент сил светового давления совпадает с моментом, действующим на спутник в гравитационном поле, при определенных значениях главных центральных моментов инерции. С помощью метода усреднения исследуется эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления в случае, когда космический аппарат представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическими полиномами произвольного порядка. Найден первый интеграл системы усредненных уравнений первого приближения для углов нутации и собственного вращения. В качестве примеров проводится учет нулевой и первой гармоник, четных и третьей гармоник при аппроксимации коэффициента момента сил светового давления. Проведен численный и качественный анализ фазовой плоскости, выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

В работах [283, 284] (Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, С.Г. Сукова, И.А. Тимошенко) исследуется эволюция вращений спутника Солнца, движущегося по эллиптической орбите с произвольным эксцентриситетом под действием моментов сил гравитации и светового давления. Тело предполагается динамически несимметричным или близким к динамически-сферическому, а его поверхность является поверхностью вращения.

В статьях Я.С. Зинкевич, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинской [285, 286] рассматривается движение динамически несимметричного спутника относительно центра масс под действием гравитационного и светового моментов в среде с сопротивлением.

Можно выделить основные направления исследований влияния светового давления на вращательные движения небесных объектов, выполненных в последние 20 лет. Первое направление – анализ использования светового давления для ориентации КА. В конце 80-ых годов в СССР ве-

лась работа по астрометрическому проекту «Регата-Астро», в рамках которого предполагалось запустить на гелиоцентрическую орбиту КА, ориентированный на Солнце давлением солнечного излучения. Различные вопросы динамики такого КА рассматривались в статьях В.В. Белецкого, А.В. Грушевского, Е.Л. Старостина [116], В.В. Сидоренко [117], А.Ю. Когана, Т.С. Кирсановой [118].

Второе направление – влияние светового давления на вращательно-поступательное движение астероидов. С начала 90-ых годов с все большей интенсивностью обсуждается опасность соударения Земли с астероидом. Предсказание подобных явлений требует построения точных теорий движения астероидов. В световом потоке сложная геометрия реальных астероидов приводит к появлению возмущающих моментов, изменяющих ориентацию оси вращения и, в итоге, величину суммарной силы светового давления, возмущающей орбитальное движение. В качестве примера исследований такого рода отметим работы М.М. Комарова, В.В. Сазонова [119, 120], D. Vokrouhlicky and A. Milani [121].

Последнее направление – изучение эффекта Ярковского. Солнечный свет, падающий на какой-либо объект, нагревает его и затем переизлучается в виде теплового излучения. В результате возникают возмущающие силы и моменты. Основное внимание в статьях по эффекту Ярковского уделялось вековым изменениям параметров этого движения. Тем не менее влияние на движение относительно центра масс тоже рассматривалось в статье Rubincam D.P.[122].

Особенности влияния светового давления на режим ориентации и стабилизации КА с солнечными парусами или отражающими панелями изучаются в книге Л.А. Васильева [123], а некоторые динамические задачи, изложенные в книге В.В. Белецкого, А.М. Яншина [30], могут быть использованы при исследовании потока света на вращательное движение тела в космическом пространстве.

В статьях В.Н. Лихачева, Вас.В. Сазонова, В.В. Сазонова, А.И. Ульяшина [124, 125] исследуется эволюция орбиты искусственного спутника Земли с солнечным парусом. Сравниваются два способа вычисления главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на КА с составным солнечным парусом. Первый способ основан на аналитических формулах, полученных без учета затенения одних частей паруса другими. Второй способ использует геометрическую модель паруса, которая позволяет учесть такое затенение. Установлена область изменения параметров ориентации паруса относительно падающих на него солнечных лучей, в которой первый способ оказывается достаточно точным.

В работах А.И. Neishtadt, D.J. Sheeres, V.V. Sidorenko, P.J. Stooke, A.A. Vasiliev and S.M. Byram [126, 127] получены эволюционные уравне-

ния, которые описывают эффект вращения ядра кометы. Уравнения движения усредняются по невозмущенному движению Эйлера-Пуансо и по орбитальному движению кометы. Определены параметры, которые устанавливают качественные свойства вращательной эволюции ядра кометы. Исследуется вращательная эволюция ядер комет Галлея и Борелли.

Рассмотрим влияние моментов сил внутренней диссипации на движение твердого тела. Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к числу классических задач механики. Фундаментальное исследование движения твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной идеальной жидкостью, в общей постановке было проведено Н.Е. Жуковским в 1885 году [128].

Большой интерес к задачам о движении твердых тел с полостями, содержащими жидкость, снова возник в наше время в связи с развитием ракетной и космической техники. Изложение результатов по динамике и устойчивости движения тела с полостями, содержащими жидкость, дано в книгах Н.Н. Моисеева, В.В. Румянцева [129], Г.Н. Микишева, Б.И. Рабиновича [130], Г.С. Нариманова, Л.В. Докучаева, И.А.Луковского [131]. В обзорных статьях [132, 133] приведены постановка задачи теории устойчивости и колебаний твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, рассмотрены различные формы уравнений движения, их первые интегралы, дано систематическое изложение результатов исследования движения гиристов.

Задачи динамики твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, представляют значительно большие трудности, чем в случае идеальной жидкости. Важный вклад в решение этих задач внесла монография Ф.Л.Черноуьско [134]. В ней показано, что решение задач динамики тела с вязкой жидкостью при некоторых предположениях разбивается на две части: гидродинамическую и динамическую, что позволяет существенно упростить исходную задачу. В первой главе книги [134] и в статье [135], результаты которых используются в нашей работе, рассматривается движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). В них построена система обыкновенных дифференциальных уравнений приближенно описывающая движение твердого тела с жидкостью вне начального интервала времени, когда течение в полости существенно нестационарно. Влияние жидкости на движение тела характеризуется тензором \mathbf{P} , который определяется только формой полости. В качестве примера рассмотрена задача о пространственном движении свободного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

В работах А.И. Кобрин [136, 137] методом пограничного слоя исследован начальный участок движения тела с полостью, содержащий жид-

кость большой вязкости, и указаны начальные условия для предложенной в [134, 135] системы уравнений. Исследуется движение управляемого тела, имеющего полость, заполненную вязкой жидкостью.

Статья Е.П. Смирновой [138] посвящена изучению стабилизирующего влияния вязкой жидкости в полости на вращение волчка вокруг заданной оси. В ней на основе уравнений, полученных Ф.Л. Черноусько, найдено характерное время стабилизации и наилучшая ориентация полости относительно твердого тела. Рассмотрен случай произвольного тензора **Р**. В [139] (Осипов В.З., Суликашвили Р.С.) исследуются колебания на эллиптической орбите твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. В работах Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, С.Г. Суксовой [287, 288] рассмотрено быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде несимметричного тяжелого твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса. Исследовано движение вокруг центра масс близкого к динамически симметричному твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, в сопротивляющейся среде. В статье Б.П. Иващенко [140] рассматривается возможность демпфирования нутационных колебаний при помощи вязкой жидкости, заполняющей полости на роторе или на рамках гироскопа.

В [141] (Пивоваров М.Л.) изучается вращение спутника с постоянным магнитом в плоскости полярной эллиптической орбиты. Исследуется демпфирование с помощью вязкой жидкости, целиком заполняющей полость произвольной формы при малых числах Рейнольдса. В работах В.Г. Вильке, А.В. Шатиной [142, 143] асимптотическим методом изучается движение по инерции волчка и вращательное движение симметричного спутника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. В [144] (Сидоренко В.В.) исследуются вековые эффекты во вращательном движении планеты, обусловленные диссипацией энергии в веществе ядра. Предполагается, следуя [134], что влияние жидкого ядра эквивалентно действию на «замороженную» планету неконсервативного момента специального вида. В статьях Л.Д. Акуленко, Я.С. Зинкевич, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинской [289-291, 324] исследуются быстрые вращательные движения относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости под действием гравитационного и светового моментов. В статье С.В. Богатырева [145] с помощью метода интегральных многообразий рассматривается задача о движении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

В работах В.С. Асланова, А.В. Дорошина [146, 147] рассматриваются два случая движения неуровновешенного гиростата: тяжелого динамически симметричного гиростата с произвольным внутренним моментом

взаимодействия и свободного гиростата при наличии внутреннего момента специального вида. Исследуется прецессионное движение неуравновешенного гиростата переменного состава при действии диссипативных разгоняющих внешних и внутренних моментов, зависящих от угловых скоростей тел (носителя и ротора). В работах А.В. Алексеева, А.В. Дорошина [148, 149] рассматривается пространственное движение вокруг центра масс спутника – гиростата с полостью, содержащей жидкость, при малых числах Рейнольдса. Математическая модель движения гиростата, содержащего полость с жидкостью, приводится к модели гиростата с вязким трением между телом-носителем и роторами и к модели твердого тела, содержащего сферический демпфер.

В статье С.Н. Судакова [150] исследована задача о движении по инерции вокруг центра масс твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной несжимаемой жидкостью, вязкость которой равна нулю на границе и возрастает к центру полости по специальному закону.

Ряд работ посвящен исследованию движения твердого тела с подвижными внутренними массами, с упругими и диссипативными элементами. Обзор работ по механике систем связанных тел, главным образом за 1977-1981 гг., представлен в [151]. Обзор работ по нелинейной динамике упругого КА или ИСЗ с деформируемыми элементами, опубликованных до начала 1980 года, дан в [152]. Работы этого направления описаны также в обзорах по динамике КА [36, 37, 153, 154].

Необходимость рассмотрения системы тел возникла в бурно развивающейся с конца пятидесятых – начала шестидесятых годов XX века области – динамике спутников. С одной стороны, это работы, связанные с исследованием спутников – твердых тел и спутников – гиростатов. С другой – работы, в которых учитываются упругие свойства спутников и их элементов. Ряд задач в указанных областях и обширная библиография по этим вопросам представлены в монографии Л.К. Лилова [155].

В книге А.И. Лурье [156] выводятся уравнения движения твердой оболочки с колеблющимися точечными массами. В статье [157] (Roberson R.E.) рассматриваются воздействующие на спутник возмущающие моменты, которые образуются за счет движения находящихся внутри спутника тел. Работа [158] (Haseltine W.R.) посвящена исследованию демпфирования нутационного движения вращающегося ИСЗ с помощью внутреннего пассивного устройства. В работах [159, 160] (Thomson W.T., Colombo G.) изучается влияние внутренней упругости и диссипации на движение спутника относительно центра масс. В монографии Б.В. Раушенбаха, Е.Н. Токаря [161] составлены уравнения углового движения носителя космического корабля, несущего подвижные массы.

В космическом полете иногда возникает необходимость подавить беспорядочное вращение носителя космического корабля, возникающее по каким-либо причинам. С этой целью используют относительные перемещения подвижных масс (А.М. Летов [162], В.В. Крементуло, Н.М. Качурин [163, 164], Б.Г. Кунсив, М.Х. Каплен [165], В.В. Кравец [166], Н.В. Панкова, В.Н. Рубановский [167]).

В работах Ф.Л. Черноусько, А.С. Шамаева [168-172] рассмотрены некоторые случаи движения твердого тела, содержащего подвижные внутренние массы. Исследована общая задача динамики твердого тела, имеющего внутренние степени свободы: линейные упругие и диссипативные элементы. Изучено движение твердого тела, содержащего массу сплошной вязкоупругой среды. Рассмотрена асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами.

В статьях Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, С.Н. Саллама [292-294] исследуется движение несимметричного твердого тела вокруг центра инерции, к которому в точке, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплен при помощи упругой связи с вязким трением подвижная точечная масса. Рассматривается движение твердого тела, к которому в точке, неподвижно связанной с телом, прикреплен при помощи упругой связи с квадратичным трением подвижная масса. Изучается движение динамические симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу, прикрепленную при помощи упругой связи с вязким или квадратичным трением на оси симметрии.

В работах [295, 296] (Л.Д. Акуленко, Т.А. Кушпиль, Д.Д. Лещенко, И.А. Тимошенко) рассматривается движение вокруг центра инерции близкого к динамически сферическому твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент.

В монографии В.В. Крементуло [173] исследованы проблемы оптимальной стабилизации положений равновесия и перманентных вращений свободного и несвободного твердого тела при помощи управляемых вращающихся масс (маховиков, гироскопов). В книге В.В. Стрыгина, В.А. Соболева [174] изучается динамика твердого тела, несущего гироскоп и подвижные элементы. В работе В.А. Грובה [175] определяются колебания упругого тела или точечной массы, упруго связанных с вращающимся твердым телом. В работе Kane T.R., Levinson D.A. [176] изучается устойчивость, неустойчивость и установившиеся движения КА, стабилизируемого вращением, содержащего внутри точечную массу, закрепленную пружиной и связанную с вязким демпфером. В статье Cloutier G.J. [177] рассматривается движение по инерции свободной механической системы, состоящей из динамически симметричного твердого тела и упруго

связанной с ним точечной массы, движущейся в плоскости, перпендикулярной оси симметрии тела.

Эффекты движения подвижных управляемых масс на вращения космического корабля изучались рядом авторов (см., например, [178 – 181]).

В работах [182, 183] рассматривается движение КА с ротором, при наличии подвода энергии, обусловленного сохранением относительной угловой скорости вращения ротора, и рассеяния энергии вследствие работы демпфера нутации, состоящего из точечной массы с пружиной. Выведены необходимые и достаточные условия устойчивости для симметричных ракет с осевой тягой и диссипативным движением внутренних масс.

В статье М. Райан, П.М. Бейнам [184] при помощи численных и аналитических методов исследовано влияние гравитационных моментов на динамику вращения спутника, состоящего из твердого центрального тела и жестких выдвигающихся телескопических стержней. В работе В.В. Ананьева [185] изучается множество критических значений отображения первых интегралов – энергии и кинетического момента для задачи о движении твердого тела и упруго связанной с ним массы в линейном поле сил. Некоторые качественные аспекты задачи о движении вокруг неподвижной точки твердого тела с подвижной массой исследовались в [186] (Month L.A., Rand R.H.).

В работе Г.Р. Салимова [187] получены уравнения движения космического корабля с учетом передвижения космонавта внутри или на поверхности корабля. В статье А.А. Бурова [188] исследуется движение системы «тело + грузик» в приближении упругой квазистатики, при котором предполагается, что в каждый момент времени грузик находится в равновесии относительно тела под действием потенциальных сил и сил инерции, обусловленных переносным движением. В работе Н.Н. Лосевой [189] обсуждается влияние движения точечной массы, совершающей колебания вдоль главной оси инерции тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, на устойчивость равномерных вращений тела вокруг этой оси. В [190, 191] (Christov O.V.) рассматривается твердое тело с одной закрепленной точкой, в котором вдоль прямолинейного желоба, проходящего через эту точку, совершает колебания прикрепленная к пружине точка с заданной массой. Исследуется устойчивость стационарных движений, когда тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а материальная точка находится в состоянии относительного равновесия. Рассматривается интегрируемый случай системы, состоящий из твердого тела с внутренней массой,двигающейся вдоль фиксированной линии в теле. Тело предполагается свободным и динамически несимметричным, а точка двигается вдоль оси симметрии под действием силы Гука к неподвижной точке.

В статье [192] (Yehia H.M.) исследуется более общий интегрируемый случай, в котором точка движется вдоль оси динамической симметрии под действием произвольной консервативной силы, зависящей только от расстояния до неподвижной точки. В работе [193] (Corpora V.T.) метод усреднения применен для нелинейной системы уравнений Эйлера, описывающей вращательное движение. В качестве примеров предложенной методики рассматриваются воздействия внутренних подвижных частей, реактивных моментов и управления с обратной связью на движение тела.

Вопросы динамики и устойчивости твердого тела, содержащего упругие и диссипативные элементы, рассматривались в статье В.М. Морозова, В.Н. Рубановского, В.В. Румянцева, В.А. Самсонова [194], в книгах Р.Ф. Ганиева, В.О. Кононенко [195], В.Г. Веретенникова, И.И. Карпова, Ю.Г. Маркова [196]. В монографии Р.Ф. Ганиева, П.С. Ковальчука [197] исследованы резонансные колебания твердых тел, твердых деформируемых тел и тел с жидкостью, обусловленные внешними периодическими и почти периодическими возмущениями. В книге Р.Ф. Ганиева, А.Е. Закржевского [198] изложены методы построения программных движений управляемых объектов современной техники с учетом упругости их конструкции. В работе А.Я. Савченко, И.А. Болграбской, Г.А. Кононыхина [199] изучено влияние упругих свойств элементов системы тел на устойчивость равномерных вращений, регулярных прецессий и других движений систем связанных твердых тел. В монографии Л.В. Докучаева [200] рассмотрены вопросы движения летательных аппаратов при значительных углах поворота, когда деформируемые элементы типа стержней, пластин или жидких масс под действием массовых сил совершают колебательные перемещения. В книге В.Г. Вильке [143] исследованы стационарные движения механических систем с упругими элементами и их устойчивость. В монографии М.К. Набиуллина [201] исследована динамика составных орбитальных космических систем, состоящих из жестких и упругих деформируемых тел. В книге [202] (Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др.) изложены методы анализа механического поведения больших космических конструкций. Рассмотрены вопросы движения упругих космических конструкций относительно центра масс под действием моментов сил гравитационного поля. В работе Ю.Г. Маркова, И.С. Миняева [203] исследуются переходные процессы, связанные с колебаниями упругого спутника при движении относительно центра масс под действием управляющего момента. В статье Ю.Г. Мартыненко, В.В. Подалкова [204] найдены количественные оценки переходного процесса, приводящего вязкоупругое твердое тело шаровой формы в неконтактном подвесе к стационарному вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. В работе Н.Е. Егармина [205] рассматривается свободное движение линейно-упругого твердого те-

ла около центра масс, причем задачи теории упругости и динамики тела решаются совместно. Получены уравнения движения типа уравнений Эйлера.

В работах Г.Г. Денисова, В.В. Новикова [206, 207] проведено изучение влияния упругих и вязких свойств тел на их свободные угловые движения. Аналитически получены решения, описывающие как вращательные движения, так и напряжено-деформируемое состояние однородных изотропных квазишара и анизотропно-упругого шара.

В статьях В.В. Сидоренко [208, 209] исследуется вращательное движение твердого тела, несущего вязкоупругие нерастяжимые стержни. Предполагается, то в недеформированном состоянии рассматриваемая механическая система допускает группу симметрий правильного многогранника. Установлены существенные отличия такой системы от движения Эйлера-Пуансо. Рассматривается механическая система, состоящая из двух взаимодействующих подсистем. При устранении взаимодействия одна из подсистем становится гамильтоновой системой, а другая – диссипативной линейной колебательной системой. С помощью метода интегральных многообразий изучаются движения, устанавливающиеся после затухания собственных высокочастотных колебаний диссипативной подсистемы. В статье А.В. Шатиной [210] исследуется эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. Спутник моделируется твердым телом, по оси симметрии которого расположена пара гибких вязкоупругих стержней. В книге В.И. Гуляева, П.П. Лизунова [211] рассматриваются особенности колебательных режимов движения твердых тел, соединенных упругими связями, систем твердых тел и упругих стержней, совершающих сложное движение. Исследуются нелинейные колебания твердого тела, упруго связанного с точечной массой, в центральном силовом поле. В работе Б.А. Смольникова [212] на примере маятниковых систем демонстрируется одно из малоизученных явлений динамики твердых тел – их эволюционное поведение, – обусловленное действием внутренней диссипации.

Большое число работ посвящено оптимальному управлению движением твердого тела относительно центра масс. Отметим некоторые из них, близкие по теме к нашей книге. Задачи оптимальной стабилизации (или торможения) твердого тела рассматривались при различных предположениях относительно динамических характеристик этих тел, систем управления (ограничений на управляющий момент) и для различных критериев качества (быстродействия, расход рабочего тела и др.) [213–217]. К другому классу исследованных вопросов можно отнести задачи, связанные с ориентацией (заданными поворотами) твердого тела в инерциальном пространстве (см., например, [218, 219, 161]). Задачи оптимального управ-

ления вращениями твердого тела рассматривались также в других постановках [220, 221].

В монографиях Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколова [222 – 224] на основе методов малого параметра (теории возмущений и метода усреднения) изучены задачи об оптимальном управлении вращательными движениями тела при различных ограничениях на управляющие моменты.

В работах Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко [223, 224, 293, 297 – 300] изучаются задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы. Решена задача активного торможения свободного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом вязкоупругой связью. Исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. Рассматривается задача об оптимальном торможении вращений твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и содержащего подвижную точечную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. В работах Л.Д. Акуленко, Я.С. Зинкевич, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинской [301 – 304, 323, 325] исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений динамически симметричного и несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде. Рассмотрена задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью с вязким трением или квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует момент сил линейного сопротивления среды. Исследована задача оптимального торможения симметричного гиростата с подвижной массой в среде с сопротивлением. Изучена задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела под действием тормозящего момента сил линейного сопротивления среды.

Монография Ф.Л. Черноусько, И.М. Ананьевского, С.А. Решмина [225] посвящена ряду новых методов управления механическими системами со многими степенями свободы. Рассматриваются, как правило, нелинейные системы при наличии различных ограничений, наложенных на управляющие воздействия и фазовые координаты, а также на их совокупности.

В книгах А.М. Ковалева, В.Ф. Щербака [226, 227] исследуются нелинейные задачи управления и наблюдения динамических систем, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ре-

шаются с помощью полученных критериев конкретные задачи динамики твердого тела. Рассматриваются качественные вопросы теории управления нелинейных динамических систем и решаются задачи управляемого движения твердого тела в сопротивляющейся среде.

В статьях А.М. Ковалева, А.Л. Зуева, В.Ф. Щербака [228, 229] рассмотрена модельная задача о движении спутника как абсолютно твердого тела вокруг центра масс в ограниченной постановке под действием реактивных управляющих моментов без учета изменения массы. Исследована задача синтеза нелинейного закона управления для модельной задачи механической системы, состоящей из жесткого тела – носителя и присоединенных к нему упругих стержней.

В [230] (Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.) исследуется задача перевода объекта управления, движущегося в среде с сопротивлением, на множество, которое представляет собой ε -окрестность некоторой точки, перемещающейся в инерциальном пространстве. В работах В.В. Маланина, Н.А. Стрелковой [231, 232] рассмотрена задача управления оптимальной по быстродействию одноосной переориентацией осесимметричного твердого тела, находящегося под действием сил тяжести, сопротивления среды и управления. Исследована задача синтеза оптимального по быстродействию управления переориентацией сферически-симметричного тела в сопротивляющейся среде при условии, что вектор управляющего внешнего момента ограничен по модулю. В [233] (Junkins J.L. and Turner J.D.) проведено решение задач маневрирования КА. Аналитические и численные методы изложены с точки зрения применимости к решению проблем оптимизации разворота КА. В работе [234] представлены новые результаты для оптимальной по времени трехосной переориентации космического корабля.

В монографиях В.И. Воротникова, В.В. Румянцева [235, 236] большое внимание уделяется решению прикладных нелинейных задач устойчивости, стабилизации и управления по части переменных из различных областей науки и техники. Рассмотрены, например, задачи стабилизации спутника на орбите, управления ориентацией космического аппарата и другие задачи.

В работах А.А. Мартынюка [237, 338] разработан метод матрично-значных функций Ляпунова для анализа устойчивости и других динамических свойств некоторых классов крупномасштабных систем, найдены условия устойчивости движения астрономической лаборатории.

Книга Ю.П. Артюхина, Л.И. Каргу, В.Л. Симаева [239] посвящена проблеме активного управления вращающимися космическими аппаратами (КА). Рассмотрены вопросы динамики движения КА, стабилизирован-

ных вращениями. Показаны принципы построения систем управления скоростью вращения и ориентацией вращающихся КА.

В статьях А.Н. Сиротина [240, 241] изучается проблема существования решения в задаче оптимального управления вращением осесимметричного твердого тела для произвольного случая краевых условий для угловой скорости. Исследуется задача оптимального управления пространственной переориентацией сферически симметричного вращающегося твердого тела с единичным тензором инерции.

В работах А.Н. Башнякова, Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пичкура, И.И. Харченко [242, 243] исследуется задача синтеза оптимального по быстродействию управления гашением угловых скоростей космических аппаратов.

В книге [244] (Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.) исследуется математический аппарат кватернионов в задачах ориентации твердого тела. В монографии В.Н. Кошлякова [245] изложен математический аппарат, основанный на параметрах Родрига-Гамильтона, а также приложения этого аппарата в динамике твердого тела.

В книге Ю.Н. Челнокова [246] излагаются методы описания движения твердого тела, в том числе кватернионы и бикватернионы. Рассматриваются примеры решения задач навигации и управления движением твердого тела, механики космического полета. В статье А.В. Молоденкова, Я.Г. Сапункова [247] исследуется задача оптимального разворота космического аппарата (КА) как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по его угловому положению в кватернионной постановке. В работе М.В. Левского [248], исследована задача управления пространственной переориентацией КА из произвольного начального положения в заданное конечное угловое положение, когда минимизируется время разворотов.

В монографии Д.В. Лебедева, А.И. Ткаченко [249] рассмотрены задачи автономного определения параметров движения конкретных классов малых космических аппаратов, а также особенности управления ориентацией таких аппаратов.

Проблеме стабилизации космических кораблей под действием управляющих моментов сил посвящены работы [250-253].

В статье Kaplan M.H. and Cenker R.J. [254] рассматривается управление вращением во время переориентации тела, испытывающего диссипацию энергии. В качестве примера рассматривается задача о движении по круговой орбите спутника, содержащего полость, заполненную вязкой жидкостью. В работах [255, 256] предлагается постановка и методика решения задач оптимального управления для возмущенного относительного равномерного вращения тела с полостью, содержащей вязкую несжимаемую

жидкость. Выведена формула для угловой скорости возмущенного движения в зависимости от внешнего возмущающего момента. Рассматривается в линейной постановке задача Коши для возмущенного относительно равномерного вращения движения динамически симметричного твердого тела полостью, заполненной идеальной жидкостью.

В книге Г.Г. Бебенина, Б.С. Скребушевского, Г.А. Соколова [257] изложены методы решения задач управления полетом КА. Основное внимание уделено вопросам прогнозирования и определения орбит, формирования закона движения центра масс аппаратов и относительно центра масс.

В статьях В.Ю. Рутковского, В.М. Суханова [258] дан обзор проблемных вопросов, возникающих при решении задач управления ориентацией деформируемых космических аппаратов (ДКА) в классе разрывных систем. Описана модально-физическая форма представления математической модели ДКА, позволившая выявить ряд особенностей динамики управляемого движения упругих объектов.

В книге Г.Л. Дегтярева, Т.К. Сиразетдинова [259] рассмотрены вопросы математического описания и синтеза управления упругими космическими аппаратами.

В статье А.П. Алпатов [260] дан обзор результатов исследований динамики космических аппаратов, свободных и управляемых режимов функционирования, крупногабаритных трансформируемых конструкций космического базирования, выполненных в Институте технической механики НАНУ и НКАУ.

В статье [261] (Meirovitch L., Van Landingham H.F.) предложен метод управления упругим КА, основанный на модальной декомпозиции гироскопической системы. В работе Seltzer S.M. [262] обсуждаются проблемы точного предсказания динамических режимов больших упругих КА на земной орбите и синтеза систем управления, удовлетворяющих жестким техническим требованиям. В статье [263] (Hughes P.C. and Skelton R.E.) рассматриваются вопросы применения теории управления для моделирования и расчета упругих крупногабаритных конструкций ИСЗ.

В работе Ю.Н. Горелова [264] рассматривается вариационная задача приведения в заданное положение за минимальное время оси динамической симметрии КА, служащей его осью вращения.

В статье А.В. Сарычева [265] исследовано управляемое движение вектора кинетического момента осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс. В работе В.И. Гуляева, В.Л. Кошкина, Ю.А. Шинкаря [266] рассмотрена задача об оптимальном по импульсу управляющего момента пространственном развороте твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции.

В статье Ю.Ф. Голубева, В.Н. Демидова [267] обобщается понятие систем с инвариантной нормой и представлены некоторые теоретические подходы к исследованию указанных систем.

В работе П.Д. Крутько [268] синтезируются алгоритмы управления движением объектов, математические модели которых представлены динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера. Решены задачи управления вращательным движением и угловой ориентацией.

В [269, 270] (Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.) исследованы управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами и дан обзор проблем управления неустойчивыми системами.

В работах А.С. Ковалевой [271, 272] изучена динамика квазилинейных систем при случайных возмущениях. Строится процедура разделения движений для многочастотных квазиизохронных систем при стационарном случайном возмущении. В качестве примера рассмотрено вращение волчка Лагранжа при случайных колебаниях точки опоры.

В статьях Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшева, Ю.Г. Маркова, В.В. Перепелкина, Л.В. Рыхловой [273-275] построена оптимальная по точности математическая модель вращения Земли, позволяющая идентифицировать ее параметры на основе данных Международной службы вращения Земли. Разработаны алгоритмы высокочастотной интерполяции и качественного прогноза движения полюса Земли на длительном промежутке времени.

Глава 1.

Уравнения возмущенных вращений твердого тела относительно центра масс

§1. Понятие возмущенного вращения твердого тела.

Предметом данного пособия является исследование возмущенных движений твердого тела относительно центра масс под действием моментов сил различной физической природы. Если на тело не действуют моменты внешних или внутренних сил, то оно совершает некоторое движение, которое назовем невозмущенным. В качестве невозмущенного движения рассматривается движение Эйлера-Пуансо [75, 305, 320]. В реальных условиях на тело действуют возмущающие моменты внешних и внутренних сил, в частности, силы сопротивления среды и внутренних диссипативных сил.

В случае, когда возмущающие моменты, действующие на твердое тело, малы в том смысле, что текущее значение кинетической энергии вращательного движения тела T существенно превосходит работу возмущающих сил A , т.е. $T \gg A$, то движение на небольшом интервале времени будет близко к невозмущенному движению. Однако на достаточно большом интервале времени действие малых возмущающих моментов может привести к накоплению возмущений и к постепенной эволюции движения. Такое движение называется возмущенным движением [28].

Основная цель пособия заключается в исследовании эволюции возмущенного движения. При этом хорошие результаты дает применение метода усреднения [16-18]. Для использования метода усреднения уравнения движения твердого тела нужно привести к стандартному виду систем с одной или несколькими вращающимися фазами.

Успех в исследовании возмущенного движения во многом зависит от того, в каких переменных записаны уравнения возмущенного движения. Точные уравнения возмущенного движения в общем случае не проинтегрированы. Поэтому используются приближенные методы исследования, эффективность которых во многом зависит от вида решаемых уравнений.

В небесной механике для исследования уравнений возмущенного движения применяется метод оскулирующих элементов. Оскулирующие элементы – это характеристики орбиты, остающиеся постоянными в невозмущенном движении и меняющиеся со временем в возмущенном, т.е. первые интегралы уравнений невозмущенного движения. Уравнения, за-

писанные в оскулирующих элементах, удобны тем, что их приближенное решение можно провести с помощью асимптотических методов.

В задачах о возмущенном движении твердого тела относительно центра масс можно найти элементы, аналогичные оскулирующим элементам в небесной механике. При этом, достаточно, чтобы условию постоянства в невозмущенном движении удовлетворяла только лишь часть элементов. Переменные, описывающие движение, должны удовлетворять следующим требованиям [28]:

1. Иметь простой механический и геометрический смысл.
2. В случае отсутствия возмущающих моментов они должны дать уравнения, достаточно просто описывающие движение Эйлера-Пуансо.
3. В случае возмущенного движения уравнения в выбранных переменных должны быть удобны для применения асимптотических методов нелинейной механики. Переменные должны делиться на медленные и быстрые, причем в невозмущенном движении медленные переменные постоянны.

Переменные, удовлетворяющие этим условиям, называются эволюционными [28]. Они могут быть выбраны неоднозначно.

Известны многочисленные способы введения эволюционных переменных при исследовании вращательного движения небесных тел: кеплеровские оскулирующие элементы, канонические элементы Якоби, Делоне, Пуанкаре, элементы Пуассона, Андуайе, Шарлье, Депри и другие [11]. Б.В. Булгаков ввел фазовые координаты, близкие набору переменных Андуайе-Депри для описания движения симметричного твердого тела [71]. В.В. Белецкий успешно использовал оскулирующие элементы, отличающиеся на аддитивные постоянные от переменных Андуайе-Депри для решения ряда задач динамики вращательного движения динамически симметричных спутников [25, 28]. Дальнейшее развитие метода оскулирующих элементов было осуществлено Ф.Л. Черноусько, который исследовал движение спутника с трехосным эллипсоидом инерции [26]. Используем систему эволюционных переменных, предложенную в работах [25, 26, 28].

Введем три правых декартовых системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника. Система координат $Ox_1x_2x_3$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты.

Ось Oy_3 системы координат $Oy_1y_2y_3$ направим по вектору кинетического момента \mathbf{G} спутника относительно центра инерции, ось Oy_1 перпендикулярна Oy_3 и лежит в плоскости Ox_3y_3 , а ось Oy_2 перпенди-

кулярна Oy_1 и Oy_3 и, следовательно, лежит в плоскости орбиты Ox_1x_2 (рис. 1). Переход от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ осуществляется двумя поворотами: на угол λ вокруг оси Ox_3 и на угол δ

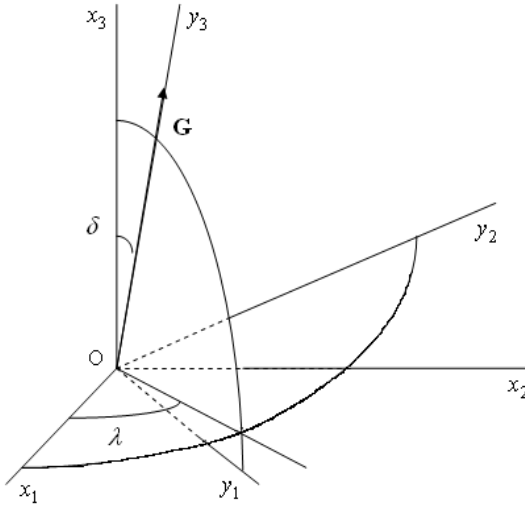


Рис. 1

вокруг оси Oy_2 . Углы λ и δ определяют ориентацию вектора \mathbf{G} в неподвижном пространстве.

Оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ совместим с главными центральными осями инерции спутника. Их ориентацию относительно системы координат $Oy_1y_2y_3$ определим углами Эйлера θ , φ , ψ (рис.2) и направляющими косинусами $\alpha_{ik} = \mathbf{y}_i \mathbf{z}_k$. Здесь \mathbf{y}_i – орты системы $Oy_1y_2y_3$, а \mathbf{z}_k – орты системы $Oz_1z_2z_3$. Соотношения между направляющими косинусами и эйлеровыми углами даются выражениями [25]

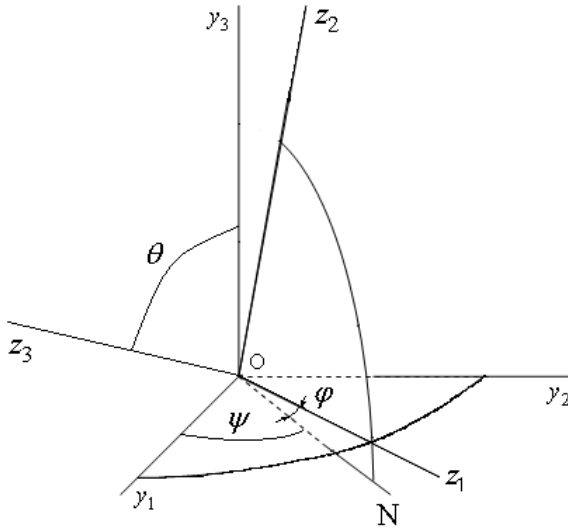


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi, \\
 \alpha_{21} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi, \quad \alpha_{31} = \sin \theta \sin \varphi, \\
 \alpha_{12} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi, \\
 \alpha_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi, \\
 \alpha_{32} &= \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_{13} = \sin \theta \sin \psi, \\
 \alpha_{23} &= -\sin \theta \cos \psi, \quad \alpha_{33} = \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1}$$

В качестве переменных, описывающих возмущенное движение выбираются шесть параметров:

$$G, \delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi \tag{1.1.2}$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения записываются относительно этих переменных: угловых параметров $\delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi$ и величины G , зависящей от угловых скоростей. Элементы (1.1.2) удобны тем, что в невозмущенном движении величины G, δ, λ постоянны, а углы θ, φ, ψ , меняясь со временем, описывают движение Эйлера-Пуансо.

§2. Уравнения возмущенного движения и их приведение к случаю систем с быстро вращающимися фазами. Постановка задачи динамики.

Составим уравнения движения спутника относительно центра инерции, взяв в качестве шести искомых функций величину кинетического момента G и углы δ , λ , θ , φ , ψ . Теорема об изменении кинетического момента в векторной форме имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{L}, \quad (1.2.1)$$

где \mathbf{L} – момент возмущающих сил относительно центра инерции спутника.

Проектируя векторное уравнение (1.2.1) на оси координатной системы $Oy_1y_2y_3$, получим

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \quad (1.2.2)$$

где L_i – проекции момента возмущающих сил относительно центра инерции на оси Oy_i .

Выведем уравнения для углов θ , φ , ψ . Вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ складывается из пяти угловых скоростей вращений, соответствующих поворотам на углы δ , λ , θ , φ , ψ . Учитывая направления этих составляющих (рис.1, 2), найдем

$$\boldsymbol{\omega} = \delta' \mathbf{y}_2 + \lambda' (\cos \delta \mathbf{y}_3 - \sin \delta \mathbf{y}_1) + \theta' (\cos \varphi \mathbf{z}_1 - \sin \varphi \mathbf{z}_2) + \psi' \mathbf{y}_3 + \varphi' \mathbf{z}_3. \quad (1.2.3)$$

Спроектируем равенство (1.2.3) на оси $Oz_1z_2z_3$ и учтем, что $\alpha_{ik} = \mathbf{y}_i \mathbf{z}_k$. Тогда проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости спутника на указанные оси равны

$$\begin{aligned} p &= \delta' \alpha_{21} + \lambda' (\alpha_{31} \cos \delta - \alpha_{11} \sin \delta) + \theta' \cos \varphi + \psi' \alpha_{31}, \\ q &= \delta' \alpha_{22} + \lambda' (\alpha_{32} \cos \delta - \alpha_{12} \sin \delta) - \theta' \cos \varphi + \psi' \alpha_{32}, \\ r &= \delta' \alpha_{33} + \lambda' (\alpha_{33} \cos \delta - \alpha_{13} \sin \delta) + \varphi' + \psi' \alpha_{33}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

С другой стороны, проектирование вектора кинетического момента \mathbf{G} на оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ дает

$$G_1 = A_1 p = G \sin \theta \sin \varphi, \quad G_2 = A_2 q = G \sin \theta \cos \varphi, \quad (1.2.5)$$

$$G_3 = A_3 r = G \cos \theta,$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Oz_1, Oz_2, Oz_3 соответственно.

Подставим в уравнения (1.2.4) p, q, r из (1.2.5), δ, λ из (1.2.2) и a_{ij} из (1.1.1) и разрешим их относительно производных эйлеровых углов θ, φ, ψ

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \dot{\varphi} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \quad (1.2.6) \\ \dot{\psi} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned}$$

Уравнения (1.2.2), (1.2.6) образуют систему уравнений возмущенного движения в форме, удобной для применения асимптотических методов. Уравнения (1.2.2) описывают изменение вектора кинетического момента, а уравнения (1.2.6) – движение спутника относительно этого вектора.

Рассмотрим спутник, моменты инерции которого произвольны $A_1 \geq A_2 \geq A_3, A_1 \leq A_2 + A_3$. Предположим, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 (другими словами приложенные моменты сил малы) и положим

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \sim \frac{A_1 \omega_0}{G} \ll 1, \quad \frac{L}{A_1 \omega^2} \sim \mu, \quad \left(\omega \sim \frac{G}{A_1} \right). \quad (1.2.7)$$

Таким образом, скорость движения спутника относительно центра масс характеризуется двумя независимыми малыми параметрами. Первый из них – отношение угловой скорости орбитального движения к угловой скорости относительного движения. Второй малый параметр равен отношению работы моментов приложенных сил за характерное время относительного движения к средней кинетической энергии относительного движения.

Предположим, что единица измерения времени и период относительного движения $2\pi/\omega$ имеют одинаковый порядок, тогда $\omega_0 \sim \varepsilon$. Для

гравитационных моментов эти малые параметры связаны соотношением $\mu = \varepsilon^2$ [26] и моменты возмущающих сил $L_i \sim \varepsilon^2$.

В общем случае параметры μ , ε могут быть связаны и по-другому, и перед анализом быстрых движений спутника под действием возмущающих моментов какого-либо конкретного вида нужно задать или оценить относительную величину малых параметров, чтобы при построении асимптотического решения ограничиться нужной точностью.

В невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$) возмущающие моменты обращаются в нуль и это движение является движением Эйлера-Пуансо. Величины G , δ , λ и кинетическая энергия T движения спутника относительно центра масс постоянны. Здесь

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{A_3} \right] \quad (1.2.8)$$

При $\varepsilon = 0$ углы Эйлера θ , φ , ψ – переменны, причем функцию $\psi = \psi(t)$ можно представить в виде $\psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ [305]. Функции $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi_1(t)$ или периодичны по t с периодом τ (период $\tau = \tau(G, T)$ – время движения вектора \mathbf{G} по замкнутой траектории), или

получают за время τ приращение 2π . Функция $\psi_2(t) = \frac{2\pi}{\tau'}(t + t_0)$

($t_0 = const$). Предположим, что $\tau' = \tau'(G, T)$ и τ несоизмеримы [75, 305, 320].

Введем две переменные (фазы) соотношениями

$$y_1 = \omega_1(t + t_1), \quad y_2 = \omega_2(t + t_2), \quad (1.2.9)$$

где t_1 , t_2 – произвольные постоянные, а

$$\omega_1(G, T) = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \omega_2(G, T) = \frac{2\pi}{\tau'}. \quad (1.2.10)$$

Тогда в движении Эйлера-Пуансо углы θ , φ , ψ будут определенными функциями этих переменных (фаз), а также величин G и T (от углов δ и λ они не зависят в силу изотропности различных направлений в пространстве при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$).

Запишем эту зависимость, используя равенство $\psi_2 = y_2$, в виде

$$\theta = \theta(G, T, y_1), \quad \varphi = \varphi(G, T, y_1), \quad \psi = \psi_1(G, T, y_1) + y_2. \quad (1.2.11)$$

При увеличении y_1 на 2π функции θ , φ , ψ_1 в (1.2.11) либо не меняются, либо получают приращения 2π .

В возмущенном движении ($\varepsilon \neq 0$) медленными переменными будут G , \mathcal{D} и λ , а быстрыми – θ , φ , ψ .

Рассматривается движение спутника относительно центра масс под действием возмущающих моментов. С точностью до величин порядка квадрата отношения линейных размеров спутника к размерам орбиты можно считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс. Центр масс движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q_0 . Зависимость истинной аномалии (полярного угла) ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} (\nu(t + Q_0) = \nu(t) + 2\pi, \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0}). \quad (1.2.12)$$

Уравнения движения (1.2.2), (1.2.6) и уравнение (1.2.12) при условиях $\omega_0 = O(\varepsilon)$, $L_i = O(\varepsilon^2)$ примут вид

$$\dot{x}' = \varepsilon^2 X(x, y, \nu), \dot{y}' = Y_0(x, y) + \varepsilon^2 Y_1(x, y, \theta), \dot{\nu}' = \varepsilon f(\nu), \quad (1.2.13)$$

где $f(\nu)$ – правая часть формулы (1.2.12).

Система (1.2.13) относится к нелинейным колебательным системам, содержащим быструю и относительно медленную фазы [309]. В [309] и в §4 главы 1 данного пособия предлагается модифицированный метод усреднения для ситуации, когда усредненные переменные не изменяются. Излагается и обосновывается процедура разделения переменных на существенно больших по малому параметру интервалах времени, на которых происходит значительная эволюция всех переменных.

Систему (1.2.13) можно упростить, сделав замену переменных по формулам (1.2.11). Вместо трех быстрых переменных θ , φ , ψ при этом вводятся две быстрые y_1 и y_2 и одна медленная T (постоянная в движении Эйлера-Пуансо). Фазы y_1 , y_2 в возмущенном движении уже не определяются формулами (1.2.9), а являются новыми искомыми функциями, но скорости их изменения в первом приближении равны ω_1 , ω_2 соответственно. Поэтому система уравнений движения запишется в виде

$$\dot{x}' = \varepsilon^2 X(x, y_1, y_2, \nu), \dot{\nu}' = \varepsilon f(\nu), \quad (1.2.14)$$

$$\dot{y}'_1 = \omega_1(x) + \varepsilon^2 Z_1(x, y_1, y_2), \dot{y}'_2 = \omega_2(x) + \varepsilon^2 Z_2(x, y_1, y_2).$$

Здесь x , X – 4-мерные вектор-функции соответствующие переменным G , T , δ , λ , а остальные функции – скалярные.

Функции X , Z_1 , Z_2 периодичны по y_1 , y_2 с периодами 2π .

Таким образом, уравнения возмущенного движения спутника приведены к системе с двумя вращающимися фазами.

Опишем схему усреднения, предложенную Ф.Л. Черноушко в [26] для изучения движения несимметричного спутника под действием гравитационного момента сил при выполнении условия (1.2.7). В этой работе показано, что усреднение периодической функции $F(\theta, \varphi, \psi)$ по t с учетом зависимости переменных $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ можно разбить на два независимых этапа: усреднение по переменной ψ и усреднение по времени t с учетом зависимости переменных $\theta(t)$, $\varphi(t)$ от t .

В самом деле, в силу несоизмеримости периодов τ и τ' ,

$$\begin{aligned} M_t \{F(\theta, \varphi, \psi)\} &= \frac{1}{\tau\tau'} \int_0^\tau \int_0^{\tau'} F\left(\theta(t), \varphi(t), \psi_1(t) + \frac{2\pi t t'}{\tau'}\right) dt' dt = (1.2.15) \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \int_0^{2\pi} F(\theta(t), \varphi(t), \psi) d\psi dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, \psi) d\psi \right\} dt = \\ &= M_1 \{M_\psi [F(\theta, \varphi, \psi)]\}. \end{aligned}$$

Здесь M_ψ означает усреднение по ψ , а M_1 – по θ и φ , связанным (1.2.8), производимое по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера-Пуансо (рис.3).

Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов.

Рассмотрим, следуя [26], случай, когда главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A_1 = J_0 + \varepsilon A_1', \quad A_2 = J_0 + \varepsilon A_2', \quad A_3 = J_0 + \varepsilon A_3', \quad (1.2.16)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Применяется развитая методика исследования систем, содержащих медленные и быстрые движения, к уравнениям относительного движения спутника (1.2.2), (1.2.6), (1.2.12).

При $\varepsilon = 0$ эти уравнения описывают движение сферически симметричного спутника. В этом случае получается, что $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ и из системы (1.2.2), (1.2.6) находим, что G , δ , λ , θ и φ постоянны, а

$$\psi = GJ_0^{-1}t + \psi_0, \quad (1.2.17)$$

т.е. спутник равномерно вращается вокруг поступательно движущейся оси кинетического момента.

При $\varepsilon \neq 0$ в системе семи уравнений (1.2.2), (1.2.6) роль медленных переменных играют G , δ , λ , θ , φ , а роль быстрых $\dot{\psi}$ и ν . Для получения решения в первом приближении достаточно просто усреднить правые части уравнений (1.2.2), (1.2.6), подставив в них ν из решения уравнения (1.2.12) и ψ из (1.2.17). При фиксированных значениях медленных переменных правые части уравнений, подлежащие усреднению, будут суммами членов вида $f_1(\psi)f_2(\nu)$, где функции f_1 , f_2 периодичны по своим аргументам с периодами 2π . Кроме того, разложение в ряд Фурье содержит гармоники не выше третьей. Поэтому разложение правых частей уравнений (1.2.2), (1.2.6) в двойной ряд Фурье (по ψ и ν), после подстановки ψ и ν как функций времени, будет суммой членов вида

$$C_{mn} \cos \left[m \left(LJ_0^{-1}t + \psi_0 \right) \right] \cos n\omega_0 t \quad (m = 0, 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, \dots)$$

и подобных им, где один или оба косинуса могут быть заменены на синусы. Пусть ни при каком натуральном n не выполняется ни одно из равенств

$$G = nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{2}nJ_0\omega_0, \quad G = \frac{1}{3}nJ_0\omega_0. \quad (1.2.18)$$

Тогда результат усреднения правых частей не зависит от начального значения ψ_0 . В этом случае усреднение по времени можно заменить независимым усреднением по ψ и по ν , как по функции t .

Если выполняется хоть одно из равенств (1.2.18), то имеют место резонансные эффекты, которые не рассматриваются.

Усреднение по времени функций, зависящих от ν сводится в силу (1.2.12), к усреднению по ν следующим образом

$$\begin{aligned}
 M_t \{F(v)\} &= \frac{1}{Q_0} \int_0^{Q_0} F(v(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{3/2} F(v) dv}{(1+e \cos v)^2} = \\
 &= (1-e^2)^{3/2} M_v \left\{ \frac{F(v)}{(1+e \cos v)^2} \right\}. \tag{1.2.19}
 \end{aligned}$$

§3. Уравнения возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Эйлера.

Эволюционные переменные можно выбрать, отличными от предложенного в §2. Заметим, что при движении свободного твердого тела сохраняется его кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} (A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) = \frac{1}{2} (\mathbf{G}, \boldsymbol{\omega}) \tag{1.3.1}$$

и модуль кинетического момента G

$$G^2 = A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 = (J\boldsymbol{\omega})^2. \tag{1.3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости, а p, q, r – его проекции на оси подвижной системы координат $Oxuz$, направленные вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O ; $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, имеющий в связанных осях диагональный вид.

Если рассматривать движение вектора кинетического момента в связанных с телом осях, то конец вектора \mathbf{G} движется вдоль линии пересечения эллипсоида и сферы, уравнения которых в осях G_1, G_2, G_3 получаются из равенств (1.3.1), (1.3.2), выраженных через компоненты вектора \mathbf{G}

$$G_1^2 A_1^{-1} + G_2^2 A_2^{-1} + G_3^2 A_3^{-1} = 2T, \tag{1.3.3}$$

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2 \tag{1.3.4}$$

Пересечение эллипсоида и сферы обеспечивается неравенствами

$$2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_3. \tag{1.3.5}$$

Не ограничивая общности, предположим, что $A_1 > A_2 > A_3$. При изучении движения вектора \mathbf{G} в связанных осях исследуют траектории его конца на единичной сфере (см. [28, 134, 306]). При этом, для описания положения вектора кинетического момента на сфере вводится положи-

тельный параметр $k^2 = k^2(T, G^2)$, $0 \leq k^2 \leq 1$. Например, в области $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$ параметр k^2 представлен в виде

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \quad (1.3.6)$$

Значение $k^2 = 0$ соответствует вращению твердого тела вокруг оси с моментом инерции OA_1 , а $k^2 = 1$ – движению по сепаратрисе (см. рис. 3). При переходе в область $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$ нужно поменять местами A_1 и A_3 в выражении для k^2 .

Здесь k имеет смысл модуля эллиптических функций движения Эйлера-Пуансо.

При наличии малых возмущений движение твердого тела описывается возмущенными динамическими уравнениями Эйлера

$$\dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \varepsilon \mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.3.7)$$

Предполагается, что возмущающий момент зависит только от угловых скоростей $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega})$, а движение рассматривается на асимптотически большом интервале времени $t - t_0 \sim \varepsilon^{-1}$.

При отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) твердое тело совершает движение Эйлера-Пуансо. В этом случае сохраняются величины T , G и k^2 , а угловые скорости вращения тела выражаются через эллиптические функции [75, 305, 320]. Так в области $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$ решение выражается через эллиптические функции Якоби [75, 305, 320]

$$p = \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn} \tau, \quad q = \pm \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \operatorname{sn} \tau, \quad (1.3.8)$$

$$r = \mp \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn} \tau, \quad \tau = \sqrt{\frac{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}{A_1 A_2 A_3}} t.$$

Здесь dn – дельта амплитуды, sn и cn – эллиптический синус и косинус соответственно, по модулю k , введенному согласно (1.3.6).

В области $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$ во всех формулах (1.3.8), а кроме того в (1.3.6) нужно поменять местами A_1 и A_3 .

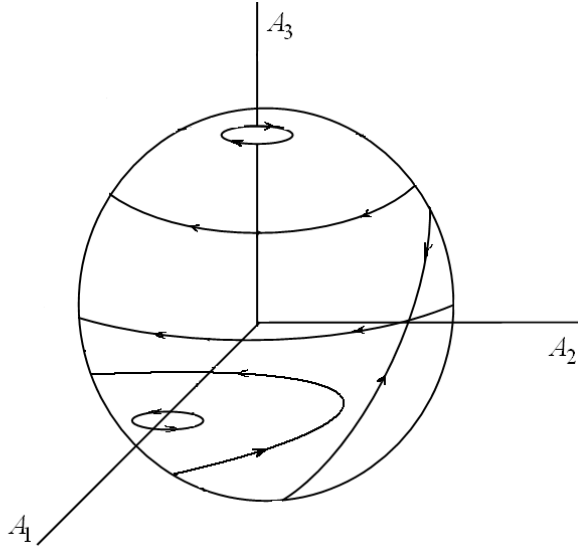


Рис. 3

Для изучения эволюции движения твердого тела методом усреднения естественно перейти от переменных p, q, r к эволюционным переменным G^2, T, η или G^2, k^2, η , где G^2, T, k^2 являются медленными переменными, а фаза η – быстрая переменная [134]. Уравнения для медленных переменных имеют вид:

$$\left(\mathbf{G}^2\right)^{\cdot} = 2\varepsilon(\mathbf{G}, \mathbf{L}), \dot{T} = \varepsilon(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}), G^2(t_0) = G_0^2, T(t_0) = T_0, \quad (1.3.9)$$

$$\left(k^2\right)^{\cdot} = \varepsilon\left(\left[2 \frac{\partial k^2}{\partial G^2} \mathbf{J} + \frac{\partial k^2}{\partial T}\right] \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}\right), k^2(t_0) = k_0^2.$$

Уравнение для фазы

$$\eta^{\cdot} = 2\pi/\tau + O(\varepsilon). \quad (1.3.10)$$

Здесь τ – период изменения угловых скоростей движения Эйлера-Пуансо по времени движения. Конкретный вид выражения $O(\varepsilon)$ не приводится из-за громоздкости и из-за того, что оно не используется в построении решения первого приближения. Правые части уравнений для медленных переменных периодичны по η с периодом 2π .

Поскольку G^2 , T , k^2 являются медленно меняющимися функциями времени, то в первом приближении в правые части уравнений (1.3.9) вместо p , q , r можно подставить их значения (1.3.8) из невозмущенного движения Эйлера-Пуансо. Усредняя затем по быстрой фазе η и, считая при этом медленные переменные постоянными, получим в общем виде

$$\begin{aligned} (\bar{G}^2)' &= 2\varepsilon M_\eta \{(\mathbf{G}_0, \mathbf{L}_0)\}, \quad \bar{T}' = \varepsilon M_\eta \{(\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{L}_0)\}, \\ \bar{G}_0^2 &= G_0^2, \quad \bar{T}_0 = T_0, \\ (\bar{k}^2)' &= \varepsilon M_\eta \left\{ \left[\left[2 \frac{\partial k^2}{\partial \bar{G}^2} \mathbf{J} + \frac{\partial k^2}{\partial \bar{T}} \right] \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{L}_0 \right] \right\}, \quad \bar{k}_0^2 = k_0^2 \text{ при } t = t_0. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Конкретный вид правых частей уравнений (1.3.7) зависит от вида возмущающего момента $\varepsilon \mathbf{L}$. Черточками сверху обозначены соответствующие усредненные переменные. Усреднение по η проводится по схеме

$$M_\eta \{F_0\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(p_0(\eta), q_0(\eta), r_0(\eta)) d\eta. \quad (1.3.12)$$

Усреднение по η можно заменить усреднением по μ

$$M_\mu \{F_0\} \equiv \frac{1}{4K(k)} \int_0^{2\pi} F(p_0(\eta), q_0(\eta), r_0(\eta)) \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \mu}}. \quad (1.3.13)$$

Здесь $\mu = \text{am} \left(\frac{4K}{2\pi} \eta, \bar{k} \right)$, $K(\bar{k})$ – полный эллиптический интеграл первого рода [307, 308].

Уравнения возмущенного движения спутника (1.2.2), (1.2.6) носят общий характер. Однако часто встречаются задачи, в которых моменты действующих сил обладают силовой функцией

$$U = U(\lambda, \delta, \theta, \varphi, \psi, t).$$

Здесь λ , δ – углы, определяющие ориентацию вектора кинетического момента \mathbf{G} в неподвижном пространстве (см. рис. 1); θ , φ , ψ – углы Эйлера.

Тогда уравнений (1.2.2), (1.2.6) преобразуются к виду [25, 28]

$$\lambda' = (G \sin \delta)^{-1} \partial U / \partial \delta, \quad \delta' = -(G \sin \delta)^{-1} \partial U / \partial \lambda + G^{-1} \text{ctg} \delta \partial U / \partial \psi,$$

$$\begin{aligned}
G &= \partial U / \partial \psi, \\
\theta &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}) - (G \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \varphi + \\
&+ G^{-1} \operatorname{ctg} \theta \partial U / \partial \psi, \\
\varphi &= G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) + (G \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \theta, \\
\psi &= G (A_1^{-1} \sin^2 \varphi + A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - G^{-1} (\partial U / \partial \delta \operatorname{ctg} \delta + \partial U / \partial \theta \operatorname{ctg} \theta).
\end{aligned}$$

Схемы усреднения для исследования движения быстро вращающегося симметричного и трехосного спутника для возмущений, имеющих силовую функцию, предложены В.В. Белецким в [25, 28].

В случае быстро вращающегося спутника с трехосным эллипсоидом инерции имеются три быстрые частоты: орбитальная ω_0 , прецессии ω_ψ и частота периодического движения по полюдиям ω_θ . Силовую функцию U поэтому нужно усреднять трижды по $\nu(t)$, по ψ и вдоль полюдии невозмущенного движения. Отметим только, что вблизи сепаратрисы (рис. 3) вектор \mathbf{G} движется медленно и поэтому усреднять движение вдоль полюдии можно везде, кроме некоторой окрестности сепаратрисы.

§4. Схема усреднения высших степеней в системах с быстрыми и медленными фазами.

В нелинейных колебательных системах часто возникают ситуации, когда эволюция оскулирующих переменных происходит с различными средними скоростями по отношению к степеням некоторого естественного малого параметра. Такими механическими системами описывается ряд задач теории колебаний механических систем (осцилляторов и маятников), динамики твердых тел и гироскопов, орбитальных движений и вращений естественных и искусственных небесных тел. В теоретическом и прикладном аспектах представляет значительный интерес исследование эволюции системы на достаточно большом промежутке времени, приводящем к существенному изменению оскулирующих переменных, в том числе самых медленных.

Оказывается, что для многих важных случаев можно применить и обосновать модифицированную схему метода усреднения Крылова-Боголюбова и разделения движений (замены переменных [16, 17, 223]) на относительно больших интервалах времени [309].

Рассматривается стандартная по Н.Н. Боголюбову система [16, 17] для двух векторов x, y произвольных размерностей, причем предполагаются выполненными следующие требования относительно средних по t :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(t, x, y), \quad x(0) = x^0, \quad X_0(x, y) = M_t \{X\} \equiv 0; \\ \dot{y} &= \varepsilon Y(t, x, y), \quad y(0) = y^0, \quad Y_0(x, y) = M_t \{Y\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Функции X, Y считаются кусочно-непрерывными и 2π -периодическими по t и достаточно гладкими по $(x, y) \in D_x \times D_y$, где $D_{x,y}$ — замкнутые ограниченные множества. Здесь M_t означает усреднение по аргументу (быстрой фазе) t . В первом приближении по ε средняя скорость изменения x равна нулю, т.е. $|x - x^0| = O(\varepsilon)$, а y — порядка $O(\varepsilon)$, т.е. $|y - y^0| = O(1)$, $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для приложений представляет интерес существование эволюции при $t \sim \varepsilon^{-2}$ относительно более медленной переменной x , характеризующей основные параметры колебательной системы (энергию, амплитуду). Более быстрая переменная y обычно обусловлена эволюцией фазы или угловой переменной и может значительно влиять на изменение вектора x .

В общем случае системы вида (1.4.1) применение и обоснование стандартной процедуры метода усреднения на интервале $t \sim \varepsilon^{-2}$ затруднительно. Поэтому рассматривается часто встречающаяся в задачах ситуация, когда усредненная система для y при постоянном $x = \xi$ допускает полное семейство одночастотных вращательно-колебательных движений [16, 17, 223]:

$$x = \xi \in D_x, \quad y = \eta_0(\varphi, \zeta, \xi) \in D_y, \quad \dot{\varphi} = \omega(\zeta, \xi)\tau + \varphi^0, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (1.4.2)$$

Здесь φ — медленная фаза ($\varphi \sim \varepsilon$); суммарная размерность постоянных векторов $\xi, \varphi^0 \pmod{2\pi}$ совпадает с размерностью y .

Заменой $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, близкой к тождественной, система (1.4.1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon^2 \Xi(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \xi(0) = x^0, \quad \xi \in D_x; \\ \dot{\eta} &= \varepsilon Y_0(\xi, \eta) + \varepsilon^2 H(t, \xi, \eta, \varepsilon), \quad \eta(0) = y^0, \quad \eta \in D_y; \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

$$x = \xi + \varepsilon \int_0^t X(s, \xi, \eta) ds, \quad y = \eta + \varepsilon \int_0^t [Y(s, \xi, \eta) - Y_0(\xi, \eta)] ds.$$

Функции Ξ , H удовлетворяют требуемым условиям гладкости и периодичности. Отбрасывание слагаемых $O(\varepsilon^2)$ в (1.4.3) приводит к выражениям (1.4.2) для ξ , η . Замена $y = \eta \rightarrow (\zeta, \varphi)$ согласно (1.4.2) с учетом величин $O(\varepsilon^2)$ и тождества для η_0 приводит к системе с быстрой t и медленной φ фазами вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon^2 A(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \alpha(0) = \alpha^0, \quad \alpha = (\xi^T, \zeta^T)^T, \\ \dot{\varphi} &= \varepsilon \omega(\alpha) + \varepsilon^2 \Phi(t, \alpha, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi(0) = \varphi^0 \pmod{2\pi}; \\ A &= (\Xi^T, Z^T)^T, \quad (\Phi, Z^T)^T = \left\| \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} \right\|^{-1} \left(H - \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \Xi \right); \quad (1.4.4) \\ \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \right) \omega(\xi, \zeta) &\equiv Y_0(\xi, \eta_0), \quad \alpha \in D_\alpha, \quad |\varphi| < \infty. \end{aligned}$$

Функции A , ω , Φ достаточно гладкие по α , φ , ε , кусочно-непрерывные по t и 2π -периодические по t и φ . Начальные значения α^0 , φ^0 определяются заменой $y \rightarrow (\zeta, \varphi)$ (1.4.2). Система (1.4.4) подлежит дальнейшему исследованию на интервале $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon^2}$, на котором медленная переменная α может получить, вообще говоря, приращение $\delta\alpha \sim 1$. При этом с заданной степенью точности по ε производится отделение быстрой фазы – аргумента t , а относительно медленные фаза φ и переменная α связаны. «Усредненная» система допускает введение аргумента $\tau = \varepsilon t$, $0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}$ и далее может быть подвергнута стандартному асимптотическому анализу [12, 16, 17, 26, 223, 310]. В случае скалярной фазы φ применяется процедура усреднения [16, 17], разработанная для систем с быстро вращающейся фазой. Как и в классическом методе Крылова-Боголюбова, предлагаемая схема высших степеней исходит из требований, чтобы асимптотические разложения не содержали сингулярных

слагаемых типа $(\varepsilon^2 t)^k$ на расширенном интервале $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon^2}$. Частная ситуация, когда y отсутствует, исследована ранее [311].

При отделении быстрой фазы t используется замена $(\alpha, \varphi) \rightarrow (\beta, \psi)$ такая, что уравнения не содержат t с требуемой степенью точности по ε :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \varepsilon^2 \Pi(t, \beta, \psi, \varepsilon), \quad \varphi = \psi + \varepsilon^2 \Gamma(t, \beta, \psi, \varepsilon), \\ \dot{\beta} &= \varepsilon^2 \mathbf{B}(\beta, \psi, \varepsilon), \quad \dot{\psi} = \varepsilon \omega(\beta) + \varepsilon^2 \Psi(\beta, \psi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Неизвестные 2π -периодические по t , ψ функции замены Π , Γ и не содержащие t (усредненные) функции \mathbf{B} , Ψ в правых частях системы (1.4.5) могут быть определены приближенно асимптотическими разложениями или последовательными приближениями по степеням ε решений уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} (I + \varepsilon^2 \Pi'_\beta) \mathbf{B} + \Pi'_\psi (\varepsilon \omega + \varepsilon^2 \Psi) &= \mathbf{A}(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \Pi'_t, \\ \varepsilon^3 \Gamma'_\beta \mathbf{B} + (1 + \varepsilon^2 \Gamma'_\psi) (\omega(\beta) + \varepsilon \psi) &= \omega(\beta + \varepsilon^2 \Pi) + \\ &+ \varepsilon \Phi(t, \beta + \varepsilon^2 \Pi, \psi + \varepsilon^2 \Gamma, \varepsilon) - \varepsilon \Gamma'_t. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

В частности, первые коэффициенты разложений, определяющие существенную эволюцию переменных, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= M_t \{ \mathbf{A}(t, \beta, \psi, 0) \}, \quad \Pi_0(t, \beta, \psi) = \int_0^t ((\mathbf{A}) - M_t \{ (\mathbf{A}) \}) ds, \\ \psi_0 &= M_t \{ \Phi(t, \beta, \psi, 0) \}, \quad \Gamma_0(t, \beta, \psi) = \int_0^t ((\Phi) - M_t \{ (\Phi) \}) ds; \\ \mathbf{B}_1 &= M_t \{ (\mathbf{A}'_\varepsilon) \} - \omega(\beta) M_t \{ \Pi'_{0\varphi} \}, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Здесь M_t означает усреднение по явно входящему аргументу t , а выражения типа (\mathbf{A}) , (Φ) отвечают значениям $\alpha = \beta$, $\varphi = \psi$, $\varepsilon = 0$. Последующие коэффициенты \mathbf{B}_j , Π_{j-1} , Ψ_{j-1} , Γ_{j-1} , $j \geq 2$, вычисляются рекуррентно. По аналогии с классической схемой усреднения при построении j_* -го приближения на интервале $t \sim \varepsilon^{-2}$ требуется определять функции вплоть до \mathbf{B}_{j_*-1} , Π_{j_*-2} , Ψ_{j_*-2} , Γ_{j_*-3} . В частности, задача Коши первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \varepsilon^2 A_0(\beta, \psi), \quad \beta(0) = \alpha^0; \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \omega(\beta), \quad \psi(0) = \varphi^0; \quad 0 \leq t \leq L\varepsilon^{-2}.\end{aligned}\quad (1.4.8)$$

Система (1.4.8) подлежит дальнейшему аналитическому или численному исследованию. Она существенно проще, чем исходная система (1.4.4), допускает введение медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и запись в стандартной форме «с быстрой фазой» ψ [12, 16, 17, 223, 310]. Если функция $\omega(\beta)$ отделена от нуля, то фаза ψ является вращающейся, и в первом приближении к системе применим метод усреднения по переменной ψ на интервале времени $0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}$, т.е. $t \sim \varepsilon^{-2}$.

Рассмотрим примеры колебательных систем, исследуемых с помощью схемы усреднения второй степени.

Пример 1. Для иллюстрации рассмотрим сперва двумерную систему

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, y) \sin(t + \theta(x, y)), \quad \dot{y} = \varepsilon \gamma(x, y) \quad (1.4.9)$$

с соответствующими начальными данными. Функции f , θ , γ считаются гладкими по x , y и 2π -периодическими по y . Согласно (1.4.3) преобразуем переменную x , т.е. $(x, y) \rightarrow (\alpha, y)$; в итоге усреднения по t имеют место уравнения первого приближения в медленном времени $\tau = \varepsilon t$:

$$\dot{\beta} = -\varepsilon \left(\frac{1}{2} f^2 \theta'_y + \gamma(f \cos \theta)_y \right), \quad \dot{y} = \gamma(\beta, y), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}. \quad (1.4.10)$$

Медленная переменная y не преобразована к виду фазы, поскольку система (1.4.10) может быть исследована непосредственно. Если среднее по y функции γ отлично от нуля для рассматриваемых значений β ($\beta = x + O(\varepsilon)$), то переход к фазе φ , а затем к ψ согласно (1.4.3) – (1.4.5) проводится стандартным образом [16, 17, 223, 312]. В частности, если функция γ отделена от нуля, то от аргумента τ удобнее перейти к

y , т.е. исследовать уравнение для $\frac{d\beta}{dy}$. Оно может быть усреднено по y ,

что приведет к обнулению второго слагаемого в правой части. После усреднения система (1.4.10) полностью интегрируется, поскольку оба уравнения допускают разделение переменных. Эволюция переменной β

(и x) будет определяться средним значением по y функции $-\frac{f^2\theta'_\beta}{2\gamma}$ и в общем случае составит величину $O(1)$ для $y \sim \varepsilon^{-1}$, т.е. $t \sim \varepsilon^{-2}$. Стандартная процедура [16, 17, 223] на интервале $t \sim \varepsilon^{-1}$ приводит к выражению $x = x^0 + O(\varepsilon)$.

Пример 2. При исследовании многочастотных квазилинейных систем в окрестности резонанса часто возникает ситуация, когда одна из частот имеет относительно большую расстройку (обычно $\sqrt{\varepsilon}$), чем другие. При соответствующих предположениях получается система вида (1.4.4), в которой $\sqrt{\varepsilon}\omega = \text{const}$ – указанная расстройка (далее для удобства вместо ε берется параметр ε^2). В качестве примера рассматривается система $\ddot{q} + Q(q) = P(t) - \Lambda \dot{q}$, $q = \varepsilon r$, $Q(0) = 0$, $Q'(0) = v > 0$, (1.4.11)
 $\chi = -\frac{1}{2}Q''(0)$, $\mu = -\frac{1}{6}Q'''(0)$, $P = \varepsilon^2 h \sin 2t + \varepsilon^3 f \sin(t + \kappa)$,
 $v = 1 + \varepsilon\gamma$, $\Lambda = \varepsilon^2 \lambda$.

Отбрасыванием в (1.4.11) членов $O(\varepsilon^4)$ и делением на ε получается квазилинейное уравнение для r , приводимое стандартными преобразованиями $r = x \cos(t + y)$, $\dot{r} = -x \sin(t + y)$ к переменным амплитуда - фазовая расстройка (x, y) . Преобразуя последовательно переменные (x, y) согласно (1.4.3) – (1.4.5), получим усредненную систему первого приближения в медленном времени $\tau = \varepsilon t$:

$$\dot{\beta} = \varepsilon \left(\gamma^2 \beta \sin 2\psi - \frac{1}{4} \gamma^2 \beta - \frac{1}{2} f \cos(\psi - \kappa) - \frac{1}{2} \lambda \beta + \right. \\ \left. + \cos \psi \left(\frac{2}{3} h \gamma - \frac{1}{2} \chi \gamma \beta^2 \sin 2\psi \right) \right), \quad \dot{\psi} = \gamma,$$

$$\beta = x + O(\varepsilon) = x^0 \exp \left[-\frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{1}{2} \gamma^2 + \lambda \right) \tau \right], \quad 0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Частотная расстройка $\varepsilon\gamma$ (1.4.11) приводит к дополнительному экспоненциальному затуханию при $t \sim \varepsilon^{-2}$. Стандартный подход дает $x = x^0 + O(\varepsilon)$ для $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется возмущенным движением?
2. Какие характеристики орбиты называются оскулирующими элементами?
3. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента в векторной форме.
4. Какие углы определяют ориентацию вектора кинетического момента \mathbf{G} в неподвижном пространстве?
5. Какое движение относительно центра масс будет невозмущенным в случае движения спутника под действием гравитационного момента?
6. Опишите два этапа усреднения возмущенного движения несимметричного спутника под действием гравитационного момента сил.
7. Какое соотношение между моментами инерции твердого тела принимается при решении задачи?
8. Какие переменные можно выбрать в качестве эволюционных переменных при исследовании возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Эйлера?
9. Проведите численное интегрирование уравнения изменения истинной аномалии при различных начальных значениях величины ν и для орбит с разным эксцентриситетом e с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.
10. Постройте графики изменения функции $\nu = \nu(t)$ с помощью библиотеки `ZedGraph.dll` и проведите анализ полученных результатов.

Глава 2.

Эволюция вращений твердого тела в среде с линейной диссипацией

§1. Вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде.

Результаты §1 этой главы были впервые опубликованы в работах авторов пособия [276, 277], § 2 – в статье [287], §3 – в статьях [278, 279].

1. Постановка задачи и процедура усреднения.

Схема асимптотического решения, предложенная в главе 1, применима не только к задачам движения искусственного спутника относительно центра масс, но и к задачам быстрого движения твердого тела относительно неподвижной точки.

Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Быстрыми движениями будем называть такие, для которых момент приложенных сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращений.

Будем использовать те же обозначения и системы координат, что и в §1 главы 1 и на рис. 1, 2, с той только разницей, что начало всех систем координат O берется в неподвижной точке твердого тела. Ось Ox_3 неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ направим вертикально вверх.

Соотношения между направляющими косинусами и углами Эйлера представлены формулами (1.1.1).

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки запишем в форме [26] (см. также (1.2.2), (1.2.6)):

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \quad (2.1.1) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i ($i=1,2,3$), G – величина кинетического момента, A_1, A_2, A_3 – главные моменты инерции тела относительно осей системы координат $Oz_1z_2z_3$, связанной с главными осями инерции тела.

Проектирование вектора \mathbf{G} на оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ представлено формулами (1.2.5).

Иногда удобно наряду с введенными переменными использовать в качестве переменной важную характеристику – кинетическую энергию T (см. (1.2.8)), производная по времени которой имеет вид

$$T' = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \quad (2.1.2)$$

Предполагаем, что на тело действуют силы тяжести и сопротивления среды. Положение центра масс определим его координатами (l_1, l_2, l_3) в связанной системе координат $Oz_1z_2z_3$, а также радиусом-вектором \mathbf{r}_0 из неподвижной точки O . Момент силы тяжести равен [58]

$$\mathbf{L}^{(1)} = mg \mathbf{x}_3 \times \mathbf{r}_0, \quad (2.1.3)$$

где m – масса тела, g – величина ускорения силы тяжести, \mathbf{x}_3 – единичный вектор, направленный вдоль оси Ox_3 .

Зависимость диссипативного момента сил сопротивления от вектора угловой скорости вращения твердого тела $\boldsymbol{\omega}$ принимается линейной. Следуя [25], запишем в связанной системе координат $Oz_1z_2z_3$ выражения для компонент момента сил вязкого трения

$$\mathbf{L}^{(2)} = - \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Здесь I_{ij} – постоянные коэффициенты момента сил сопротивления вращению тела. В выражении (2.1.4) матрица диссипации считается поло-

жительно определенной и зависящей от формы тела и свойств среды. Полный момент приложенных сил равен $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}$.

Спроектируем (2.1.3), (2.1.4) на оси системы координат $oy_1y_2y_3$, пользуясь направляющими косинусами α_{ij} (1.1.1)

$$\begin{aligned}
 L_1 &= -mg \cos \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{1i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{1i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{1i} \right), \\
 L_2 &= mg \sum_{j=1}^3 l_j (\alpha_{3j} \sin \delta + \alpha_{1j} \cos \delta) - \\
 &\quad - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{2i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{2i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{2i} \right), \\
 L_3 &= -mg \sin \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{3i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{3i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{3i} \right).
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Так как изучается быстрое движение то предполагается малым отношение $\frac{mgl}{T_0} \sim \varepsilon \ll 1$, где l – расстояние от центра масс до неподвижной точки. Сопротивление среды предполагается слабым того же порядка малости: $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления. Для величин G , T можно взять некоторые, например, начальные значения G_0 , T_0 .

Исследуем решение системы (2.1.1), (2.1.2) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применим метод усреднения [16 – 18]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов.

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера-Пуансо. Величины G , δ , λ , T обращаются в постоянные, а θ , φ , ψ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G , T , δ , λ , а быстрыми – углы Эйлера θ , φ , ψ .

Усреднение проводится по движению Эйлера-Пуансо для нерезонансных случаев. Так как частоты движения Эйлера-Пуансо $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau(G, T)}$

и $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau'(G, T)}$ зависят от G, T , то условие их несоизмеримости может

нарушаться (резонансные явления). Исследование резонансов требует дополнительного рассмотрения. Однако, так как система «не застревает» на резонансе (ниже показано, что переменные G и T , от которых зависят частоты ω_1, ω_2 , монотонно убывают), то после перехода через него движение тела снова описывается уравнениями для нерезонансного случая. Точность в определении медленных переменных при этом составит на интервале $\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$ величину $O(\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)$ [12, 319], которая стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Примем для определенности $A_1 > A_2 > A_3$ и рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 . Введем величину k^2 согласно (1.3.6), представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих движение Эйлера-Пуансо. В возмущенном движении k^2 будет медленной переменной, качественно характеризующей вращение твердого тела.

Для построения системы усредненных уравнений первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера-Пуансо (1.3.8) в правые части уравнений (2.1.1), (2.1.2) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости θ, φ от t . Подобная схема усреднения была использована при исследовании движения тела с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс в [26, 276 – 278, 287]. Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате, используя формулы для интегралов от эллиптических функций [308], получим

$$\lambda = \frac{\pi m g l_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A_1(G^2 - 2TA_3)}{A_1 - A_3}}, \quad \delta = 0,$$

$$G = -\frac{G}{R(k)} \left\{ I_{22} (A_1 - A_3) W(k) + I_{33} (A_1 - A_2) [k^2 - W(k)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \Big\}, \\
T = & - \frac{2T}{R(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\
& + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left. \left\{ \frac{I_{33}}{A_3} [k^2 - W(k)] + \right. \right. \quad (2.1.6) \\
& \left. \left. + \frac{I_{22}}{A_2} (1 - k^2)W(k) \right\} + \frac{I_{11}}{A_1} \frac{(A_2 - A_3)R(k)}{S(k)} [1 - W(k)] \right\}, \\
R(k) = & A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \\
W(k) = & 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \quad S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2.
\end{aligned}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

После ряда преобразований, дифференцируя выражение для k^2 (1.3.6) и используя уравнения для G и T (2.1.6), получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{dk^2}{d\xi} = & (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\
\chi = & (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2) / [(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2], \quad (2.1.7) \\
\xi = & (t - t_*) / N, \quad N = A_1A_3 / (I_{33}A_1 - I_{11}A_3).
\end{aligned}$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера-Пуансо. Если для некоторого решения уравнения (2.1.7) равенство $k^2 = 1$ достигается, то выберем t_* так, чтобы $k^2 = 1$ при $\xi = 0$, $t = t_*$. Отметим, что в зависимости от соотношений между величинами I_{11} , I_{33} , A_1 , A_3 параметр N может принимать положительные и отрицательные значения.

Из уравнений (2.1.6) следует, что наличие сопротивления среды приводит к эволюции как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение T и G оказывает влияние только сила сопротивления среды, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения, введенной в (2.1.4). Члены, содержащие

недиагональные компоненты $I_{ij} (i \neq j)$, выпадают при усреднении. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали λ зависит как от действия силы тяжести, так и от силы сопротивления среды. Отметим, что действие этих сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Уравнение (2.1.7) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Третье уравнение (2.1.6) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [308]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ при $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Уравнения (2.1.6), (2.1.7) для G , T , k^2 допускают интегрирование в квадратурах. Запишем их в виде

$$\dot{G} = -Gf_G(k^2), \quad \dot{T} = -Tf_T(k^2), \quad (\dot{k}^2) = f_k(k^2), \quad (2.1.8)$$

где f_G , f_T и f_k – функции, определенные в (2.1.6), (2.1.7). Отсюда находим

$$G(k^2) = G_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_G(n) dn \right], \quad T(k^2) = T_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_T(n) dn \right],$$

$$F_{G,T}(k^2) = \frac{f_{G,T}(k^2)}{f_k(k^2)}, \quad \int_{k_0^2}^{k^2} \frac{dn}{f_k(n)} = t - t_0. \quad (2.1.9)$$

Оценивая функцию f_G из (2.1.8), находим, что справедливо дифференциальное неравенство

$$-f_{G^-} \leq \frac{\dot{G}}{G} \leq -f_{G^+}, \quad k^2 \in [0, 1], \quad (2.1.10)$$

где f_{G^-} , f_{G^+} – положительные постоянные. Следовательно, интегрируя (2.1.9), получим оценку для G

$$G_0 \exp(-f_{G^-} t) \leq G \leq G_0 \exp(-f_{G^+} t). \quad (2.1.11)$$

Аналогичные неравенства справедливы для T , они получаются заменой G на T .

2. Исследование уравнения для k^2 .

Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (2.1.7). Интересно, что (2.1.7) совпадает с уравнением, полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [134, 135]. Отметим, что в уравнение (2.1.7) не входит ускорение силы тяжести. На эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния сопротивления и тяжести. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G , T входят в правую часть выражения для λ . Заметим, что в [58] исследовано влияние малого возмущающего момента силы тяжести на движение твердого тела (сопротивление отсутствует), в этом случае G , T сохраняются постоянными.

Нетрудно проверить, что χ из (2.1.7) можно представить в виде

$$\chi = \frac{A_3 \chi_1 - A_1 \chi_2}{A_3 \chi_1 + A_1 \chi_2}, \quad \chi_1 = I_{22} A_1 - I_{11} A_2, \quad \chi_2 = I_{33} A_2 - I_{22} A_3.$$

Так как величины χ_1 , χ_2 могут принимать любые значения, то в зависимости от параметров задачи величина χ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. В работах [134, 135] выполнялись неравенства $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$ и, следовательно, $|\chi| \leq 1$. В статье [138] рассматривалось уравнение вида (2.1.7) для твердого тела с полостью произвольной формы, заполненной сильно вязкой жидкостью, где параметр χ изменялся в пределах $|\chi| \leq 3$. В указанных работах проведено численное интегрирование уравнения (2.1.7) при начальном условии $k^2(0)$ близком к 1.

Показано, что функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше χ .

Уравнение вида (2.1.7) получено также в [59] при исследовании влияния вихревых токов на вращение и ориентацию спутника с трехосным эллипсоидом инерции и в [316] при рассмотрении движения около центра

масс быстро вращающегося твердого тела под действием сил, возникающих при движении проводника в однородном магнитном поле.

Далее исследуется семейство решений уравнения (2.1.7), соответствующее различным $\chi \in (-\infty, +\infty)$. Заметим, что для $\chi < -3$ появляются новые качественные эффекты, а при $\chi > 3$ характер решения тот же, что и при $|\chi| \leq 3$. Действительно, как видно из графиков функций $k^2(\chi, \xi)$, приведенных на рис. 4 для $\chi = -3, 0, 1, 3, 5, 8$, большим χ соответствуют более быстро убывающие функции аргумента ξ .

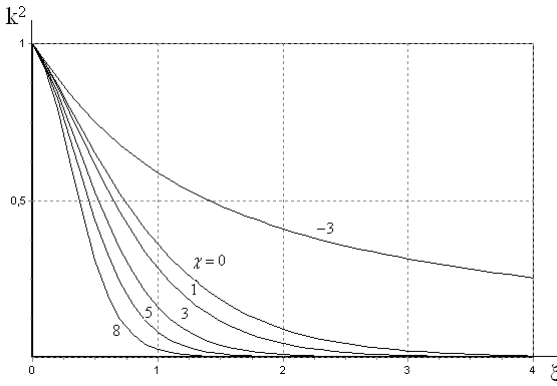


Рис. 4

При $\chi < -3$ уравнение (2.1.7) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$ т.е. независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (2.1.7) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий. Отметим, что при $\chi > -3$ таких стационарных точек (кроме $k = 0$, $k = 1$) не существует.

Определим квазистационарные решения $k^2 = k_*^2$, для чего приравняем правую часть (2.1.7) нулю. Полученное уравнение разрешим относительно χ

$$\chi = \frac{k^2 - 1 + (1 + k^2)E(k) / K(k)}{(1 - k^2)[E(k) / K(k) - 1]}. \quad (2.1.12)$$

График зависимости χ от k^2 , определенный численно, изображен кривой 1 на рис. 5, из которой следует, что при любом $\chi < -3$ суще-

ствует единственное значение $k_*^2 \in (0,1)$, отвечающее квазистационарному движению $k^2 = k_*^2 = \text{const}$. Был проведен численный анализ уравнения (2.1.7) при $\chi < -3$. Для заданных значений $k_*^2 \in (0,1)$, отвечающих квазистационарному движению, соответствующие значения χ определялись по формуле (2.1.12). На рис. 6 изображены типичные графики функций $k^2(\chi, \xi)$, полученные в результате численного интегрирования уравнения (2.1.7). Здесь сплошная кривая получена при $k_*^2 = 0.8$, а кривая с маркерами при $k_*^2 = 0.2$. Каждый график содержит три ветви. В качестве начального условия для верхних ветвей выбиралось $k^2(0) = 1 - t$ ($t \ll 1$). Две нижние ветви на каждом графике были построены при начальных условиях $k^2(0) = 0.5k_*^2$. При этом возрастающая ветвь отвечает интегрированию для $\xi > 0$, а убывающая ветвь является зеркальным отражением относительно прямой $\xi = 0$ зависимости $k^2(\chi, \xi)$, полученной при $\xi < 0$

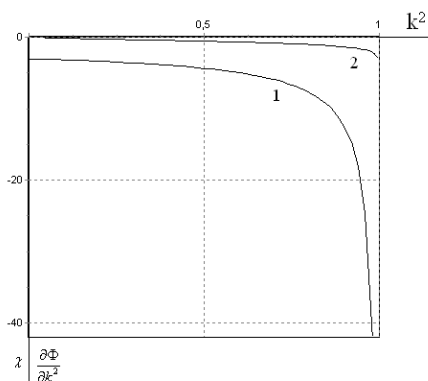


Рис. 5

Изображенные кривые позволяют для указанных значений параметров исследовать уравнение (2.1.7) и построить решение при любом начальном условии. Действительно, ввиду автономности уравнения (2.1.7)

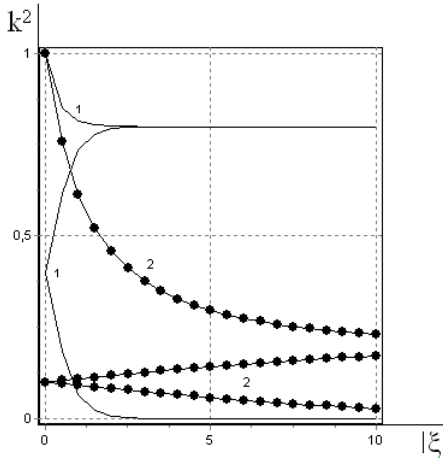


Рис. 6

для k^2 решение $k^2(\chi, \xi)$ при любых начальных условиях определяется сдвигом начала отсчета по оси ξ . Поэтому при любом начальном значении $k^2 = k_0^2$ можно, выбрав соответствующую ветвь графиков, описать дальнейшее изменение k^2 этой ветвью. Если $k_0^2 > k_*^2$, то берется верхняя ветвь, если $0.5k_*^2 \leq k_0^2 < k_*^2$ – средняя.

Если же $k_0^2 < 0.5k_*^2$, то берется нижняя ветвь, движение по которой происходит с ростом ξ в отрицательную сторону до $k^2 = 0.5k_*^2$, после чего переходим на среднюю ветвь. При $k_0^2 = k_*^2$ имеем стационарное решение.

3. Качественное исследование частных случаев движения твердого тела.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения. При $I_{33}A_1 = I_{11}A_3$ в соотношениях (2.1.7) имеем $|N|, |\chi| \rightarrow \infty$. После раскрытия неопределенности вместо уравнения (2.1.7) получим

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{2}{A_1A_2} (I_{11}A_3 - I_{22}A_1) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right]. \quad (2.1.13)$$

Следовательно, при $I_{11}A_3 > I_{22}A_1$ переменная k^2 возрастает и стремится к единице, при $I_{11}A_3 < I_{22}A_1$ величина k^2 убывает и стремится к нулю, т.е. движение стремится к вращению вокруг оси Oz_1 , соответствующей максимальному моменту инерции A_1 (см. рис.3).

Из (2.1.7) следует, что решение $k^2 = 0$ удовлетворяет уравнению. Такое квазистационарное движение отвечает замедленному вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Из уравнений (2.1.6) для переменных G и T при $k^2 = 0$ получаются выражения

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{11}}{A_1} t\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{11}}{A_1} t\right).$$

Формально полагая $k^2 = 1$, что соответствует движению по сепаратрисе случая Эйлера-Пуансо, имеем

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{22}}{A_2} t\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{22}}{A_2} t\right).$$

Таким образом, в частных случаях вращения твердого тела вокруг оси Oz_1 и движения по сепаратрисе наличие силы сопротивления среды приводит к тому, что величина кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены в области $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$. При этом значение $k^2 = 0$ отвечает вращению вокруг оси Oz_3 , соответствующей минимальному моменту инерции A_3 (см. рис. 3).

При малых k^2 , отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 , правую часть уравнения (2.1.7) можно упростить используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [308]. В этом случае (2.1.7) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2}\right] = C_2 \exp\left[-\frac{A_3\chi_1 + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{A_1A_2A_3} t\right], \quad (2.1.14)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянные.

В случаях малых k^2 аналитическое выражение для величины кинетического момента и кинетической энергии (2.1.9) можно получить в явном виде. Так, например, формула (2.1.9) для G в этом случае с погрешностью $O(k^4)$ может быть записана следующим образом

$$G = G_0 \exp \left\{ -\frac{I_{11}}{A_1} t + b_1 \left(\exp \left[-\frac{A_3 \chi_1 + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{A_1 A_2 A_3} t \right] - 1 \right) \right\}, \quad (2.1.15)$$

$$b_1 = -\frac{C_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{2(A_1 - A_3)(I_{22} A_1 A_3 + I_{33} A_1 A_2 - 2I_{11} A_2 A_3)}.$$

Аналогичным образом может быть выражена зависимость $T(t)$.

Для величин k^2 , близких к единице и отвечающих движениям твердого тела вблизи сепаратрисы, правую часть (2.1.7) можно записать применяя асимптотические разложения $E(k)$, $K(k)$ при $k^2 \sim 1$ [308]. В результате разложения и последующего интегрирования уравнения (2.1.7) получим

$$\xi = \frac{1-k^2}{2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.1.16)$$

Отметим, что производная функции k^2 при $\xi = 0$ равна нулю. Кроме того, уравнение (2.1.7) допускает точное частное решение $k^2 = 1$, поэтому при $k^2 = 1$ теряется единственность решения. Это обстоятельство связано с тем, что при $k^2 = 1$ периодические движения Эйлера-Пуансо вырождаются в аperiodическое движение по сепаратрисе и условия применимости метода усреднения нарушаются. Однако, как следует из работ [12, 23, 313], метод усреднения пригоден для описания движений при всех начальных условиях, кроме множества малой меры; ухудшается лишь точность метода.

4. Исследование устойчивости квазистационарных движений.

Устойчивость квазистационарных движений, найденных в пп.2, 3 проанализируем в рамках усредненного уравнения (2.1.7). Для этого определим знак функции $\partial\Phi / \partial k^2$ при значении χ , соответствующем квазистационарным движениям (здесь $\Phi(k^2, \chi)$ - правая часть (2.1.7)). На рис.5 кривая 2 изображает график функции $\partial\Phi / \partial k^2$, полученный в ре-

зультате численного расчета. Как следует из графика, $\partial\Phi / \partial k^2 < 0$, т.е. все квазистационарные движения п. 2 асимптотически устойчивы по отношению к переменной k^2 (в смысле [314] для $\xi \geq 0$). Это видно также из графика рис. 6.

В истинном времени $t \geq t_*$ имеет место устойчивость при $N > 0$ или $I_{33}A_1 > I_{11}A_3$, см. (2.1.7). В обратном случае, при $N < 0$, $I_{33}A_1 < I_{11}A_3$, эти квазистационарные движения неустойчивы.

Асимптотическая устойчивость понимается в том смысле, что при малых отклонениях следа вектора \mathbf{G} на единичной сфере от движения по траектории Эйлера-Пуансо, отвечающей квазистационарному движению, след вектора \mathbf{G} стремится с течением времени возвратиться на эту траекторию.

Квазистационарное движение $k^2 = 0$, согласно (2.1.14), для $\xi > 0$ асимптотически устойчиво при $\chi > -3$ и неустойчиво при $\chi < -3$. В истинном времени для $t \geq t_*$ данное движение может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым – в зависимости от величины χ и знака параметра N .

На основе проведенного анализа получаем следующую качественную картину движения. Рассмотрим сначала случай $N > 0$. Функцией (2.1.14) и формулами (1.3.6) для k^2 , (2.1.6), (2.1.7) движение описывается при $t \geq t_*$, т.е. в области $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$. При $t \leq t_*$ выполняются неравенства $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$, соответствующие траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_3 (рис. 3). В этом случае нужно поменять местами A_1 и A_3 , I_{11} и I_{33} в формулах (1.3.6), (2.1.6), (2.1.7), а также заменить l_1 на l_3 в (2.1.6). Тогда уравнение (2.1.7) сохранит свой вид, но в нем нужно будет заменить χ на $-\chi$, N на $-N$. Аналогично определяется движение при $N < 0$. Предполагается, что в момент времени $t = t_*$ движение (одна из ветвей на рис. 6) переходит через сепаратрису, однако, как уже отмечалось, здесь возможно «застревание» на неопределенно долгое время для множества начальных данных малой меры [12, 23, 313].

На рис. 7 показан характер изменения величины k^2 в зависимости от χ , N в истинном времени t . Указаны точки, соответствующие квазистационарным движениям, а стрелками показано направление движения.

Буквы z_1, z_2, z_3 – оси тела, которым соответствует данное значение k^2 , причем слева от z_2 расположена область, где $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, а справа – область, в которой $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$.

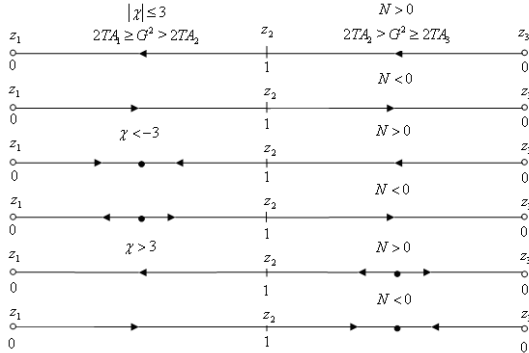


Рис. 7

Полученным результатам можно дать следующую интерпретацию. Введем обозначения

$$\mu_i = I_{ii} / A_i \quad (i=1,2,3), \quad \beta_i = \mu_i / \mu_2 \quad (i=1,2,3). \quad (2.1.17)$$

Вращение тела вокруг одной из главных осей, например Oz_1 , под действием диссипативного момента описывается соотношениями

$$A_1 \frac{d\omega}{dt} = -I_{11}\omega, \quad \omega = \text{const} \cdot \exp(-\mu_1 t).$$

Поэтому величины μ_i в (2.1.17) имеют смысл коэффициентов торможения вращений вокруг осей инерции Oz_i . Безразмерные величины β_i равны соответствующим коэффициентам, отнесенным к μ_2 ; при этом $\beta_2 = 1$. Соотношения (2.1.7) для χ, N перепишем через β_i в виде

$$\chi = \frac{2 - \beta_1 - \beta_3}{\beta_3 - \beta_1}, \quad N = \frac{1}{\mu_2(\beta_3 - \beta_1)}. \quad (2.1.18)$$

В плоскости $\beta_1\beta_3$ проведем прямую $\beta_3 = \beta_1$, на которой N меняет знак, и прямые $1 + \beta_1 = 2\beta_3$ и $1 + \beta_3 = 2\beta_1$, отвечающие согласно (2.1.18) равенствам $\chi = \pm 3$. Эти прямые разбивают квадрант $\beta_1 > 0, \beta_3 > 0$ на шесть областей, изображенных на рис. 8. Номера областей от-

вечают порядковому номеру качественных картин движения, изображенных на рис. 8. Отсюда видно, что число квазистационарных режимов движения и их устойчивость зависят от относительной величины коэффициентов затухания вращений μ_i вокруг главных осей инерции.

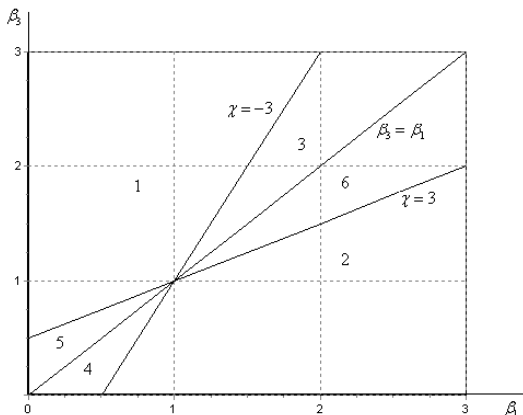


Рис. 8

Итак, в рассматриваемом приближении возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора \mathbf{G} и из медленной эволюции параметров этого движения.

Величины кинетического момента и кинетической энергии строго убывают, и их изменение зависит только от наличия сопротивления среды. Движения самого вектора \mathbf{G} в пространстве описывается первыми двумя уравнениями системы (2.1.6) и происходит с постоянным отклонением от вертикали $\delta = \text{const}$. В отличие от случая воздействия только силы тяжести [58] скорость вращения вектора \mathbf{G} вокруг вертикали переменна. Эволюция параметров движения Эйлера-Пуансо в системе координат, связанной с телом, описывается уравнением (2.1.7) и качественно представлена на рис. 8.

5. Пример 3. Случай динамической симметрии.

Для осесимметричного тела ($A_1 = A_2$) система усредненных уравнений для медленных переменных принимает вид

$$\lambda = \frac{mgl_3}{G} \cos \theta, \quad \delta = 0, \quad (2.1.19)$$

$$\frac{G}{G} = - \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \quad \theta = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right).$$

Уравнения (2.1.19) указывают на то, что сопротивление среды приводит к эволюции G и θ , которые оставались постоянными в [58] при отсутствии сопротивления среды.

Интегрируя последнее уравнение (2.1.19), получим

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \exp \left[\left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right) t \right]. \quad (2.1.20)$$

Из (2.1.20) видно, что при $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}$ угол θ увеличивается и

стремится к $\frac{\pi}{2}$. Окончательным движением здесь будет вращение вокруг оси перпендикулярной оси динамической симметрии.

При $I_{11} = I_{22} = I_{33} = I$ и $A_1 > A_3$ динамически вытянутое тело опрокидывается. Такой результат был найден в [25] для динамически симметричного спутника, находящегося под действием сил аэродинамической диссипации. В случае $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$ угол θ убывает и стремится к нулю.

В этом случае при $I_{11} = I_{22} = I_{33} = I$ выполняется условие устойчивости $A_3 > A_1$, полученное в [315].

Таким образом, динамически сжатое тело стабилизируется вокруг оси симметрии, что также совпадает с выводом [25]. Окончательное движение будет вращением вокруг оси динамической симметрии. Отсюда можно сделать вывод, что движение стремится к вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Третье уравнение (2.1.19) при подстановке выражения для θ (2.1.20) интегрируется в явном виде

$$G^2 = G_0^2 \cos^2 \theta_0 \left[\exp \left(-2 \frac{I_{33}}{A_3} t \right) + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp \left(-\frac{I_{11} + I_{22}}{A_1} t \right) \right]. \quad (2.1.21)$$

Исследуем скорость вращения λ вектора кинетического момента вокруг вертикали. Из уравнений (2.1.19) и соотношений (2.1.20), (2.1.21) следует, что

$$\lambda = \frac{mgl_3(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^{1/2}}{G_0 \left\{ \exp\left(-\frac{I_{33}}{A_3} t\right) + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp\left[\left(\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{A_1}\right) t\right] \right\}}. \quad (2.1.22)$$

При этом, согласно (2.1.22), в случае $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}$ угловая скорость λ вращения вектора кинетического момента \mathbf{G} вокруг вертикали убывает: $\lambda \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$ величина λ возрастает, т.е. $\lambda \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} = \frac{I_{33}}{A_3}$, то $\lambda \rightarrow \frac{mgl_3(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^{1/2}}{G_0 \operatorname{tg}^2 \theta_0}$ при $t \rightarrow \infty$.

§2. Вращение тяжелого гиригата в сопротивляющейся среде.

Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде несимметричного тяжелого твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

Воспользуемся системами координат, введенными в §1 главы 1 и поместим начало всех систем координат O в неподвижной точке твердого тела. Соотношения между направляющими косинусами и углами Эйлера заданы формулами (1.1.1).

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки для несимметричного тела записываются в виде (1.2.2), (1.2.6). В выражения проекций момента L_i в формулах (1.2.2) для нашей задачи входят слагаемые, учитывающие силу тяжести, силу сопротивления среды и влияние вязкой жидкости в полости на движение твердого тела. Первые два из них приведены в §1 главы 2.

Для нахождения малого возмущающего момента, обусловленного влиянием вязкой жидкости на движение твердого тела, используются выражения правой части уравнений движения свободного тела с жидкостью [134, 135].

$$A_1 p' + (A_3 - A_2)qr = \frac{\rho P}{A_1 A_2 A_3} p \left[A_3 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)r^2 + A_2 (A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)q^2 \right]. \quad (2.2.1)$$

Остальные уравнения получаются циклической перестановкой символов A_1, A_2, A_3 и p, q, r . Уравнения (2.2.1) образуют замкнутую систему, поэтому кинематические соотношения не выписываем. Здесь в слагаемых, учитывающих влияние вязкой жидкости в полости на движение твердого тела, ρ – плотность жидкости. Постоянный тензор \mathbf{P} зависит лишь от формы полости и характеризует диссипацию энергии за счет вязкой жидкости.

В рассматриваемой задаче тензор \mathbf{P} зададим в виде $P_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а $P > 0$. Так, например, для сферической полости радиуса a имеем согласно [134, 135]

$$P = \frac{8\pi a^7}{525}. \quad (2.2.2)$$

Предполагается, что полость заполнена жидкостью достаточно большой вязкости, поэтому $\frac{\rho PG_0}{\mathcal{G}A_1A_2A_3} \sim \varepsilon$, где G_0 – начальное значение кинетического момента тела, \mathcal{G} – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Связь между компонентами вектора момента приложенных сил в системах координат $Oz_1z_2z_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается соотношением

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{Oz_1} \\ L_{Oz_2} \\ L_{Oz_3} \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Здесь L_{Oz_i} – проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) момента сил тяжести, внешнего сопротивления и возмущающего момента, обусловленного влиянием вязкой жидкости в полости на движение твердого тела. В результате получим выражения

$$\begin{aligned} L_1 = & -mg \cos \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{1i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{1i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{1i} \right) + \\ & + \frac{\rho PG^3}{\mathcal{G}A_1A_2A_3} \left[\frac{(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)}{2A_1A_3} \sin 2\theta \sin \varphi (\cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \sin \psi \sin \varphi) + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)}{2A_1A_2} \cos \psi \sin^3 \theta \sin 2\varphi - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{(A_2 - A_3)(A_2 + A_3 - A_1)}{2A_2A_3} \sin 2\theta \cos \varphi (\cos \psi \cos \theta \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi) \Big], \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} L_1 = & mg \sum_{j=1}^3 l_j (\alpha_{3j} \sin \delta + \alpha_{1j} \cos \delta) - \\ & - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{2i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{2i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{2i} \right) + \\ & + \frac{\rho P G^3}{\mathcal{G} A_1 A_2 A_3} \left[\frac{(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)}{2A_1 A_3} \sin 2\theta \sin \varphi (\cos \psi \sin \varphi + \right. \\ & + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi) + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)}{2A_1 A_2} \sin \psi \sin^3 \theta \sin 2\varphi + \\ & \left. + \frac{(A_2 - A_3)(A_2 + A_3 - A_1)}{2A_2 A_3} \sin 2\theta \cos \varphi (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi) \right], \\ L_3 = & -mg \sin \delta \sum_{j=1}^3 l_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}}{A_1} \alpha_{31} \alpha_{3i} + \frac{I_{i2}}{A_2} \alpha_{32} \alpha_{3i} + \frac{I_{i3}}{A_3} \alpha_{33} \alpha_{3i} \right). \end{aligned}$$

Здесь I_{ij} – коэффициенты момента сопротивления вращению тела [25], предполагаемые постоянными.

Так как изучается быстрое движение, то предполагается малым отношение $\frac{mgl}{T_0} \sim \varepsilon \ll 1$, где l – расстояние от центра масс до неподвижной точки, T_0 – начальное значение кинетической энергии тела. Сопротивление среды предполагается слабым того же порядка малости: $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления.

В выражениях (2.2.4) проекции диссипативного момента сил, обусловленного вязкой жидкостью в полости, записаны с точностью до величин первого порядка малости.

Переходим к исследованию вращения твердого тела под действием моментов указанного вида. Проведя процедуру усреднения по схеме §1 главы 1 и сохраняя для усредненных медленных переменных прежние обозначения, получим

$$\lambda = \frac{\pi m g l_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A_1(G^2 - 2TA_3)}{A_1 - A_3}}, \quad \delta = 0, \quad (2.2.5)$$

$$G = -\frac{G}{R(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\ \left. + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \right\},$$

$$T = \frac{\rho P G^4 (A_1 - A_3)^2 (A_2 - A_3)(A_1 - A_2) [A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}{69A_1^2 A_2^2 A_3^2 R^2(k)} \times \\ \times \left\{ (1 - \chi^*)(1 - k^2) - [(1 - \chi^*) + (1 + \chi^*)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} - \\ - \frac{2T}{R(k)} (I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + \\ + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \times \\ \times \left\{ \frac{I_{33}}{A_3} [k^2 - W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2} (1 - k^2)W(k) \right\} + \frac{I_{11}(A_2 - A_3)R(k)}{S(k)} [1 - W(k)] \right\}.$$

Здесь $\chi^* = \frac{3A_2 [A_1^2 + A_2^2 - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3) [A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}$, $R(k)$, $W(k)$, $S(k)$ введены согласно (2.1.6).

Из уравнений (2.2.5) следует, что наличие полости с вязкой жидкостью и сопротивляющейся среды приводит к эволюции кинетической энергии тела T и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение T оказывает влияние вязкая жидкость в полости и сопротивление внешней среды. Эволюция величины кинетического момента G зависит только от сопротивления среды и происходит согласно описанному в §1 данной главы. Момент сил вязкой жидкости в полости является внутренним.

Уравнение (2.2.5) для T содержит слагаемые, характеризующие влияние вязкой жидкости в полости и сопротивление среды. Слагаемое, обусловленное влиянием жидкости в полости, отрицательно согласно [134, 135]. Каждое слагаемое выражения в круглых скобках уравнения для T , характеризующее влияние сопротивления среды, является положительной

величиной. Таким образом, кинетическая энергия T также строго убывает.

Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали $\dot{\lambda}$ зависит от воздействия силы тяжести, сопротивления среды и демпфирующего влияния вязкой жидкости в полости тела. В первом приближении метода усреднения отклонение вектора кинетического момента от вертикали δ остается постоянным.

В результате ряда преобразований, используя (1.3.6) и два последних уравнения (2.2.5), получим дифференциальное уравнение для переменной k^2

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{dt} = & \frac{\rho P G^2 (A_1 - A_3) [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}{3 \varrho A_1^2 A_2^2 A_3^2} \times \\ & \times \left\{ (1 - \chi^*) (1 - k^2) - [(1 - \chi^*) + (1 + \chi^*) k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} + \\ & + \frac{2(I_{33} A_1 - I_{11} A_3)}{A_1 A_3} \left\{ (1 - \chi) (1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi) k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Здесь параметр χ вводится согласно формуле (2.1.7).

Уравнения (2.2.5), (2.2.6) описывают движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 (рис.3). Когда выполняются неравенства $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$, описывающие траектории вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_3 , нужно в уравнениях (2.2.5), (2.2.6) поменять местами параметры A_1 и A_3 , I_{11} и I_{33} , а также заменить l_1 на l_3 в уравнении для $\dot{\lambda}$ (2.2.5). Тогда формула (2.2.6) сохраняет свой вид, но в ней нужно заменить χ на $-\chi$, χ^* на $-\chi^*$.

Уравнение для переменной G (2.2.5) совпадает с соответствующим уравнением (2.1.6), для которого доказано, что $\dot{G} < 0$ для всех $k^2 \in [0, 1]$. Кинетический момент асимптотически экспоненциально убывает и стремится к нулю, причем закон убывания может быть оценен: $G \sim \exp(-\gamma t)$ ($\gamma = \text{const} > 0$). При этом переменная k^2 изменяется согласно уравнению (2.2.6). Стационарными точками уравнения (2.2.6) являются значения $k = 0$, $k = 1$.

Отметим, что по сравнению с (2.1.7) правая часть уравнения для k^2 (2.2.6) зависит от неизвестной G , а в отличие от [134, 135], где учитывается только влияние жидкости в полости, величина G переменна во времени. В общем случае систему уравнений для G и k^2 проинтегрировать не удастся, а ее исследование представляет трудности.

Проинтегрируем эту систему численно при начальных условиях $G(0) = 1,414$; $k^2(0) = 0,99$, что соответствует движению, близкому к переходу через сепаратрису. Принимаем, кроме того, для определенности $A_1 = 3,2$; $A_2 = 2,6$; $A_3 = 1,67$, что соответствует значению $\chi^* = 0,112$. На рис. 9 изображены графики функций k^2 , G , полученные в результате численного интегрирования. Кривые 1, 2 соответствуют значениям параметров $\chi = -4,471$ ($I_{11} = 2,322$; $I_{22} = 1,31$; $I_{33} = 1,425$) и $\chi = 3,852$ ($I_{11} = 0,919$; $I_{22} = 5,228$; $I_{33} = 1,666$). Как видно, в первом случае величина кинетического момента G убывает «быстрее» k^2 , а во втором случае для значений параметров переменная k^2 приближается к нулю «быстрее» G , т.е. движение стремится к вращению вокруг оси Oz_1 .

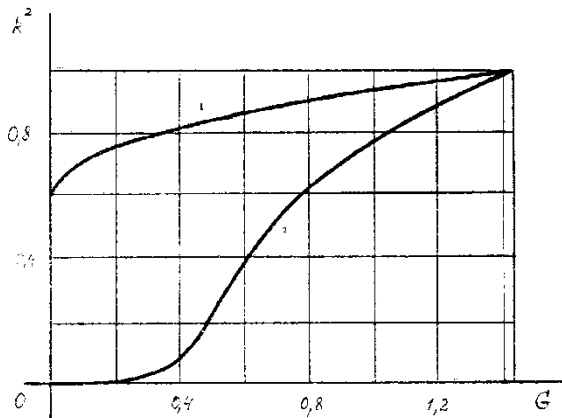


Рис. 9

Кроме того, для первого случая был проведен численный анализ скорости стремления к нулю величин k^2 и G при различных начальных значениях переменной k^2 [$k^2(0) = 0,8; 0,6; 0,4; 0,2$]. Полученные в результате расчетов кривые изображены на рис. 10. Таким образом, при раз-

личном наборе начальных значений $k^2(0)$ для выбранных параметров задачи скорость стремления G к нулю больше, чем переменной k^2 .

При малых k^2 , что соответствует движению, близкому к вращению вокруг оси Oz_1 , система уравнений для G^2 и k^2 принимает вид

$$\frac{dG^2}{dt} = -2 \frac{G^2}{A_1} \left\{ I_{11} + \frac{k^2 [(A_1 - A_3)(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + (A_1 - A_2)(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)]}{2A_1(A_2 - A_3)} \right\},$$

$$\frac{dk^2}{dt} = -\frac{k^2}{A_1 A_2 A_3} \left\{ 2 [A_3(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + A_2(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)] + \frac{\rho P G^2}{g A_2 A_3} [A_2(A_1 - A_2) + A_3(A_1 - A_3)] \right\}. \quad (2.2.7)$$

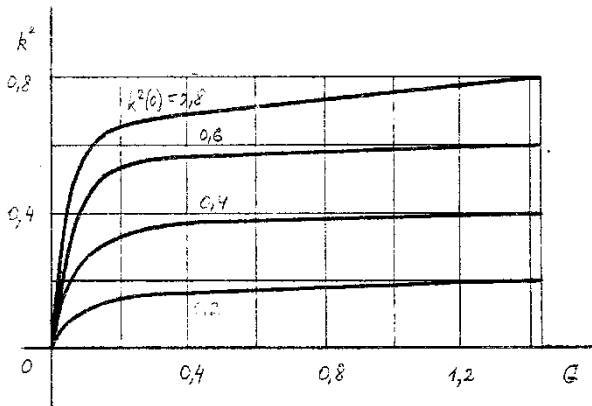


Рис. 10

Следует отметить, что уравнения (2.2.7) формально совпадают с системой нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию экологических систем [317, 318].

Из (2.2.7) непосредственно определяется первый интеграл вида

$$k^{-4\mu_1} \exp \left\{ -2 \frac{(A_1 - A_3)(I_{22}A_1 - I_{11}A_2) + (A_1 - A_2)(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)}{A_1^2(A_2 - A_3)} k^2 \right\} =$$

$$= C_1 G^{2\gamma} \exp \left\{ -\frac{\rho P G^2}{g A_1 A_2^2 A_3^2} [A_2(A_1 - A_2) + A_3(A_1 - A_3)] \right\}, \quad (2.2.8)$$

$$\mu_1 = \frac{I_{11}}{A_1}, \quad \gamma = -\frac{2}{A_1 A_2 A_3} [A_3 (I_{22} A_1 - I_{11} A_2) + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)].$$

При малых G^2 , k^2 следует, что характер изменения квадрата величины кинетического момента зависит от знака выражений $I_{22} A_1 - I_{11} A_2$ и $I_{33} A_1 - I_{11} A_3$. Поведение переменной k^2 зависит от знака коэффициента $A_3 (I_{22} A_1 - I_{11} A_2) + A_2 (I_{33} A_1 - I_{11} A_3)$.

Пример 4. Рассмотрим теперь частный случай осесимметричного тела ($A_1 = A_2$). Система уравнений для медленных переменных принимает вид

$$\lambda = \frac{mgl_3}{G}, \quad \delta = 0, \quad \frac{G}{G} = -\left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \quad (2.2.9)$$

$$\theta = \left[\frac{\rho P G^2 (A_1 - A_3)}{\mathcal{G} A_1^3 A_3} + \frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right] \sin \theta \cos \theta.$$

Последние два уравнения (2.2.9) можно записать следующим образом

$$(G^2)' = (-a_2 + b_2 \cos 2\theta) G^2, \quad 2\theta' = (hG^2 - b_2) \sin 2\theta, \quad (2.2.10)$$

$$a_2 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3}, \quad b_2 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} - \frac{I_{33}}{A_3}, \quad h = \frac{\rho P (A_1 - A_3)}{\mathcal{G} A_1^3 A_3}.$$

Уравнения (2.2.9) имеют первый интеграл

$$hG^2 - b_2 \ln C_1 G^2 = -a_2 \ln \operatorname{tg} 2\theta + \ln \sin 2\theta, \quad C_1 = \text{const}. \quad (2.2.11)$$

Из выражения для G (2.2.9) следует, что кинетический момент строго убывает.

Поведение угла нутации θ определяется знаком величины в квадратной скобке и в пределе при $G \rightarrow 0$ определяется знаком величины

$$\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}.$$

Действительно, если эта величина положительна, то угол θ стремится к $\pi/2$ независимо от величины G^2 (первого слагаемого в квадратной скобке). Если же эта величина отрицательна, то на некотором начальном участке, соответствующем достаточно большим значениям G , угол θ стремится к $\pi/2$. Однако с течением времени, когда G становится достаточно малым, величина, стоящая в квадратной скобке, становится от-

рицательной и твердое тело стремится к вращению вокруг оси A_1 . Предыдущие рассуждения были верны при $A_1 > A_3$. Аналогичные рассуждения могут быть приведены при $A_1 < A_3$.

§3. Быстрое вращение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением.

1. Возмущенное вращательное движение динамически несимметричного спутника.

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления.

Введем три декартовые системы координат, как указано в §1 главы 1. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) определяются углами λ и δ , как показано на рис. 1.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (1.2.2), (1.2.6), а зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением (1.2.12).

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1 \omega_0 / G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Проекция L_i момента внешних сил складывается из гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r . В проекциях на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) они записываются в виде [26, 277]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$L_1 = L_1^g + L_1^r \equiv \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (v_2 v_j S_{3j} - v_3 v_j S_{2j}) - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1} \alpha_{1i} \alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2} \alpha_{1i} \alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3} \alpha_{1i} \alpha_{33}}{A_3} \right), \quad (2.3.1)$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad v_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta,$$

$$v_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad v_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.$$

Предполагается, что момент сил сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\boldsymbol{\omega}$, аналогично рассмотренному в §1 этой главы [25, 277]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|\mathbf{L}^r\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|\mathbf{L}^r\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Построение такой модели диссипативного момента сил $I = \text{const}$ допустимо в связи с тем, что движение спутника определяется высотой. Кроме того, можно допустить «квазиизотермичность» модели атмосферы, так как движение центра масс происходит на больших высотах ($\sim 10^3$ – 10^4 км). На начальном этапе исследования величине плотности придается некоторое среднее значение, зависящее от элементов орбиты.

Производная кинетической энергии имеет вид (2.1.2). Ставится задача исследовать решение при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [16–18].

Как и в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде (§1 гл.2), так и в рассматриваемой задаче в случае невозмущенного движения (движение Эйлера-Пуансо) величины G , δ , λ , T , ν обращаются в постоянные, а φ , ψ , θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G , δ , λ , T , ν , а быстрыми – углы Эйлера φ , ψ , θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции Oz_1 [305]. Введем величину k^2 согласно (1.3.6), представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ , ψ от t [26]. При этом для медленных переменных δ , λ , G , T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3}v_2v_3N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3\sin\delta}v_1v_3N^*,$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{G}{R(k)}\left\{I_{22}(A_1-A_3)W(k) + I_{33}(A_1-A_2)[k^2-W(k)] + \right.$$

$$\left. + I_{11}(A_2-A_3)[1-W(k)]\right\}, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2T}{R(k)}\left\{I_{22}(A_1-A_3)W(k) + I_{33}(A_1-A_2)[k^2-W(k)] + \right.$$

$$+ \frac{(A_1-A_2)(A_1-A_3)(A_2-A_3)}{S(k)}\left\{\frac{I_{33}}{A_3}[k^2-W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2}(1-k^2)W(k)\right\} +$$

$$\left. + \frac{I_{11}(A_2-A_3)R(k)}{A_1 S(k)}[1-W(k)]\right\}.$$

Здесь

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right],$$

$R(k)$, $W(k)$, $S(k)$ введены согласно (2.1.6).

Третье и четвертое уравнения системы (2.3.2) совпадают с уравнениями изменения кинетического момента и кинетической энергии (2.1.7). Это объясняется тем, что эволюция этих величин происходит только под действием сопротивления среды.

Дифференциальное уравнение изменения величины k^2 имеет вид (2.1.7). Из этого следует, что усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G имеет одинаковый характер с изученным в §1.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (2.3.2) и уравнения (1.2.12). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda),$$

$$\dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)}(1+e\cos\nu)^2, \quad h(e) = (1-e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первых двух уравнений (2.3.2), δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения, описанный в §4 главы 1, по следующей схеме [309]:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu, \\ \dot{\lambda} &= \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu.\end{aligned}$$

После усреднения получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N^* \cos \delta}{4Gh(e)}. \quad (2.3.3)$$

Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой скорости δ и отклонение вектора \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Полученную систему уравнений (2.3.3), два последних уравнения системы (2.3.2) и уравнение

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1A_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \quad (2.3.4)$$

можно численно проинтегрировать. Интегрирование проводилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$; $A_2 = 2.6$; $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.04473$ – 1-й советский спутник; $e = 0.0487$ – 3-й советский спутник; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита [25]. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ в уравнении (2.3.4) была отрицательной -4.477 , а во втором положительной и равной 3.853 .

Для численного расчета было проведено обезразмеривание уравнений системы (2.3.3), двух последних уравнений системы (2.3.2) и уравнения (2.3.4). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетиче-

ский момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени.

Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$,

$\tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}$, $\tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}$, $\tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}$, $\varepsilon^2 \tilde{I}_{ii} = \frac{I_{ii}}{G_0}$ (согласно предположению

о сопротивлении среды). Система уравнений примет вид:

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\tilde{G}}{\tilde{R}(k)} \left\{ \tilde{I}_{22} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ \left. + \tilde{I}_{11} (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [1 - W(k)] \right\},$$

$$\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{2\tilde{T}}{\tilde{R}(k)} \left\{ \tilde{I}_{22} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \tilde{I}_{33} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) [k^2 - W(k)] + \right. \\ \left. + \frac{(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}{\tilde{S}(k)} \left\{ \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} [k^2 - W(k)] + \frac{\tilde{I}_{22}}{\tilde{A}_2} (1 - k^2) W(k) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{I}_{11} (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \tilde{R}(k)}{\tilde{A}_1 \tilde{S}(k)} [1 - W(k)] \right\},$$

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{3\tilde{N}^* \cos \delta}{4\tilde{G}h(e)}, \quad (2.3.5)$$

$$\frac{dk^2}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{\tilde{I}_{33} \tilde{A}_1 - \tilde{I}_{11} \tilde{A}_3}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\},$$

$$\tilde{R}(k) = \tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2, \quad \tilde{S}(k) = \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2,$$

$$\tilde{N}^* = \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Численный анализ показывает, что функции $\tilde{G}(\tau)$ и $\tilde{T}(\tau)$ являются монотонно убывающими (рис. 11, 12). Видно, что при положительной величине χ (кривые 2) функции убывают быстрее, но функция $\tilde{G}(\tau)$ стремится к асимптоте медленнее за большой промежуток времени. Функция $\lambda = \lambda(\tau)$ в обоих расчетных вариантах величины χ является убывающей функцией, но в первом варианте убывает быстрее. Необходимо отметить, что при изменении эксцентриситета орбиты в расчетах в обоих вариантах увеличение e приводит к более быстрому убыванию угла λ .

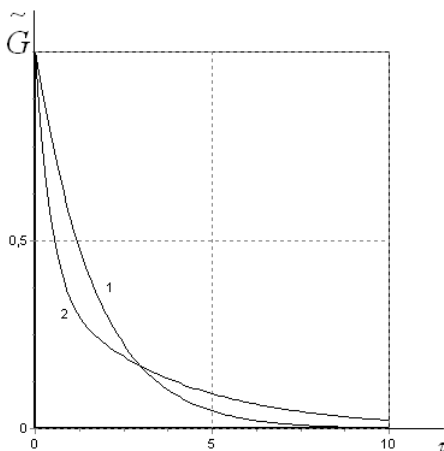


Рис. 11

На рис. 13 показаны графики функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $e = 0$ (кривая 1) и $e = 0.421$ (кривая 2) при положительном χ . Видно, что со временем величина угла λ уменьшается, т.е. вращение вектора \mathbf{G} в пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты происходит на постоянном угловом расстоянии δ от нее в направлении по ходу часовой стрелки.

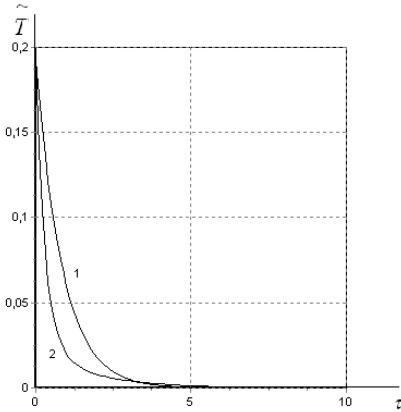


Рис. 12

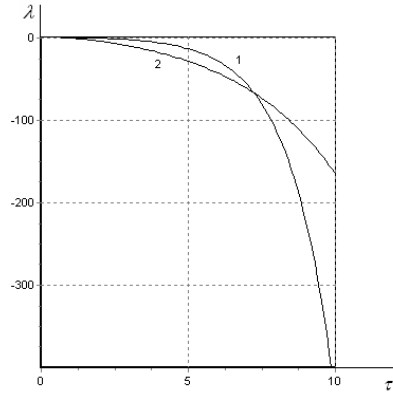


Рис.13

2. Анализ предельных случаев

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 . В этом случае правую часть уравнения (2.1.7) можно упростить используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [308]. Тогда уравнение интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2}\right] = k_0^2 \exp[-\rho_\mu t], \quad \rho_\mu = \mu_2 + \mu_3 - 2\mu_1, \quad (2.3.6)$$

где $C_1 > 0$ – постоянная, а μ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулой (2.1.17).

В случае малых k^2 аналитические выражения для величины кинетического момента и кинетической энергии можно получить в явном виде

$$\begin{aligned} G &= G_0 \exp\left\{-\mu_1 t + b_3 \left(\exp[-\rho_\mu t] - 1\right)\right\}, \\ T &= T_0 \exp\left\{-2\mu_1 t + a_3 \left(\exp[-\rho_\mu t] - 1\right)\right\}, \\ b_3 &= \frac{0.5k_0^2}{\rho_\mu A_1^2 (A_2 - A_3)} \left[\mu_1 A_1 (2A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) + \mu_2 A_1 A_2 (A_1 - A_3) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_3 A_1 A_3 (A_1 - A_2) \right], \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$a_3 = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho_\mu} [\mu_2(A_1 - A_3) + \mu_3(A_1 - A_2) + \mu_1(A_2 + A_3 - 2A_1)].$$

Уравнение (2.3.3) для λ с учетом (2.3.7) записывается таким образом

$$\frac{d\lambda}{dt} = \phi \exp\{\mu_1 t - b_3 \exp[-\rho_\mu t]\} \{d + \iota(\eta \exp[(a_3 - 2b_3) \exp(-\rho_\mu t)] - 1)\},$$

$$\phi = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{4(1 - e^2)^{3/2} G_0}, \quad d = A_2 + A_3 - 2A_1,$$

$$\iota = \frac{3}{2}(A_2 + A_3), \quad \eta = \frac{2A_1 T_0}{G_0}.$$

Его решение имеет следующий вид

$$\lambda = \frac{\phi}{\rho_\mu} \left\{ (\iota - d)(b_3)^{k_\rho} \left[-\gamma(-k_\rho, b_3) + \gamma(-k_\rho, b_3 e^{\tau_\rho}) \right] - \right. \\ \left. - \iota \eta x^{k_\rho} \left[-\gamma(-k_\rho, x) + \gamma(-k_\rho, x e^{\tau_\rho}) \right] \right\},$$

$$k_\rho = \frac{\mu_1}{\rho_\mu}, \quad x = 3b_3 - a_3, \quad \tau_\rho = -\rho t.$$

Здесь $\gamma(n, x)$ – неполная гамма функция [308] и $b_3 > 0$, $x > 0$.

Представляет интерес исследование системы (2.3.2) в случае малых диагональных коэффициентов сопротивления, т.е.

$$I_{11} = \sigma i_{11}, \quad I_{22} = \sigma i_{22}, \quad I_{33} = \sigma i_{33}, \quad \sigma \ll 1. \quad (2.3.8)$$

Кинетический момент G и кинетическая энергия T могут быть представлены в виде степенных рядов по σ

$$G = G_0 + \sigma G_1 + \dots, \quad T = T_0 + \sigma T_1 + \dots$$

Два последних уравнения системы (2.3.2) после интегрирования записываются следующим образом

$$G = G_0 - \frac{G_0 \sigma t}{R(k_0)} \{i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + \\ + i_{33}(A_1 - A_2)[k_0^2 - W(k_0)] + i_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k_0)]\}, \\ T = T_0 - \frac{2T_0 \sigma t}{R(k_0)} \{i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + i_{33}(A_1 - A_2)[k_0^2 - W(k_0)] + \quad (2.3.9)$$

$$+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k_0)} \left\{ \frac{i_{33}}{A_3} [k_0^2 - W(k_0)] + \frac{i_{22}}{A_2} (1 - k_0^2) W(k_0) \right\} + \frac{i_{11}(A_2 - A_3)R(k_0)}{A_1 S(k_0)} [1 - W(k_0)] \Bigg\}.$$

Здесь $W(k_0)$, $R(k_0)$, $S(k_0)$ – значения функций (2.1.6) при $k = k_0$. Согласно (2.3.9) функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как и в случае системы (2.3.2).

Для малых моментов сопротивления необходимо также построить приближенное решение

$$k^2 = k_0^2 + \frac{2\sigma t}{A_1 A_2 A_3} \left\{ A_1 (i_{33} A_2 - i_{22} A_3) (1 - k_0^2) - \left[A_1 (i_{33} A_2 - i_{22} A_3) + A_3 (i_{22} A_1 - i_{11} A_2) k_0^2 \right] \frac{E(k_0)}{K(k_0)} \right\}.$$

С помощью формулы для изменения величины кинетического момента (2.3.9), проведем анализ направления вращения вектора \mathbf{G} . Согласно (2.3.3) отклонение вектора \mathbf{G} от вертикали также остается постоянным, как и в случае малых k^2 , а скорость изменения угла λ зависит от непостоянной величины N^* , которая выражается через кинетический момент G и кинетическую энергию T . Тогда для малых моментов сопротивления закон изменения угла λ от времени имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\omega_0^2 N_0 t \cos \delta}{4G_0 (1 - e^2)^{3/2}} + \frac{3\omega_0^2 \sigma t^2 \phi \cos \delta}{8G_0 (1 - e^2)^{3/2}}.$$

Изменение угла $\lambda = \lambda(t)$ имеет вид квадратичной функции от t , у которой свободный член и коэффициент при первой степени t выражаются через постоянные величины ω_0 , N_0 , G_0 и $\cos \delta$. Все величины являются положительными и задаются в начальный момент времени.

Рассмотрим случай малых k^2 и малых коэффициентов сопротивления (2.3.8). При малых k^2 были получены законы изменения кинетического момента G , кинетической энергии T (2.3.7), которые с учетом малых первого порядка σ дают

$$G = G_0 \{1 + m_1 - n_1 t\}, \quad T = T_0 \{1 + m_2 - n_2 t\},$$

$$n_1 = \sigma \left\{ \mu_{1\sigma} + \frac{k_0^2}{2A_1^2(A_2 - A_3)} [\mu_{1\sigma}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) + \mu_{2\sigma}A_1A_2(A_1 - A_3) + \mu_{3\sigma}A_1A_3(A_1 - A_2)] \right\},$$

$$m_1 = \frac{0.5k_0^2}{\rho_\sigma A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_{1\sigma}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) + \mu_{2\sigma}A_1A_2(A_1 - A_3) + \mu_{3\sigma}A_1A_3(A_1 - A_2)], \quad (2.3.10)$$

$$m_2 = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho_\sigma} [\mu_{2\sigma}(A_1 - A_3) + \mu_{3\sigma}(A_1 - A_2) + \mu_{1\sigma}(A_2 + A_3 - 2A_1)],$$

$$n_2 = \sigma \left\{ 2\mu_{1\sigma} + \frac{k_0^2}{A_2 - A_3} [\mu_{2\sigma}(A_1 - A_3) + \mu_{3\sigma}(A_1 - A_2) + \mu_{1\sigma}(A_2 + A_3 - 2A_1)] \right\},$$

$$\rho_\sigma = \mu_{2\sigma} + \mu_{3\sigma} - 2\mu_{1\sigma}, \quad \mu_{i\sigma} = i_{ii} / A_i \quad (i=1,2,3).$$

Функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как во всех ранее рассмотренных случаях. Для определения направления вращения вектора \mathbf{G} второе уравнение системы (2.3.2) рассматривается с учетом (2.3.10). После его интегрирования получим

$$\lambda = \frac{3\omega_0 \cos \delta}{4(1 - e^2)^{3/2} G_0 (1 + m_1)} \left\{ (m_3 + n_3)t + \left[-\frac{n_1 z}{1 + m_1} + f \left(\frac{3n_1(1 + m_2)}{1 + m_1} - n_2 \right) \right] \frac{t^2}{2} \right\} + \lambda_0,$$

$$m_3 = -\frac{A_2 + A_3 + 4A_1}{2}, \quad n_3 = 3(A_2 + A_3) \frac{T_0 A_1 (1 + m_2)}{G_0^2 (1 + m_1)^2}.$$

Видно, что закон изменения угла ориентации вектора кинетического момента имеет вид квадратичной функции. Коэффициенты этой функции зависят от значений моментов инерции спутника A_i ($i=1,2,3$), от начальных значений кинетической энергии, кинетического момента и угловой скорости орбитального движения, а также от величины эксцентриситета орбиты спутника.

3. Пример 6. Движение динамически симметричного спутника.

Уравнения движения тела относительно центра масс (2.1.1) для динамически симметричного спутника при $A_1 = A_2$ будут иметь вид:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \quad (2.3.11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

После усреднения по ψ и φ имеем:

$$\frac{dG}{dt} = -G \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right],$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} \right] \sin \theta \cos \theta, \quad (2.3.12)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G(1 - e^2)^3} \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda) \sin \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G(1 - e^2)^3} \cos^2(\nu - \lambda) \cos \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).$$

Первое и второе уравнение системы (2.3.12) совпадают с аналогичными уравнениями в случае вращения динамически симметричного тяжелого твердого тела в вязкой среде (пример 3 §1 гл.2). Это объясняется тем, что эволюция величины кинетического момента и угла нутации происходит только под действием момента сил сопротивления внешней среды.

Рассмотрим два последних уравнения системы (2.3.12) и уравнение для истинной аномалии (1.2.12)

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda),$$

$$\dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (2.3.12), δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения [309] (см. также §4 гл.1), получим:

$$\dot{\delta} = 0, \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{2Gh(e)}, \quad (2.3.13)$$

$$N = (A_1 - A_3)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 \theta\right).$$

Исследуем систему, состоящую из двух первых уравнений системы (2.3.12) и двух уравнений системы (2.3.13), произведя ее обезразмеривание. Характерными параметрами задачи будут G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Получим для безразмерных переменных систему вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \tilde{G} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\tilde{A}_1} (\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}) + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \cos^2 \theta \right], \\ \frac{d\theta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \left[\frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} - \frac{\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}}{2\tilde{A}_1} \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \frac{3\varepsilon^2 \tilde{N} \cos \delta}{2\tilde{G}h(e)}, \\ \tilde{N} &= (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 \theta\right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Интегрирование системы (2.3.14) проводится для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$ при начальных условиях $G(0) = 1$; $\delta(0) = \pi / 4 \text{ рад}$; $\lambda(0) = \pi / 4 \text{ рад}$, $\theta(0) = \pi / 6 \text{ рад}$ и значениях главных центральных моментов инерции тела $\tilde{A}_1 = 4.175$; $\tilde{A}_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для рассмотренных ранее различных видов орбит. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $\tilde{I}_{11} = 2.322$; $\tilde{I}_{22} = 1.31$; $\tilde{I}_{33} = 1.425$ и $\tilde{I}_{11} = 2.0$; $\tilde{I}_{22} = 1.0$; $\tilde{I}_{33} = 0.5$. В первом случае величина в квадратных скобках второго уравнения системы (2.3.13) будет положительной, а во втором случае – отрицательной.

Для проверки корректности численного расчета уравнений системы (2.3.14) проводился сравнительный анализ графиков численного и аналитического расчетов в безразмерном виде для кинетического момента G и угла нутации θ , для которых известны аналитические решения (2.1.20) и (2.1.21). Численный расчет совпадает с аналитическим решением в обоих случаях с точностью до шестого знака. Графики приведены на рис. 14, 15 в двух возможных расчетных случаях коэффициентов сопротивления, где 1 – первая комбинация коэффициентов, а 2 – вторая.

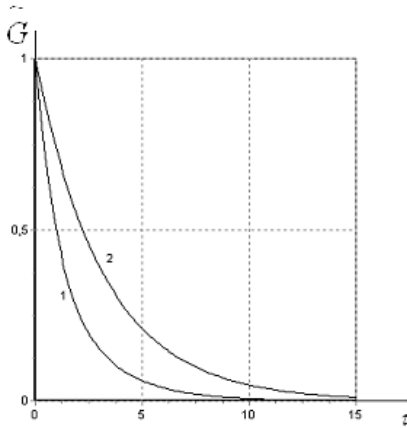


Рис. 14

Подставляя (2.1.20) и (2.1.21), в последнее уравнение системы (2.3.12), получим дифференциальное уравнение для угла λ , которое можно решить только численно, независимо от системы (2.3.12)

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta (A_1 - A_3) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp(-2b_2 t) \right] \exp(\mu_3 t)}{2G_0 \cos \theta_0 \left[1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp(-2b_2 t) \right]^{3/2}}. \quad (2.3.15)$$

Здесь b_2 определено в (2.2.10), а μ_3 в (2.1.17).

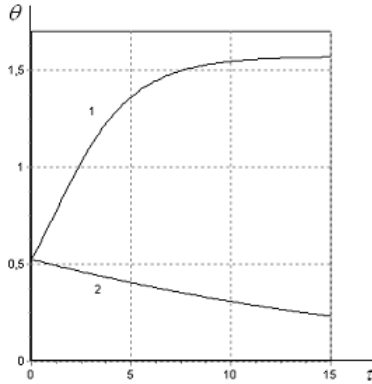


Рис. 15

Сравнивались графики зависимости угла λ для решения системы дифференциальных уравнений (2.3.12) и решения уравнения (2.3.15) в безразмерном виде в обоих расчетных случаях. Имеем в двух случаях на рис. 16, 17 совпадение с точностью до шестого знака. Каждый из указанных рисунков содержит по две кривые. Кривая 1 соответствует круговой орбите движения центра масс динамически симметричного спутника, кривая 2 – сильно эллиптической орбите. Из графиков видно, что в обоих расчетных случаях увеличение эксцентриситета орбиты приводит к более стремительному изменению функции угла λ . Значит, при движении центра масс спутника по орбите с большим эксцентриситетом вектор кинетического момента совершает поворот вокруг оси вертикали с большей скоростью.

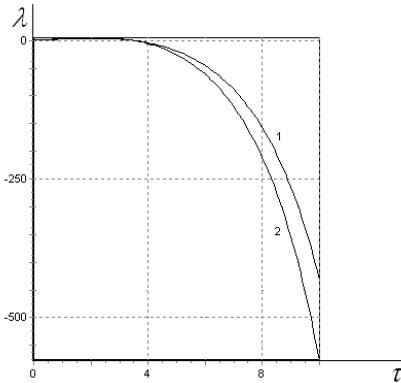


Рис. 16

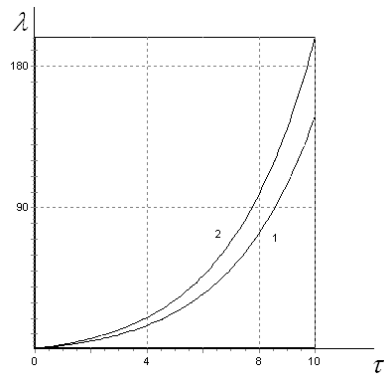


Рис.17

Четвертое уравнение системы (2.3.14) требует дополнительного исследования, так как функция \tilde{N} является знакопеременной и зависит от знака выражения $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$. Необходимо определить, при каких значениях угла θ это выражение является положительным. Имеем, что угол $\theta \in [0; \theta^*]$, где $\theta^* \approx 0.955$. Поэтому во втором расчетном случае выражение $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$ остается положительным на всем интервале времени, а значит функция λ согласно четвертому уравнению системы (2.3.14), является монотонно возрастающей. В первом расчетном случае угол θ увеличивается и проходит критическое значение θ^* , поэтому знак выражения меняется. Подробное численное исследование показывает, что функция угла λ в первом расчетном варианте имеет вид, представленный на рис. 18.

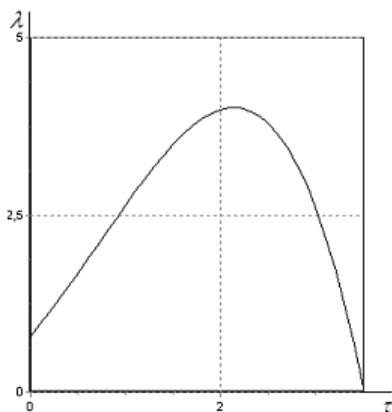


Рис. 18

Имеет смысл провести численный расчет для функции λ при различных начальных значениях угла нутации θ . Численный анализ приводит к следующим результатам (см. рис. 19, 20).

Кривые 1 соответствуют начальному углу нутации $\theta_0 = \pi / 6$, а кривые 2 – углу $\pi / 3$. Для первого расчетного случая квадратная скобка во втором уравнении системы (2.3.14) является величиной положительной,

а функция $\theta = \theta(t)$ является монотонно возрастающей. Для кривой 1 в начальный момент времени $\tilde{N} > 0$, следовательно, функция $\lambda = \lambda(t)$ возрастает. С течением времени угол θ увеличивается, проходя критическое значение, а, значит, \tilde{N} становится величиной отрицательной и функция угла λ убывает. Согласно кривой 2 функция $\lambda = \lambda(t)$ является монотонно убывающей, так как всегда выполняется равенство $\tilde{N} > 0$. Во втором расчетном случае коэффициентов сопротивления характер кривых меняется с точностью до наоборот, так как квадратная скобка во втором уравнении системы (2.3.14) является величиной отрицательной, а функция $\theta = \theta(t)$ монотонно убывающей.

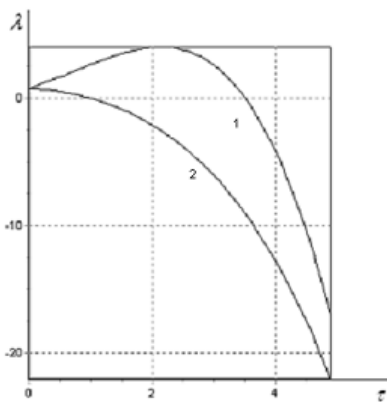


Рис. 19

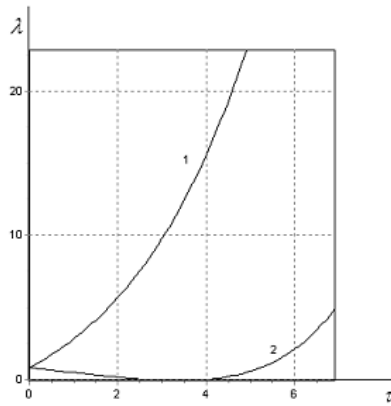


Рис. 20

Таким образом, исследовано движение динамически симметричного спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления.

Контрольные вопросы и задания

1. Когда момент силы тяжести тяжелого твердого тела относительно неподвижной точки равен нулю?
2. Какой функцией от угловой скорости вращения относительно неподвижной точки является зависимость момента сил сопротивления?
3. Какие величины являются медленными при движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде?
4. Проведите численное интегрирование системы уравнений (2.1.19) с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка при различных начальных значениях переменных λ , δ , G и θ .
5. Постройте графики изменения функции $\lambda = \lambda(t)$, $G = G(t)$ и $\theta = \theta(t)$ с помощью библиотеки ZedGraph.dll, проведите анализ полученных результатов.
6. Какая форма полости рассматривается при решении задачи?
7. Каким образом введен малый параметр в задаче о вращении тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде?
8. Постройте кривые первого интеграла (2.2.11), используя методы решения трансцендентных алгебраических уравнений.
9. Исследуйте характер поведения угла нутации для динамически симметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением.
10. Численно определите характер поведения функции $\lambda(t)$ для динамически симметричного спутника.

Глава 3.

Влияние вязкой жидкости в полости на вращения спутника относительно центра масс.

Результаты §1 этой главы были опубликованы в работе авторов [289], § 2 – в статье [290], §3 – в статьях [291, 324].

§1. Вращательные движения несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

1. Постановка задачи и процедура усреднения.

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием момента сил гравитационного притяжения. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики квазитвердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли [134].

Введем три декартовы системы координат согласно §1 главы 1. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (2.1.1) и работы [26].

Для исследования эволюции движения спутника удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной кинетическую энергию T , производная которой имеет вид (2.1.2).

Центр спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением (1.2.12).

Проекция L_i момента приложенных сил складывается из гравитационного момента L_i^g и момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p . Здесь приведена проекция на ось Oy_1 гравитационного момента, на другие оси проекции имеют аналогичный вид [26]

$$L_1^g = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\nu_2 \nu_j S_{3j} - \nu_3 \nu_j S_{2j}), \quad (3.1.1)$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \nu_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta,$$

$$\nu_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \nu_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.$$

Проекции момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i ($i=1,2,3$) записываются следующим образом:

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right\} \quad (i=1,2,3), \quad (3.1.2)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) \left[-\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2}) \right] \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \left[-\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2}) \right] \\ (A_2 - A_1) \left[(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2}) \right] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{32} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} (\gamma_{33} \alpha_{33} - \nu_3) \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} (\gamma_{33} \alpha_{33} - \nu_3) \\ \gamma_{33} (\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \left[\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2) \right] \\ \gamma_{32} \left[\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2) \right] \\ \gamma_{33} \left[\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2) \right] \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = \nu_1 \alpha_{1i} + \nu_2 \alpha_{2i} + \nu_3 \alpha_{3i} \quad (i=1,2,3),$$

$$p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p \alpha_{32} - q \alpha_{31},$$

$$\nu_{\alpha 1} = -\alpha_{22} \nu_1 + \alpha_{12} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \nu_1 + \alpha_{13} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \nu_1 + \alpha_{11} \nu_2,$$

$$B_1 = \left[\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1}.$$

Коэффициенты B_2 , B_3 имеют аналогичный вид и получаются также ротацией индексов (сдвигом); величины ν_i ($i=1,2,3$) введены в (3.1.1), α_{ij} — направляющие косинусы, определяющие взаимное положение систем координат Oy_i ($i=1,2,3$) и Oz_i ($i=1,2,3$) (см. (1.1.1)), p , q , r — проекции

на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Величина $\tilde{\mathbf{P}}$ – тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил в квазистатическом приближении, обусловленный вязкой жидкостью в полости [134]. Для простоты в уравнениях (3.1.2) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P_1 > 0$. Компоненты этого тензора имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P_1\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символы Кронекера (такой вид тензор $\tilde{\mathbf{P}}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенствам $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что модуль угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1\omega_0 / G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил (см. ниже).

Предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\mathcal{G} \gg 1$ ($\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon$), форма полости сферическая, тогда согласно [134]

$$\tilde{\mathbf{P}} = P_1 \text{diag}(1, 1, 1), \quad P_1 = \frac{\rho P}{\mathcal{G}}. \quad (3.1.3)$$

Здесь ρ , \mathcal{G} – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости в полости соответственно, а величина P задается формулой (2.2.2).

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом ω_0^2) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (3.1.2) имеет порядок ε^2 , а значит с точностью до малых первого порядка малости ($P_1 \sim \varepsilon$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1} + \right. \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}
& +q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) \right] \alpha_{i2} + \\
& +r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) \right] \alpha_{i3} \} . \\
& (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи будем применять метод усреднения [17].

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины G , δ , λ , T , ν обращаются в постоянные, а φ , ψ , θ – некоторые функции времени t [305, 320]. Медленными переменными в возмущенном движении будут G , δ , λ , T , ν , а быстрыми – углы Эйлера φ , ψ , θ .

Исследуем движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции Oz_1 . Введем модуль эллиптических функций k^2 согласно (1.3.6).

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера – Пуансо в правые части уравнений движения (2.1.1), (2.1.2) с учетом (3.1.1), (3.1.4) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ , θ от t . При этом для медленных переменных G , δ , λ , T , ν сохраняются прежние обозначения. В результате получим для них эволюционные уравнения вида

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \nu_2 \nu_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \nu_1 \nu_3 N^*, \\
\frac{dT}{dt} = -\frac{4PT^2 (A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\
\times \left\{ A_2 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[k^2 V(k) - W(k) \right] + \right. \\
\left. + A_1 (A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[(k^2 - 2)W(k) + k^2 \right] + \right.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$+A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2\right]\},$$

$$S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}, W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}.$$

Здесь N^* определяется согласно (2.3.2), $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [308]. Согласно первому уравнению (3.1.5) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 . Дифференцируя выражение для k^2 (1.3.6) и используя уравнение для кинетической энергии системы (3.1.5), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [134, 138, 277, 278] (см. также 2.1.7)

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$\chi = \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}, \quad (3.1.6)$$

$$\xi = (t - t_*) / N,$$

$$N = \frac{3A_1^2 A_2^2 A_3^2}{P_1 G_0^2 (A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-1}.$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство

$2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера – Пуансо. Уравнение (3.1.6) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере постоянного радиуса G_0 . Анализ уравнений (3.1.6) свидетельствует об отсутствии стационарных значений k , кроме $k = 0$ и $k = 1$.

Из уравнений движения (3.1.6) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T . Изменения углов λ , δ зависят как от действия силы гравитационного притяжения, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (3.1.5) для T , положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [308]. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$.

2. Численный анализ уравнений движения.

Рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (3.1.5) и уравнения (3.1.6). Проведем обезразмеривание уравнения для кинетической энергии, считая характерными величинами задачи N (3.1.6) и момент инерции A_1 . Имеем для приведенной кинетической энергии \tilde{T}

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{d\xi} = & -\frac{2\tilde{T}^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} S^2(k) \times \\ & \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2V(k) - W(k)] + \right. \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\ & \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

где $\tilde{T} = \frac{2A_1T}{G_0^2}$, ξ определяется согласно (3.1.6). Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т.е. для $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 4$; $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T(0) = \frac{G_0^2 S(k_0)}{2R(k_0)}, \quad (3.1.8)$$

Здесь $k_0 = k(0)$, $S(k_0) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k_0^2$,

$$R(k_0) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k_0^2.$$

В безразмерном виде имеем

$$\tilde{T}(0) = \frac{A_1 S(k_0)}{R(k_0)}.$$

Рассмотрен также случай $\xi < 0$, соответствующий соотношению $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$. Уравнение (3.1.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{d\xi} = & \frac{2\tilde{T}^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_3[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} S^2(k) \times \\ & \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2V(k) - W(k)] + \right. \end{aligned}$$

$$+A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[(k^2 - 2)W(k) + k^2 \right] + \\ +A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2 \right] \Big\}$$

с начальным условием

$$\tilde{T}(0) = \frac{A_3 S(k_0)}{R(k_0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений моментов инерции $A_1 = 4$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 8$. Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 21.

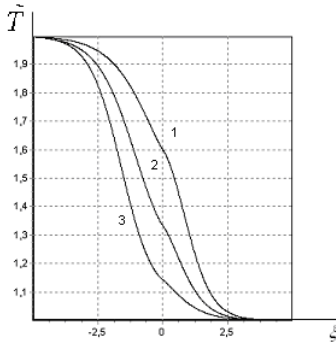


Рис. 21

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$. Значение $\tilde{T} = 2$ соответствует вращению вокруг оси наименьшего момента инерции Oz_3 (неустойчивое движение), $\tilde{T} = 1$ — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции Oz_1 (устойчивое движение). При $\xi = 0$ (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба).

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (3.1.5) и уравнения (1.2.12). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(v, \delta, \lambda), \\ \dot{v} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos v)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях второго и третьего уравнений (3.1.5), δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения [309] (см. также §4 гл.1). После усреднения получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N^* \cos \delta}{4G_0 h(e)}. \quad (3.1.9)$$

Видно, что угол отклонения вектора кинетического момента от вертикали остается постоянным в указанном приближении. Для численного расчета угла λ необходимо провести обезразмеривание второго уравнения системы (3.1.9). Имеем для $\xi > 0$:

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \Gamma \frac{\tilde{N} \cos \delta}{h(e)}, \quad \tilde{N} = \frac{N^*}{A_1},$$

$$\Gamma = \frac{9\omega_0^2 A_1^3 A_2^2 A_3^2}{4G_0^3 P (A_1 - A_3) [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}, \quad (3.1.10)$$

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3(\tilde{T} - 1) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right],$$

для $\xi < 0$:

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = -\Gamma \frac{\tilde{N} \cos \delta}{h(e)}, \quad \tilde{N} = \frac{N^*}{A_3},$$

$$\Gamma = \frac{9\omega_0^2 A_1^2 A_2^2 A_3^3}{4G_0^3 P (A_1 - A_3) [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]},$$

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{A_1}{A_3} \tilde{T} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].$$

Здесь P введено в (2.2.2).

Проводился численный расчет системы (3.1.10) в безразмерном виде при начальных условиях для углов $\delta(0) = 0.785$ рад, $\lambda(0) = 0.785$ рад и для значений коэффициента $\Gamma = 10, 1, 0.1, 0.01$. Во всех расчетных случаях функция имеет один и тот же вид, отличаясь только диапазоном принимаемых значений. На рис. 22 приведен график функции $\lambda = \lambda(\xi)$ при $\Gamma = 1$ и моменте инерции $A_2 = 5$ для круговой орбиты.

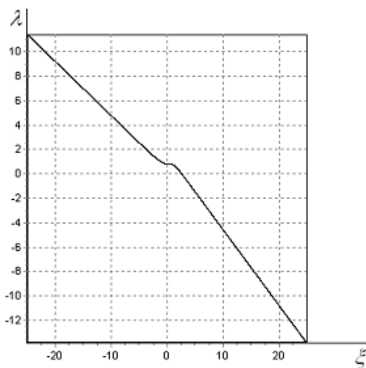


Рис. 22

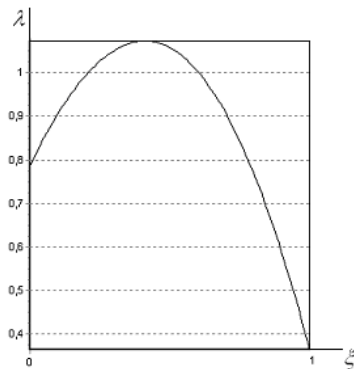


Рис.23

Если рассмотреть промежуток $\xi \in [0, 1]$ (рис. 23), то видно, что функция $\lambda = \lambda(\xi)$ не является монотонной при $\xi > 0$, а при $\xi < 0$ – монотонно возрастающая. Для малых моментов времени $\xi \in [-5, 3]$ функция зависит криволинейно, а для больших моментов времени близка к прямой линии. Из уравнения (3.1.10) видно, что приращение функции $\lambda = \lambda(\xi)$ зависит от непостоянной величины \tilde{N} , которая зависит от функций $k^2 = k^2(\xi)$, полных эллиптических интегралов $K(k)$ и $E(k)$, а также кинетической энергии $\tilde{T} = \tilde{T}(\xi)$. Согласно результатам численного расчета, представленного на рис. 21, при больших значениях безразмерного времени ξ кинетическая энергия стремится к асимптотическим значениям, при этом $k^2 \rightarrow 0$, а отношение $\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \rightarrow \frac{1}{2}$. При $\xi > 0$ имеем, что $\tilde{T} \rightarrow 1$, следовательно, $\tilde{N} \rightarrow (A_2 + A_3 - 2A_1) / A_1$. Аналогично при $\xi < 0$, следует, что при больших по модулю ξ , закон изменения функции $\lambda = \lambda(\xi)$ аппроксимируется линейной функцией. При $\xi > 0$ кинетическая энергия является функцией убывающей, поэтому величина \tilde{N} знакопеременная, что приводит к немонотонности функции $\lambda = \lambda(\xi)$.

Согласно численному расчету было получено, что для несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил гравитационного притяжения

вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 , сначала против хода часовой стрелки, за счет имеющейся начальной кинетической энергии, а затем по ходу часовой стрелки, при этом кинетическая энергия убывает до значения 1, что соответствует устойчивому движению спутника вокруг оси Oz_1 (при положительных моментах времени).

3. Исследование вращательного движения спутника в окрестности оси наибольшего момента инерции.

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающим движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 . В этом случае правую часть уравнения (3.1.6) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [308]. Тогда уравнение (3.1.6) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi > 0, \quad (3.1.11)$$

$$k^2 = C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi < 0,$$

$$C_1 = const, \quad 0 \leq C_1 \leq 1.$$

Изменение кинетической энергии можно качественно получить, следуя работе [134], простым пересчетом из соотношения (1.3.6), используя найденное решение для малых k^2 (3.1.11). Имеем

$$T = \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{2A_1^2(A_2 - A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi > 0, \quad (3.1.12)$$

$$T = \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{2A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi < 0.$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (3.1.12) примут вид

$$\tilde{T} = 1 + \frac{(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi > 0, \quad (3.1.13)$$

$$\tilde{T} = \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi < 0.$$

Постоянная интегрирования C_1 находится грубо из условия равенства кинетической энергии при $\xi = 0$ по формулам (3.1.13). Имеем

$$C_1 = \frac{A_1 A_3 (A_2 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_3^2 (A_1 - A_2)^2 + A_1^2 (A_2 - A_3)^2}. \quad (3.1.14)$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии в случае малых k^2 имеют вид, представленный на рис. 24. Кривые 1, 2, 3 получены для значений моментов инерции $A_1 = 4$, $A_3 = 8$ и $A_2 = 5, 6, 7$ соответственно. Как видно из рисунка, характер функции $\tilde{T} = \tilde{T}(\xi)$ тот же, что и для $0 \leq k^2 \leq 1$, а также асимптотические значения на положительных и отрицательных безразмерных моментах времени сохраняют свои величины. Движение стремится к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции Oz_1 .

Рассмотрим дифференциальное уравнение изменения угла λ (3.1.10) для малых k^2 с учетом (3.1.11) и (3.1.12). Имеем

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \Gamma \frac{\cos \delta}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} - 2 + \Pi C_1 \exp \left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2} \right] \right],$$

$$\Pi = \frac{3(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 + A_3)}{2A_1^2(A_2 - A_3)}.$$

После элементарного интегрирования для угла λ получается выражение вида

$$\lambda = \Gamma \frac{\cos \delta}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} - 2 \right) \xi - \frac{1}{3+\chi} \Pi C_1 \exp \left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2} \right] + C_0 \right],$$

$$C_0 = \frac{\lambda_0 (1-e^2)^{3/2}}{\Gamma \cos \delta} + \frac{\Pi C_1}{3+\chi}.$$

На рис. 25 приведен график изменения функции $\lambda = \lambda(\xi)$ для малых k^2 . Видно, что характер функции совпадает с характером изменения угла λ для $0 \leq k^2 \leq 1$, приведенным на рис. 23. При расчете принято то же начальное значение угла λ , а также величин центральных моментов инерции, угла δ , кинетического момента G и коэффициента Γ . Однако ввиду малости модуля эллиптических функций k^2 , график изменения $\lambda = \lambda(\xi)$ имеет меньшие градиенты.

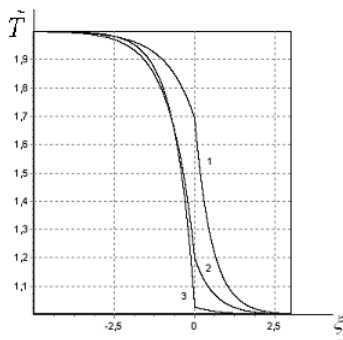


Рис.24

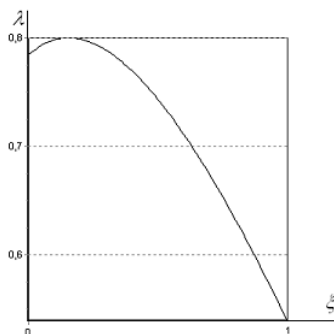


Рис. 25

4. Пример 7. Движение динамически симметричного спутника.

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника с полостью, целиком заполненной сильно вязкой однородной жидкостью, относительно центра масс с учетом момента гравитационных сил. Для решения задачи введем три декартовые системы координат, следуя §1 главы 1. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) определяются углами λ и δ , как показано на рис. 1.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (2.3.11). Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии V от времени t дается соотношением (1.2.12).

Рассматривается динамически симметричный спутник в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1 \omega_0 / G \ll 1$.

Движение спутника рассматривается при $A_1 = A_2$, моменты инерции для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_3$. Проекции L_i момента приложенных сил складываются из гравитационного момента L_i^g , представленного формулой (3.1.1) и момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p . Для динамически симметричного спутника момент сил вязкой жидкости в полости записывается следующим образом

$$L_i^p = \frac{P_1(A_1 - A_3)}{A_1^2} \left\{ \left(\mathbf{B}^{(1)} + \frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} (A_1 \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{S}^{(1)}) \right) \cdot \mathbf{a} \right\} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} A_3 r^2 p \\ A_3 r^2 q \\ -r A_1 (p^2 + q^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2}, \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} r - \alpha^* (F_1^{(1)} p_{\alpha 1} + M_1^{(1)} p_{\alpha 2}) \\ -\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2^{(1)} p_{\alpha 1} + M_2^{(1)} p_{\alpha 2}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{32} \nu_3 \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{31} \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\gamma_{33} \gamma_{31} r A_3 \\ -\gamma_{33} \gamma_{32} r A_3 \\ \gamma_{33} A_1 (\gamma_{32} q + \gamma_{31} p) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = \nu_1 \alpha_{1i} + \nu_2 \alpha_{2i} + \nu_3 \alpha_{3i} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p \alpha_{32} - q \alpha_{31},$$

$$\nu_{\alpha 1} = -\alpha_{22} \nu_1 + \alpha_{12} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \nu_1 + \alpha_{13} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \nu_1 + \alpha_{11} \nu_2.$$

Величины ν_i ($i=1, 2, 3$) введены в (3.1.1).

Предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\mathcal{G} \gg 1$ ($\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon$). С учетом сделанных предположений видно, что слагаемое с коэффициентом ω_0^2 в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (3.1.15) имеет порядок ε^2 , а значит с точностью до малых первого порядка малости ($P_1 \sim \varepsilon$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости на оси Oy_i ($i=1, 2, 3$) имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P_1(A_1 - A_3)}{A_1^2} \left\{ r^2 A_3 (p \alpha_{i1} + q \alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 - q^2) \alpha_{i3} \right\}. \quad (3.1.16)$$

Для невозмущенного движения Эйлера – Пуансо (при $\varepsilon = 0$), когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ , ψ являются линейными функциями, а угол θ – величина постоянная [305, 320]. Величины G , δ , λ , ν в невозмущенном движении обращаются в постоянные. Для возмущенного движения углы φ , ψ являются быстрыми переменными, а переменные G , δ , λ , ν , θ – медленными. Поэтому проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных G , δ , λ , ν , θ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ . После усреднения по ψ и φ имеем:

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{P_1 G^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) \sin \theta \cos \theta, \quad (3.1.17)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G(1 - e^2)^3} \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda) \sin \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G(1 - e^2)^3} \cos^2(\nu - \lambda) \cos \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right).$$

Согласно первому уравнению (3.1.17) величина кинетического момента спутника остается постоянной и равна G_0 , как и в случае несимметричного спутника (3.1.5).

Интегрируя второе уравнение системы (3.1.17) для угла нутации, получим:

$$tg \theta = tg \theta_0 \exp \left[\frac{P_1 G_0^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) t \right]. \quad (3.1.18)$$

Здесь θ_0 – начальное значение угла нутации. Коэффициент в квадратных скобках есть величина положительная, так как задача рассматривается в предположении $A_1 > A_3$. При различных начальных значениях угла θ график функции угла нутации $\theta = \theta(t)$ стремится к асимптотическому значению $\pi/2$, что видно на рис. 26. Кривая 1 соответствует начальному значению $\theta = \pi/3$, кривая 2 – начальному значению $\pi/4$ и кривая 3 – $\pi/6$.

Характер поведения функции $\theta = \theta(t)$ совпадает с описанным при исследовании формулы (2.1.20), но асимптотические значения определяются знаком выражения $A_1 - A_3$.

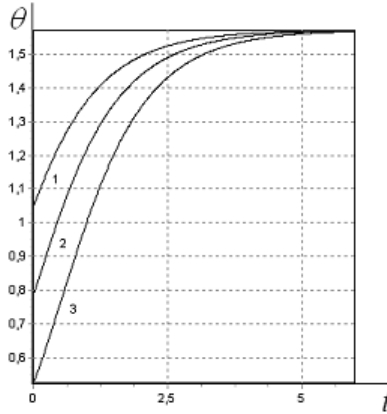


Рис. 26

Рассмотрим два последних уравнения системы (3.1.17) и уравнение для истинной аномалии (1.2.12)

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\ \dot{\nu} &= \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (3.1.17), δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения [309], имеем

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{2Gh(e)}, \quad (3.1.20)$$

$$N = (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right).$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника.

Второе дифференциальное уравнение системы (3.1.20) совпадает с уравнением изменения угла ориентации вектора кинетического момента (2.3.13) в примере 6. В этом примере приведен подробный анализ данного уравнения.

Проинтегрируем уравнение для угла λ (3.1.20) и, учитывая закон изменения угла нутации (3.1.18), имеем

$$\lambda = \frac{3\omega_0 \cos \delta (A_1 - A_3)}{2G(1 - e^2)^{3/2}} \left(t + \frac{3}{2\gamma} \left(\ln |1 + tg^2 \theta_0| - \ln |1 + tg^2 \theta_0 \exp(\gamma t)| \right) \right) + \lambda_0, \\ \gamma = \frac{2P_1 G_0^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3). \quad (3.1.21)$$

На рис. 27 представлен график изменения угла λ для различных начальных значений угла θ . Кривая 1 соответствует начальному значению $\theta = \pi/3$, кривая 2 – начальному значению $\pi/4$ и кривая 3 – $\pi/6$. Видно, что характер кривых 2 и 3 совпадает, а кривая 1 является монотонной.

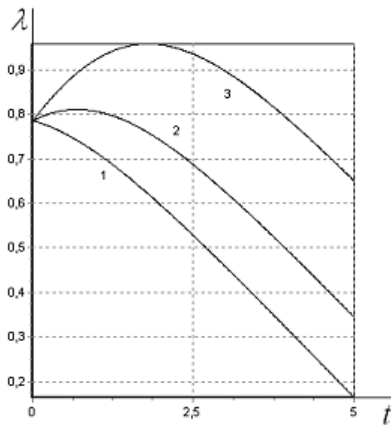


Рис. 27

Анализ второго уравнения системы (3.1.20) для угла λ показывает, что правая часть уравнения является знакопеременной функцией и зависит от знака выражения $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$. При значениях угла $\theta \in [0; \theta^*]$ это выражение является положительным, где критическое значение $\theta^* \approx 0.955 \text{ рад}$. Поэтому функция угла λ имеет промежутки возрастания и убывания.

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного момента величина вектора кинетического момента \mathbf{G} остается постоянной, при этом вектор кинетического момента \mathbf{G} направлен под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При начальных значе-

ниях угла нутации $\theta \in [0; \theta^*]$ конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 сначала против хода часовой стрелки, а затем по ходу часовой стрелки. При начальных значениях угла нутации $\theta > \theta^*$ конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки.

§2. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, с учетом момента сил светового давления от Солнца.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим движение спутника Солнца относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Введем три правых декартовых системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника. Система координат $Ox_1x_2x_3$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Системы координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$) введены согласно §1 главы 1.

Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ , как показано на рис. 1.

Уравнения движения тела относительно центра масс записываются в форме (2.1.1). Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии V от времени t дается соотношением (1.2.12).

При исследовании движения спутника наряду с переменной θ используется в качестве дополнительной переменной кинетическая энергия T , производная которой имеет вид (2.1.2).

Проекции L_i момента приложенных сил складываются из момента сил светового давления L_i^c и момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p .

В данной постановке задачи пренебрегаем моментом гравитационных сил. Соотношения между характерными величинами моментов гравитационных сил и моментов сил светового давления приведены в [25].

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен вдоль оси Oz_3 . Как показано в [25, 114], в этом случае для момента сил светового давления, действующего на спутник, имеет место формула

$$\mathbf{L}^c = \left(a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2 \right) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k},$$

$$a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z_0'(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \quad (3.2.1)$$

Здесь \mathbf{e}_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s – угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} так, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку; Z_0' – расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c – скорость света; E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Полагаем согласно [25], что в силу симметрии соответствующая функция имеет вид $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$$

Рассмотрим второй член разложения $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon$.

Проекция момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p на оси $Oy_i (i = 1, 2, 3)$ записываются следующим образом

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} + \frac{a_c(\cos \varepsilon_s) R_0^2}{R^2} \mathbf{D}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\alpha} \right\} (i = 1, 2, 3), \quad (3.2.2)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{*} = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2},$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} A_3 \left\{ -(A_1 + A_3) \gamma_{31} r + \alpha^* \left((\gamma_{31} \alpha_{33} + \nu_{\alpha 1}) p_{\alpha 1} + \alpha_{32} \gamma_{33} p_{\alpha 2} \right) \right\} \\ A_3 \left\{ (A_2 + A_3) \gamma_{32} r + \alpha^* \left((-\gamma_{32} \alpha_{33} + \nu_{\alpha 3}) p_{\alpha 1} + \alpha_{31} \gamma_{33} p_{\alpha 2} \right) \right\} \\ q \gamma_{32} A_2 (A_1 - A_2 - A_3) + p \gamma_{31} A_1 (A_1 - A_2 + A_3) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = \nu_1 \alpha_{1i} + \nu_2 \alpha_{2i} + \nu_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p \alpha_{32} - q \alpha_{31},$$

$$\nu_{\alpha 1} = -\alpha_{22} \nu_1 + \alpha_{12} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \nu_1 + \alpha_{13} \nu_2, \quad \nu_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \nu_1 + \alpha_{11} \nu_2,$$

$$B_1 = \left[\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1},$$

B_2, B_3 имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).

Величины ν_i ($i = 1, 2, 3$) введены в (3.1.1), α_{ij} – направляющие косинусы между системами координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$), p, q, r – проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$. Скалярная величина P_1 определяет тензор, зависящий только от формы полости, который характеризует диссипативный момент сил в квазистатическом приближении. Эта величина определяется согласно формуле (3.1.3). В задаче предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\mathcal{G} \gg 1$ ($\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon^2$), а форма полости сферическая.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1 \omega_0 / G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c (\cos \varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (3.2.2) имеет порядок ε^3 , а значит с точностью до малых второго порядка малости ($P_1 \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \times \quad (3.2.3)$$

$$\times \left\{ p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1} + \right.$$

$$+ q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) \right] \alpha_{i2} +$$

$$\left. + r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) \right] \alpha_{i3} \right\}.$$

(i = 1, 2, 3)

Полученные выражения совпадают с (3.1.4), в котором $P_1 \sim \varepsilon$.

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура метода усреднения.

Для исследования системы (2.1.1), (2.1.2), (1.2.12) с учетом (3.2.1), (3.2.3) при малом ε на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения [17, 26, 309]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины G , δ , λ , T , ν обращаются в постоянные, а φ , ψ , θ – некоторые функции времени t [305, 320]. Медленными переменными в возмущенном движении будут G , δ , λ , T , ν , а быстрыми – углы Эйлера φ , ψ , θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 , соответствующую наибольшему моменту инерции A_1 . Для исследования движения введем величину, представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение, согласно (1.3.6).

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера – Пуансо в правые части уравнений движения и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ , θ от t по схеме, предложенной в [26] для нерезонансных случаев. При этом для медленных переменных G , δ , λ , T , ν сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} &= 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \\
\frac{d\lambda}{dt} &= -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu), \\
\frac{dT}{dt} &= -\frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\
&\times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[k^2 V(k) - W(k) \right] + \right. \\
&+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[(k^2 - 2)W(k) + k^2 \right] + \\
&+ A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2 \right] \left. \right\}, \\
H &= \frac{1}{2} \left[3b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \text{ при } 2TA_2 - G^2 > 0, \\
H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3b^2}{k^2} \left[k^2 - W(k) \right] - 1 \right\} \text{ при } 2TA_2 - G^2 < 0, \\
b^2 &= \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}, \\
S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \quad V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}, \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [308]. Согласно первому уравнению (3.2.4) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 . Дифференцируя выражение для k^2 (1.3.6) и используя уравнения для кинетической энергии (3.2.4), получим дифференциальное уравнение (3.1.6), которое не зависит от других переменных (см. также [134, 138, 277, 278]). Совпадение уравнений для модуля эллиптических функций объясняется тем, что на эволюцию кинетической энергии спутника оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости в полости.

Из уравнений движения (3.2.4) следует, что изменения углов λ , δ зависят как от действия момента сил светового давления, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (3.2.4) для T положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$. Поэ-

тому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0,1]$.

Уравнение для кинетической энергии системы (3.2.4) совпадает с соответствующим уравнением в (3.1.5). Было показано, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси Oz_3 , соответствующей наименьшему моменту инерции A_3 (неустойчивое движение) до вращения вокруг оси Oz_1 , соответствующей наибольшему моменту инерции A_1 (устойчивое движение). Анализ эволюции кинетической энергии спутника подробно проведен в §1 данной главы.

3. Ориентация вектора кинетического момента.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (3.2.4). Как известно $R = \frac{l_0}{1 + e \cos \nu}$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \frac{\eta^{1/3}(1 - e^2)}{\omega_0^{2/3}}$. Здесь η – гравитационная постоянная. Тогда первые два уравнения (3.2.4) примут вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{2G\eta^{2/3} (1 - e^2)^2} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{G\eta^{2/3} (1 - e^2)^2} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu).$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (3.2.4), уравнений для истинной аномалии (1.2.12), модуля эллиптических функций k^2 (3.1.6), а также уравнений системы (3.2.5). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины

определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$, $\tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}$, $\tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}$,

$$\tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{P}_i = \frac{P_i \Omega_0^2}{G_0} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Введем обозначение

$$\Gamma_1 = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \eta^{2/3} \omega_0^{2/3}} \quad (3.2.6)$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания имеем систему уравнений движения вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{\Gamma_1 \tilde{H} (1 + e \cos \nu)^2}{2\tilde{G} (1 - e^2)^2} \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{\Gamma_1 \tilde{H} (1 + e \cos \nu)^2}{\tilde{G} (1 - e^2)^2} \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu), \\ \frac{d\nu}{d\tilde{t}} &= \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\frac{dk^2}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{N}} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\},$$

$$\tilde{N} = \frac{3\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2}{\tilde{P}_1(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)[\tilde{A}_2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) + 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_3]},$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left[3\tilde{b}^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0,$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{b}^2}{k^2} [k^2 - W(k)] - 1 \right\} \quad \text{при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0,$$

$$\tilde{b}^2 = \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{h}}{1 + \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}, \quad \tilde{h} = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2 \tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}.$$

Кинетическая энергия \tilde{T} находится из соотношения (1.3.6) в безразмерном виде:

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{G}^2 \tilde{S}(k)}{\tilde{R}(k)}, \quad \tilde{S}(k) = \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + k^2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2),$$

$$\tilde{R}(k) = \tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2.$$

Первые три уравнения для λ , δ и ν системы (3.2.7) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \quad (3.2.8)$$

$$\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{h(e)}, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (3.2.7), λ , δ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения [309] (см. также §4 главы 1). После усреднения получим

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma_1 \tilde{H} \cos \delta}{2\tilde{G}(1 - e^2)^{1/2}}. \quad (3.2.9)$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785 \text{ rad}$; $\lambda(0) = 0.785 \text{ rad}$; $\tilde{P}_1(0) = 10$. Для безразмерного времени τ имеем следующую картину, представленную на рис.28. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 5, 6, 7$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 28 видно, что характер изменения угла λ носит почти линейный характер и с увеличением значения момента инерции \tilde{A}_2 функция увеличивается быстрее.

Согласно численному расчету показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и движущегося под действием момента сил светового давления, вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 против хода часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси наибольшего момента инерции Oz_1 .

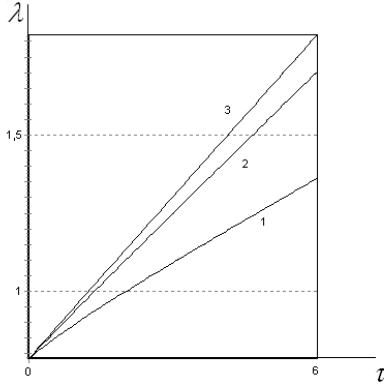


Рис. 28

3. Предельный случай вращения, близкого к осевому.

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 . Так как уравнение изменения модуля эллиптических функций имеет вид (3.1.6), то асимптотическое решение записывается согласно формуле (3.1.11). Таким образом, при движении спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, вокруг оси Oz_1 , соответствующей наибольшему моменту инерции A_1 , как под действием гравитационного момента, так и под действием момента сил светового давления закон изменения кинетической энергии описывается одинаковыми формулами (3.1.12), (3.1.13). Графики изменения безразмерной кинетической энергии для малых k^2 представлены на рис. 24.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции безразмерного времени τ

$$k^2 = k_0^2 \exp[-u\tau],$$

$$u = \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2} \left[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) + \tilde{A}_1 \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \right]. \quad (3.2.10)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.2.9) для угла λ в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (3.2.10). В правую часть уравнения входит известная переменная величина \tilde{H} . При $2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0$ функция $\tilde{H}(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-u\tau] - 1 \right\}. \quad (3.2.11)$$

Ясно, что $\tilde{H} \rightarrow -0.5$ при $\tau \rightarrow \infty$. Подставляем полученное выражение для \tilde{H} в уравнение изменения угла λ , интегрируем и находим

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)\Gamma_1 k_0^2 \cos \delta}{8u\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)(1 - e^2)^{1/2}} (\exp[-u\tau] - 1) + \frac{\Gamma_1 \tau \cos \delta}{4(1 - e^2)^{1/2}},$$

где константы λ_0 , k_0^2 определяются из начальных условий. График данной функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $k^2 \ll 1$ имеет вид, представленный на рис. 29. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 5, 6, 7$, при постоянных значениях $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785$ рад. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda = \lambda(\tau)$ при произвольных k^2 .

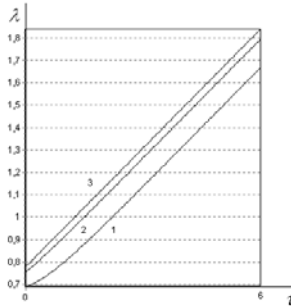


Рис. 29

4. Пример 8. Вращательное движение динамически симметричного спутника.

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$), моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_3$. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (2.3.11). Проекция момента сил L_i^p вязкой жидкости в полости на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) при $A_1 = A_2$ имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1^2} \left\{ \left((A_1 - A_3) \mathbf{B}^{(1)} + \frac{a_c(\cos \varepsilon_s) R_0^2}{R^2} \mathbf{D}^{(3)} \right) \cdot \mathbf{a} \right\} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} A_3 r^2 p \\ A_3 r^2 q \\ -r A_1 (p^2 + q^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2}, \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \left[-r(A_1 + A_3) + \alpha^* A_1 (p_{\alpha 1} (v_{\alpha 1} - \alpha_{33}) + \alpha_{32} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) \right] \\ \gamma_{32} \left[r(A_1 + A_3) + \alpha^* A_1 (p_{\alpha 1} (v_{\alpha 3} - \alpha_{33}) + \alpha_{31} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) \right] \\ A_1 (p \gamma_{31} - q \gamma_{32}) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = v_1 \alpha_{1i} + v_2 \alpha_{2i} + v_3 \alpha_{3i} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p \alpha_{32} - q \alpha_{31},$$

$$v_{\alpha 1} = -\alpha_{22} v_1 + \alpha_{12} v_2, \quad v_{\alpha 2} = -\alpha_{23} v_1 + \alpha_{13} v_2, \quad v_{\alpha 3} = -\alpha_{21} v_1 + \alpha_{11} v_2.$$

Величины v_i ($i=1, 2, 3$) введены в (3.1.1).

Полагаем согласно [25] $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем эту функцию полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$. Рассмотрим второй член представленного разложения, когда $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ с учетом того, что $a_1 \sim \varepsilon$.

Предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, поэтому скалярная величина $P_1 \sim \varepsilon^2$. Из (3.2.12) видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c(\cos \varepsilon_s)$) имеет порядок ε^3 , а значит с точностью до малых второго порядка малости ($P_1 \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид

$$L_i^p = \frac{P_1(A_1 - A_3)}{A_1^2} \left\{ r^2 A_3 (p \alpha_{i1} + q \alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 + q^2) \alpha_{i3} \right\} \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.2.13)$$

Для решения задачи применяется метод усреднения [17]. После усреднения по быстрым переменным φ, ψ получим уравнения в безразмерных величинах

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= 0, & \frac{d\theta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \Gamma_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{\Gamma_1 (1 + e \cos \nu)^2}{2(1 - e^2)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{\Gamma_1 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu).\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

Здесь безразмерные величины определяются равенствами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}$, $\varepsilon^2 \tilde{a} = \frac{a}{\Omega_0 a^2}$, где Ω_0 – угловая скорость движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени, a – радиус полости (см. (2.2.2)).

Введены обозначения Γ_1 согласно формуле (3.2.6) и

$$\Gamma_2 = \frac{P \tilde{\rho} G_0^3}{g a^2 A_1^3 A_3 \Omega_0^3}. \quad (3.2.15)$$

Величина Γ_2 имеет смысл приведенного коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости.

Исследуем решение системы (3.2.14) при малом ε на промежутке времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Из первого уравнения системы (3.2.14) видно, что кинетический момент является постоянной величиной. Интегрируя второе уравнение системы (3.2.14) для угла нутации θ , получим

$$tg \theta = tg \theta_0 \exp \left[\Gamma_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \tau \right]. \quad (3.2.16)$$

График функции $\theta = \theta(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 30. Расчет проводился при начальном условии $\theta(0) = \pi / 3 \text{ рад}$. Кривая 1 соответствует случаю $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_3$ (спутник «сплюснутый» по оси инерции A_3), а кривая 2 – $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_3$ (спутник «вытянутый» по оси инерции A_3).

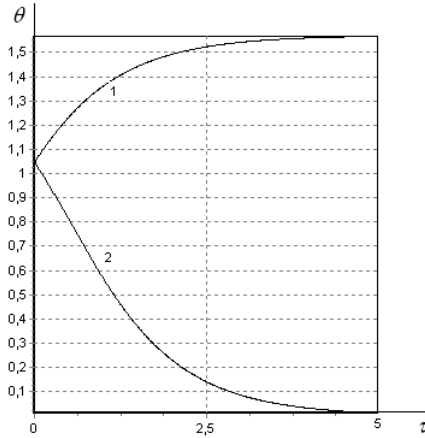


Рис. 30

Последние два уравнения (3.2.14) и уравнение (1.2.12) в безразмерном времени τ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), & \frac{d\lambda}{d\tau} &= \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\ \frac{d\nu}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, & h(e) &= (1 - e^2)^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

где Δ , Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (3.2.14). Из системы (3.2.16) видно, что δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Применяя модифицированный метод усреднения [309], получим:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\Gamma_1 \cos \delta}{2(1 - e^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника.

С учетом (3.2.16) находим аналитически закон изменения угла λ от времени τ :

$$\lambda = \lambda_0 + u_1 \tau - \frac{3u_1}{2u_2} \ln \left| \frac{1 + u_3 \exp(u_2 \tau)}{1 + u_3} \right|,$$

$$u_1 = -\frac{\Gamma_1 \cos \delta}{2(1-e^2)^{3/2}}, \quad u_2 = 2\Gamma_2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3), \quad u_3 = tg^2\theta_0.$$

График изменения функции $\lambda = \lambda(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 31, для случая начального значения угла нутации $\theta(0) = \pi/3 \text{ рад}$ и при начальном значении угла $\lambda = \pi/4 \text{ рад}$. Кривые построены при различных значениях параметра $u_2 = -0.5, -1, -1.5, -2$. Из рисунка видно, что при значениях $u_2 \geq -1$ на малых промежутках времени $\tau < 2.5$ график функции имеет вид монотонно убывающей функции. При значениях $u_2 < -1$ на малых промежутках времени функция $\lambda = \lambda(\tau)$ не является монотонной, при этом, чем меньше параметр u_2 , тем больше возрастает функция. При значениях времени $\tau > 2.5$ графики всех функций линейны и практически подобны.

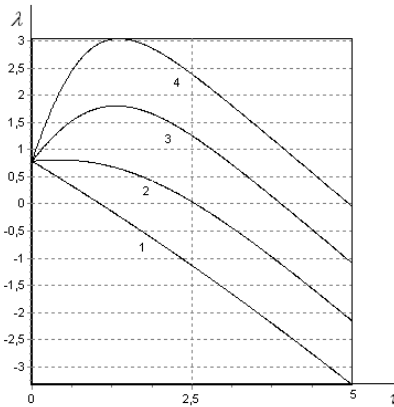


Рис. 31

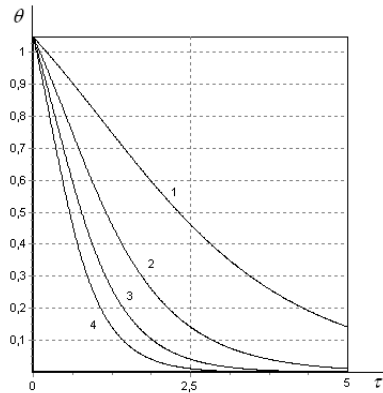


Рис. 32

Для тех же значений параметра u_2 построены графики изменения угла нутации $\theta = \theta(\tau)$ (рис. 32). Видно, что чем меньше параметр u_2 , тем быстрее угол $\theta \rightarrow 0$, т.е. чем более «вытянутое» тело по оси Oz_3 , соответствующей моменту инерции A_3 , тем быстрее спутник стремится к положению устойчивого вращения вокруг этой оси.

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления величина вектора кинетического момента G оста-

ется постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. Направление движения конца вектора \mathbf{G} зависит от формы спутника. В случае «сплюснутого» спутника по оси Oz_3 , соответствующей моменту инерции A_3 , конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 против хода часовой стрелки. При этом, угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2$ рад. Для динамически «вытянутого» по этой же оси спутника конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 сначала по ходу часовой стрелки, а затем против хода часовой стрелки и угол нутации стремится к нулю.

§3. Вращения спутника с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и светового давления.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим движение спутника (планеты) относительно центра масс под действием момента сил светового давления в гравитационном поле. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью (вязкое ядро). Вращательные движения рассматриваются в рамках модели квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца [134].

Введем три декартовы системы координат согласно §2 данной главы. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ , как показано на рис. 1.

Уравнения движения тела относительно центра масс записываются в форме (2.1.1).

Для удобства при исследовании движения спутника наряду с переменной θ используется в качестве дополнительной переменной кинетическая энергия T , производная которой имеет вид (2.1.2).

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии V от времени t дается соотношением (1.2.12), при этом

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\eta(1-e^2)^3}{\ell_0^3}}. \quad (3.3.1)$$

Здесь l_0 – фокальный параметр орбиты, ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты, η – гравитационная постоянная.

Проекции L_i момента приложенных сил складываются из момента сил светового давления L_i^c , момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p и из гравитационного момента L_i^g .

Момент сил светового давления \mathbf{L}^c , действующих на спутник, определяется согласно (3.2.1). Проекции гравитационного момента L_i^g на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид (3.1.1).

Проекции момента сил сильно вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [134]:

$$L_i^p = \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} + \left(a_c (\cos \varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} \mathbf{C} + \frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \right) \cdot \mathbf{a} \right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2}, \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_3 \left[A_2 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\gamma_{31} \alpha_{33} - \alpha_{22} v_1 + \alpha_{12} v_2) + \alpha_{32} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) - r \gamma_{31} (A_1 + A_3) \right] \\ A_3 \left[A_1 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\alpha_{11} v_2 - \alpha_{33} \gamma_{32} - \alpha_{21} v_1) + \alpha_{31} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) + r \gamma_{32} (A_2 + A_3) \right] \\ q \gamma_{32} A_2 (A_1 - A_2 - A_3) + p \gamma_{31} A_1 (A_1 - A_2 + A_3) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) \left\{ -\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2}) \right\} \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \left\{ -\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2}) \right\} \\ (A_2 - A_1) \left\{ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2}) \right\} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + v_{\alpha 1} \gamma_{33} + v_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + v_{\alpha 3} \gamma_{33} + v_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) \alpha_{33} + v_{\alpha 3} \gamma_{32} + v_{\alpha 1} \gamma_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{32} v_3 \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{31} v_3 \\ \gamma_{33} (\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \left[\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2) \right] \\ \gamma_{32} \left[\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2) \right] \\ \gamma_{33} \left[\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2) \right] \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = v_1 \alpha_{1i} + v_2 \alpha_{2i} + v_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$P_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \quad P_{\alpha 2} = p \alpha_{32} - q \alpha_{31},$$

$$v_{\alpha 1} = -\alpha_{22} v_1 + \alpha_{12} v_2, \quad v_{\alpha 2} = -\alpha_{23} v_1 + \alpha_{13} v_2, \quad v_{\alpha 3} = -\alpha_{21} v_1 + \alpha_{11} v_2,$$

$$B_1 = \left[\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1},$$

B_2, B_3 имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).

Здесь v_i ($i = 1, 2, 3$) введены в (3.1.1), α_{ij} – направляющие косинусы между системами координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$), p, q, r – проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) вектора абсолютной угловой скорости ω спутника в системе координат $Ox_1 x_2 x_3$.

Величина P_1 определяет скалярный тензор, зависящий только от формы полости, который характеризует диссипативный момент сил в квазистатическом приближении. Эта величина определяется согласно формуле (3.1.3). В задаче предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\mathcal{G} \gg 1$ ($\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon^2$), а форма полости сферическая.

С учетом введенных предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c (\cos \varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (3.3.2) имеет порядок ε^3 . Гравитационная постоянная η пропорциональна квадрату угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\eta \sim \varepsilon^2$. Значит с точностью до величин второго порядка малости ($P_1 \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$\begin{aligned} L_i^p = & \frac{P_1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1} + \right. \\ & + q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3) (A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2) (A_3 - A_1 - A_2) \right] \alpha_{i2} + \\ & \left. + r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1) (A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2) (A_2 - A_1 + A_3) \right] \alpha_{i3} \right\} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура усреднения.

Для решения задачи будем применять модифицированную схему метода усреднения [17, 26, 309]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t [305, 320]. Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции Oz_1 . Введем величину k^2 согласно (1.3.6), представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений движения и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [26] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= 0, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) - \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \nu_2 \nu_3 N^*, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \nu_1 \nu_3 N^*, \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{4P_1 T^2 (A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times (3.3.4) \\ &\quad \times \left\{ A_2 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[k^2 V(k) - W(k) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)\left[(k^2 - 2)W(k) + k^2\right] + \\
& +A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)W(k) + k^2\right]\}, \\
S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \quad V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}, \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \\
H &= \frac{1}{2}\left[3b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1\right] \text{ при } 2TA_2 - G^2 > 0, \\
H &= \frac{1}{2}\left\{\frac{3b^2}{k^2}\left[k^2 - W(k)\right] - 1\right\} \text{ при } 2TA_2 - G^2 < 0, \\
b^2 &= \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2}\right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}, \\
N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{aligned}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [308]. Согласно первому уравнению (3.3.4) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 . Дифференцируя выражение для k^2 (1.3.6) и используя уравнения для кинетической энергии (3.3.4), получим дифференциальное уравнение (3.1.6), которое не зависит от других переменных (см. также [134, 138, 277, 278]). Совпадение уравнений для модуля эллиптических функций объясняется тем, что на эволюцию кинетической энергии спутника оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости в полости.

Уравнение для кинетической энергии системы (3.3.4) совпадает с соответствующими уравнениями (3.1.5) и (3.2.4). Было показано, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси Oz_3 , соответствующей наименьшему моменту инерции A_3 (неустойчивое движение) до вращения вокруг оси Oz_1 , соответствующей наибольшему моменту инерции A_1 (устойчивое движение). Анализ эволюции кинетической энергии спутника подробно проведен в §1 данной главы.

3. Ориентация вектора кинетического момента.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (3.3.4). Как известно $R = l_0 / (1 + e \cos \nu)$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \eta^{1/3} (1 - e^2) / \omega_0^{2/3}$. Тогда первые два уравнения (3.3.4) примут вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{\omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{2G(1 - e^2)^2} \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) + \frac{3(1 + e \cos \nu) \omega_0^{2/3}}{1 - e^2} \nu_2 \nu_3 N^* \right],$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{G(1 - e^2)^2} \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) - \frac{\omega_0^{2/3} (1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \nu_1 \nu_3 N^* \right].$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (3.3.4), уравнений для истинной аномалии (1.2.12), модуля эллиптических функций k^2 (3.1.6), а также уравнений системы (3.3.5). Характерные параметры задачи выбираются согласно §2 данной главы.

После обезразмеривания имеем систему уравнений движения вида:

$$\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{2\tilde{G}(1 - e^2)^2} \left[\Gamma_1 \tilde{H} \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) + \frac{3(1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2)} \nu_2 \nu_3 \tilde{N}^* \right],$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\tilde{G}(1 - e^2)^2} \left[\frac{3(1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \nu_1 \nu_3 \tilde{N}^* - \Gamma_1 \tilde{H} \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) \right],$$

$$\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0, \quad (3.3.6)$$

$$\frac{dk^2}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{N}} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\},$$

$$\tilde{N} = \frac{3\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2}{\tilde{P}_1(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)[\tilde{A}_2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) + 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_3]},$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left[3\tilde{b}^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \text{ при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0,$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{b}^2}{k^2} [k^2 - W(k)] - 1 \right\} \text{ при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0,$$

$$\tilde{b}^2 = \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{h}}{1 + \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}, \quad \tilde{h} = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2\tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3},$$

$$\tilde{N}^* = \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = & -\varepsilon^2 \frac{4\tilde{P}_1\tilde{T}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}{3\tilde{A}_1^2\tilde{A}_2^2\tilde{A}_3^2\tilde{S}^2(k)} \times \\ & \times \left\{ \tilde{A}_2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) [k^2V(k) - W(k)] + \right. \\ & + \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_3 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\ & \left. + \tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{S}(k) = \left[\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2 \right], \text{ где величина } \Gamma_1 \text{ введена согласно (3.2.6).}$$

Первые три уравнения для λ , δ и ν системы (3.3.6) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \quad (3.3.7)$$

$$\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{h(e)}, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (3.3.6), λ , δ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения [309] (см. также §4 главы 1). После усреднения получим

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \left(\frac{3\tilde{N}^*}{h(e)} - \frac{2\Gamma_1\tilde{H}}{(1 - e^2)^{1/2}} \right) \frac{\cos \delta}{4\tilde{G}}. \quad (3.3.8)$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$ рад, $\lambda(0) = 0.785$ рад. Рассматривались орбиты с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита. Для безразмерного времени τ имеем следующую картину изменения угла ориентации вектора кинетического момента, представленную на рис. 33. Кривая 1 соответствует круговой орбите, а кривая 2 – сильно вытянутой эллиптической.

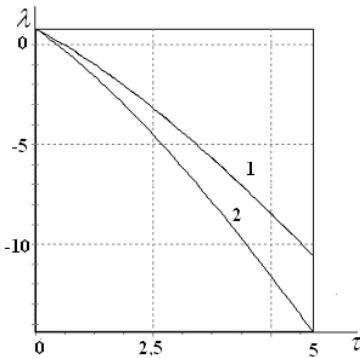


Рис. 33

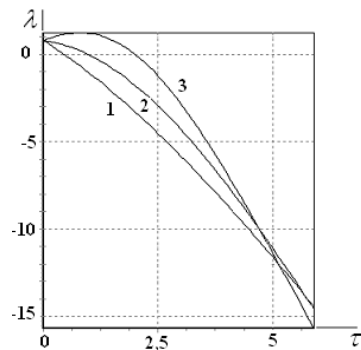


Рис. 34

На рис. 34 представлены графики изменения этого же угла при различных значениях моментов инерции спутника. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 34 видно, что характер изменения угла λ при близких значениях моментов инерции \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 близок к линейному. С уменьшением значения момента инерции \tilde{A}_2 кривизна функции увеличивается, при этом функция перестает быть монотонной.

Характер изменения угла λ имеет такой же вид, как и в задаче о движении спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью в гравитационном поле [289] (см. также §1 этой главы, рис. 22, 23).

В случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [290] характер изменения угла λ близок к линейному и с увеличением значения безраз-

мерного момента инерции \tilde{A}_2 функция увеличивается быстрее (см. §2, рис. 28).

Можно также провести анализ изменения характера функции $\lambda(\tau)$ при различных значениях безразмерной величины \tilde{P}_1 . Кривые 1, 2, 3 на рис. 35 соответствуют различным значениям $\tilde{P}_1(0) = 10, 100, 1000$. Видно, что характер изменения угла имеет почти линейный вид.

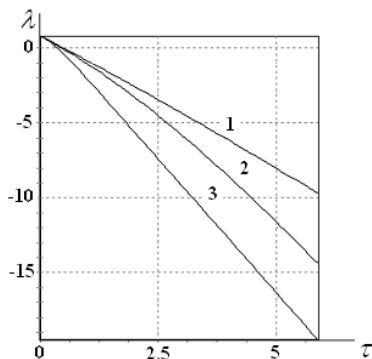


Рис. 35

Согласно численному расчету показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил светового давления в гравитационном поле вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до безразмерного значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси наибольшего момента инерции Oz_1 . Такое же направление движения конца вектора кинетического момента характерно для задач о движении спутника с полостью под действием момента сил гравитационного притяжения [289] и момента сил светового давления [290] (см. §1, 2 данной главы).

4. Предельный случай вращения, близкого к осевому.

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающим движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 . В этом случае правую часть уравнения (3.1.6) можно упростить, используя разложе-

ния полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [308]. Тогда уравнение (3.1.6) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде (3.1.11).

Таким образом, при движении спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, вокруг оси Oz_1 , соответствующей наибольшему моменту инерции A_1 , под действием гравитационного момента и момента сил светового давления закон изменения кинетической энергии описывается формулами (3.1.12), (3.1.13). Графики изменения безразмерной кинетической энергии для малых k^2 представлены на рис. 24.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции безразмерного времени τ формулой (3.2.10).

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.3.8) для угла λ в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (3.2.10). В правую часть уравнения входит непостоянная величина \tilde{H} . При $2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0$ функция $\tilde{H}(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид (3.2.11).

Асимптотическое выражение кинетической энергии можно представить в виде функции по безразмерному времени τ

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{G}^2}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{G}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1^2(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-u\tau].$$

Подставляем полученное выражение \tilde{H} и \tilde{T} в уравнение изменения угла λ , интегрируем и находим

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{\cos \delta}{4\tilde{G}_0(1-e^2)^{1/2}} \times \\ & \times \left\{ \frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k_0^2}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)u} \left[\Gamma_1 \tilde{A}_3 - \frac{3(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{1-e^2} \right] [\exp(-u\tau) - 1] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{3}{1-e^2} (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1) + \Gamma_1 \right] \tau \right\} + \lambda_0, \end{aligned}$$

где константы λ_0 , k_0^2 определяются из начальных условий. График данной функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $k^2 \ll 1$ имеет вид, представленный на рис. 36.

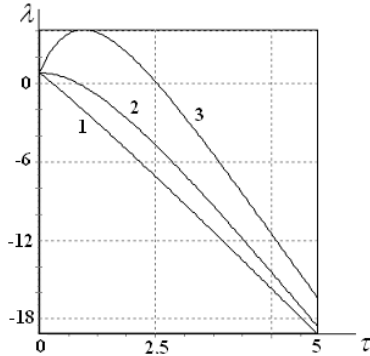


Рис. 36

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$, при постоянных значениях $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785 \text{ рад}$. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda = \lambda(\tau)$ при произвольных k^2 .

Изменение угла λ при малых k^2 имеет приблизительно тот же вид, что и в случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле [289]. При этом в рассматриваемом случае убывание угла ориентации происходит несколько быстрее (см. §1 данной главы, рис. 27).

При движении спутника с вязкой жидкостью в полости тела под действием момента сил светового давления [290] угол λ возрастает, как и в случае движения спутника под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [285].

5. Пример 9. Движение динамически симметричного спутника.

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$), моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_3$. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме (2.3.11). Проекция момента сил L_i^p вязкой жидкости в полости на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) при $A_1 = A_2$ имеют вид (3.2.13).

Для решения задачи будем применять метод усреднения [17]. В случае невозмущенного движения Эйлера-Пуансо, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, углы φ , ψ являются линейными

функциями, а угол θ – величина постоянная [305, 320]. Для возмущенного движения углы φ , ψ являются быстрыми переменными, а угол θ – медленной. Проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных G , δ , λ , θ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ .

После усреднения по быстрым переменным φ , ψ имеем уравнения в безразмерных величинах

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= 0, \quad \frac{d\theta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Gamma_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 fe \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) \left[\Gamma_1 - \frac{3(1 + e \cos \nu)}{\tilde{G}(1 - e^2)} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \right], \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= 2\varepsilon^2 fe \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) \left[\frac{3(1 + e \cos \nu)}{\tilde{G}(1 - e^2)} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) - \Gamma_1 \right], \\ fe &= \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{2(1 - e^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Здесь безразмерные величины определены как в примере 8. Обозначения Γ_1 и Γ_2 введены согласно формулам (3.2.6) и (3.2.15).

Исследуем решение системы (3.3.9) при малом ε на промежутке времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Из первого уравнения системы (3.3.9) видно, что кинетический момент есть величина постоянная. Второе уравнение системы совпадает с уравнением для угла нутации примера 8, где проведен анализ данного уравнения.

Последние два уравнения (3.3.9) и уравнение для истинной аномалии (1.2.12) в безразмерном времени τ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\ \frac{d\nu}{d\tilde{t}} &= \frac{\varepsilon}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где Δ , Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (3.3.9). Из системы (3.3.10) видно, что δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Применяя модифицированный метод усреднения [309], получим:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\cos\delta}{2(1-e^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2\theta \right) \left[\frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{\tilde{G}(1-e^2)} - \Gamma_1 \right].$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника.

С учетом (3.2.14) находим аналитически закон изменения угла λ от времени τ :

$$\lambda = \lambda_0 + a_1\tau - \frac{3a_1}{2a_2} \ln \left| \frac{1 + \gamma \exp(a_2\tau)}{1 + a_3} \right|,$$

$$a_1 = \frac{\cos\delta}{2(1-e^2)^{1/2}} \left[\frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{\tilde{G}(1-e^2)} - \Gamma_1 \right], \quad a_2 = 2\Gamma(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3), \quad a_3 = tg^2\theta_0.$$

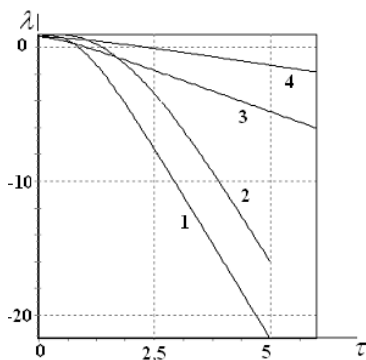


Рис. 37

График изменения функции $\lambda = \lambda(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 37 для начального значения угла нутации $\theta(0) = \pi/3 \text{ рад}$ и при начальном значении угла $\lambda = \pi/4 \text{ рад}$. Кривые построены при различных значениях параметра $a_2 = -2, -1, 1, 2$. Из рисунка видно, что при отрицательных значениях параметра a_2 на малых промежутках времени функция $\lambda = \lambda(\tau)$ сначала возрастает, а затем убывает. При положительных

ных значениях параметра β функция $\lambda = \lambda(\tau)$ является убывающей. При моментах времени $\tau > 2.5$ графики всех функций почти линейны.

В нашей задаче характер убывания λ совпадает с полученным в [289, 290] при исследовании движения спутника с вязкой жидкостью в полости под действием гравитационного или светового моментов. При этом, угол ориентации вектора кинетического момента \mathbf{G} в рассматриваемом нами случае убывает быстрее (см. примеры 7, 8, рис. 27, 31).

Для значений параметра $a_2 = -0.5, -1, -1.5, -2$ построены графики изменения угла нутации $\theta = \theta(\tau)$ (рис. 38). Видно, что чем меньше параметр a_2 , тем быстрее угол $\theta \rightarrow 0$, т.е. чем более “вытянутое” тело по оси A_3 , тем быстрее спутник стремится к положению устойчивого вращения вокруг этой оси.

Характер изменения угла нутации θ в рассматриваемом случае, близок к изученному при вращении спутника с вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления [290] (см. §2 данной главы).

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. Направление движения конца вектора \mathbf{G} зависит от формы спутника, например от формы планета Земля. В случае спутника “сплюснутого” по оси инерции A_3 конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 против хода часовой стрелки. При этом угол нутации стремится к предельному значению $\pi / 2$ рад. Для динамически “вытянутого” по этой же оси спутника конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 , сначала по ходу часовой стрелки, а затем против хода часовой стрелки, а угол нутации стремится к нулю.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите выражения для коэффициентов B_2 , B_3 формулы (3.1.2).
2. Что является малым параметром задачи о вращательном движении несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле?
3. Опишите этапы метода усреднения уравнений движения несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле.
4. Проведите численное интегрирование уравнения изменения модуля эллиптических функций (3.1.6) для спутников с разной геометрией масс, используя библиотеку алгоритмов для вычисления эллиптических интегралов.
5. При каких значениях k^2 осуществляется вращательное движение спутника в окрестности оси наибольшего момента инерции?
6. Какой спутник называется динамически симметричным?
7. В чем заключается суть модифицированного метода усреднения?
8. Численно исследуйте характер поведения угла нутации (3.1.18) для динамически симметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного момента.
9. Какой вид имеет поверхность космического аппарата?
10. Численно определите характер поведения функции $\lambda(t)$ для малых $k^2 \ll 1$, в задаче вращения спутника с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и светового давления.

Глава 4.

Влияние момента сил светового давления на вращение спутника.

Результаты §1 главы были впервые опубликованы в работе авторов [280], § 2 – в статьях [281, 282].

§1. О движении спутника Солнца с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс под действием момента сил светового давления.

Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Введем четыре декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника. Системы координат $Ox_1x_2x_3$, $Oy_1y_2y_3$ и $Oz_1z_2z_3$ введены в §1 главы 1 (см. рис.1, 2).

$OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OZ направлена по текущему радиус-вектору спутника (на Солнце), оси OY и OX параллельно соответственно нормали к плоскости орбиты и трансверсали (рис. 39)

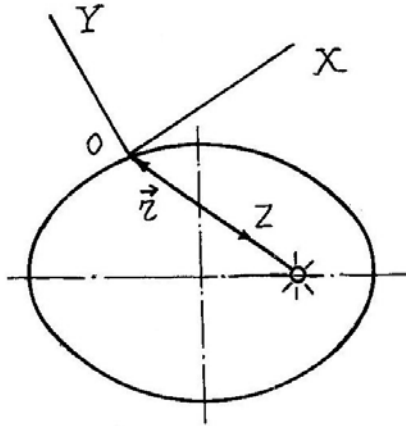


Рис. 39

Взаимное расположение систем $Oz_1z_2z_3$ и $OXYZ$ определим таблицей направляющих косинусов [25]

	z_1	z_2	z_3
X	α	α'	α''
Y	β	β'	β''
Z	γ	γ'	γ''

Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i ($i=1,2,3$) определяется углами Эйлера φ, ψ, θ . При этом направляющие косинусы системы $Oy_1y_2y_3$ выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по формулам (1.1.1).

Будем считать, что аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца и предположим, что можно пренебречь моментами всех сил, кроме сил светового давления. Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен по оси Oz_3 . Как показано в [25, 114] в этом случае для момента сил светового давления \mathbf{L} , действующего на спутник, для тел вращения имеет место формула [25, 114], см. также (3.2.1)

$$\mathbf{L} = \frac{a_c(\varepsilon_s)R_0^2}{R^2} \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}'. \quad (4.1.1)$$

В случае полного поглощения выполняется соотношение

$$a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z_0'(\varepsilon_s). \quad (4.1.2)$$

Здесь \mathbf{e}_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты (рассматривается спутник Солнца); \mathbf{k}' – единичный вектор по направлению оси симметрии спутника; ε_s – угол между этими направлениями, так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}'| = \sin \varepsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R (например, в начальный момент времени); $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку; Z_0' – расстояние от центра масс до центра давления. Считаем, что $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [25]. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots + a_N \cos^N \varepsilon_s. \quad (4.1.3)$$

Расчет влияния сил и моментов сил светового давления на астероид произвольной формы и космический аппарат с солнечным парусом приведен в работах [119, 110]. Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi$ имеют вид (1.3.14) [25]

$$\begin{aligned} \lambda \dot{} &= (G \sin \delta)^{-1} \partial U / \partial \delta, \quad \delta \dot{} = -(G \sin \delta)^{-1} \partial U / \partial \lambda + G^{-1} \operatorname{ctg} \delta \partial U / \partial \psi, \\ G \dot{} &= \partial U / \partial \psi, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\theta \dot{} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}) - (G \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \varphi + G^{-1} \operatorname{ctg} \theta \partial U / \partial \psi,$$

$$\varphi \dot{} = G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) + (G \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \theta,$$

$$\psi \dot{} = G (A_1^{-1} \sin^2 \varphi + A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - G^{-1} (\partial U / \partial \delta \operatorname{ctg} \delta + \partial U / \partial \theta \operatorname{ctg} \theta).$$

В некоторых случаях удобно совместно с углом θ использовать в качестве переменной кинетическую энергию

$$T = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{A_3} \right], \quad (4.1.5)$$

производная которой имеет вид

$$\begin{aligned} T \dot{} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $\nu(t)$ и от направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. [25] гл. 1, §1)

$$U = U(\nu(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3). \quad (4.1.7)$$

Проекции вектора момента сил \mathbf{L} на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [25]:

$$L_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial \beta_3} \alpha_3 - \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \beta_3, \quad L_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} \beta_3 - \frac{\partial U}{\partial \beta_3} \gamma_3, \quad L_{x_3} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} \alpha_3. \quad (4.1.8)$$

Компоненты рассматриваемого момента по осям $Oy_1y_2y_3$ выражаются через $L_{x_1}, L_{x_2}, L_{x_3}$ по формулам

$$L_1 = (L_{x_2} \sin \lambda + L_{x_1} \cos \lambda) \cos \delta - L_{x_3} \sin \delta, \quad (4.1.9)$$

$$L_2 = L_{x_2} \cos \lambda - L_{x_1} \sin \lambda,$$

$$L_3 = (L_{x_2} \sin \lambda + L_{x_1} \cos \lambda) \sin \delta + L_{x_3} \cos \delta.$$

К системе уравнений (4.1.4) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем (см. (1.2.12))

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0(1+e \cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \left[\frac{\eta_1(1-e^2)^3}{P_f^3} \right]^{1/2}, \quad (4.1.10)$$

где ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 – период обращения спутника, e и P_f – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, η_1 – произведение постоянного всемирного тяготения на массу Солнца.

Момент сил (4.1.1) соответствует силовой функции

$$U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 / R^2 \int a_c(\cos \varepsilon_s) d(\cos \varepsilon_s).$$

Рассмотрим два случая: $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_0$ и $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$, которые соответствуют первым двум членам разложения функции $a_c(\cos \varepsilon_s)$ (4.1.3).

Силовые функции в этих случаях имеют вид $U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} a_0 \cos \varepsilon_s$ и $U(\cos \varepsilon_s) = -\frac{R_0^2}{2R^2} a_1 \cos^2 \varepsilon_s$ соответственно, причем $\cos \varepsilon_s = \gamma_3 \cos v + \alpha_3 \sin v$.

Заметим, что первый случай соответствует, например, спутнику сферической формы со смещенным относительно центра сферы центром масс.

Введем в систему уравнений (4.1.4), (4.1.10) малые параметры. Предположим, что $\omega_0 \sim \varepsilon$, а также $a_0 \sim \varepsilon \ll 1$ или $a_1 \sim \varepsilon$ в зависимости от того, какой из случаев рассматривается. Исследуем системы (4.1.4), (4.1.10) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применим метод усреднения [16 – 18]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера-Пуансо проводим по методике работ [26, 28] для нерезонансных случаев.

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда момент сил светового давления (4.1.1) равен нулю. В этом случае вращение спутника является движением Эйлера-Пуансо. Величины δ , λ , G , T , ν обращаются в постоянные, а θ , φ , ψ – некоторые функции времени. Медленными переменными в возмущенном движении будут δ , λ , G , T , ν , а быстрыми – углы Эйлера θ , φ , ψ .

Проведем усреднение первых трех уравнений системы (4.1.4) и (4.1.6) вдоль траектории невозмущенного движения. Согласно [26], усреднение выполняется сначала по переменной ψ , а затем по θ и φ , связанным соотношением (4.1.7). Оно проводится по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера-Пуансо. Усреднение правых частей первых трех уравнений (4.1.1) по ψ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda \dot{} &= (G \sin \delta)^{-1} \frac{\partial M_\psi}{\partial \delta}, \quad \delta \dot{} = -(G \sin \delta)^{-1} \frac{\partial M_\psi}{\partial \lambda}, \\ G \dot{} &= 0, \quad M_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Усредним правую часть уравнения (4.1.6) по углу ψ . В первом случае на основании формул (4.1.8), (4.1.9) имеем

$$\begin{aligned} L_1 &= -R_0^2 R^{-2} a_0 \left[\alpha_3 \sin \delta \cos \nu + \beta_3 \sin(\lambda - \nu) \cos \delta - \gamma_3 \sin \delta \sin \nu \right], \\ L_2 &= -R_0^2 R^{-2} a_0 \beta_3 \cos(\lambda - \nu), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$L_3 = -R_0^2 R^{-2} a_0 \left[-\alpha_3 \cos \delta \cos \nu + \beta_3 \sin(\lambda - \nu) \sin \delta + \gamma_3 \cos \delta \sin \nu \right].$$

Используя выражения направляющих косинусов α_3 , β_3 , γ_3 оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ [25], из формул (4.1.12) получим

$$M_\psi (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) = R_0^2 R^{-2} a_0 \sin \theta \sin \delta \sin(\lambda - \nu).$$

Отсюда следует, что после усреднения по ψ и проектирования вектора \mathbf{G} на оси связанной системы координат согласно формулам

$$G_{z_1} = G \sin \theta \sin \varphi, \quad G_{z_2} = G \sin \theta \cos \varphi, \quad G_{z_3} = G \cos \theta \quad (4.1.13)$$

уравнение (4.1.6) принимает вид

$$T \dot{} = \frac{R_0^2}{R^2} a_0 \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{G_{z_1} G_{z_2}}{G} \sin \delta \cos(\lambda - \nu). \quad (4.1.14)$$

Усредним теперь правую часть уравнения (4.1.6) по ψ для второго случая. Из формулы для момента сил светового давления (4.1.1) с учетом совпадения оси Oz_3 и оси симметрии спутника следует [115]

$$L = a_1 R_0^2 R^{-2} \cos \varepsilon_s (\gamma' \mathbf{z}_1 - \gamma \mathbf{z}_2), \quad (4.1.15)$$

где $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ – орты осей Oz_1 и Oz_2 .

Как известно [26], момент гравитационных сил, действующих на спутник имеет вид

$$L = 3\eta_2 R_1^{-3} \left[(A_3' - A_2') \gamma' \gamma'' \mathbf{z}_1 + (A_1' - A_3') \gamma'' \gamma \mathbf{z}_2 + (A_2' - A_1') \gamma \gamma' \mathbf{z}_3 \right]. \quad (4.1.16)$$

Здесь A_1', A_2', A_3' – главные центральные моменты инерции спутника, находящегося в гравитационном поле, η_2 – произведение постоянной всемирного тяготения на массу Земли, R_1 – расстояние от центра Земли до центра масс спутника. Отметим также, что согласно [25] $\gamma'' = \gamma_3 \cos \nu + \alpha_3 \sin \nu = \cos \varepsilon_s$.

Момент сил светового давления, определяемый формулой (4.1.15), совпадает с моментом гравитационных сил (4.1.16), действующим на спутник, находящийся в гравитационном поле, главные центральные моменты инерции которого имеют вид

$$A_1' = A_2' = a_1 \frac{R_0^2 R_1^3}{3\eta_2 R^2}, \quad A_3' = \frac{2a_1 R_0^2 R_1^3}{3\eta_2 R^2}. \quad (4.1.17)$$

Движение спутника с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс под действием гравитационных моментов исследовано в [26]. Согласно [26], проекции момента гравитационных сил на оси Oy_1, Oy_2, Oy_3 для трехосного спутника могут быть представлены в виде

$$L_1 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_2 \sigma_j s_{3j} - \sigma_3 \sigma_j s_{2j}),$$

$$L_2 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_3 \sigma_j s_{1j} - \sigma_1 \sigma_j s_{3j}),$$

$$L_3 = 3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\sigma_1 \sigma_j s_{2j} - \sigma_2 \sigma_j s_{1j}),$$

$$s_{ij} = A_1' \alpha_{i1} \alpha_{j1} + A_2' \alpha_{i2} \alpha_{j2} + A_3' \alpha_{i3} \alpha_{j3}.$$

Здесь α_{ij} определены формулами (1.1.1), $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – направляющие косинусы вектора \mathbf{e}_r в системе координат $Oy_1y_2y_3$, равные

$$\sigma_1 = \cos \delta \cos(\nu - \lambda), \quad \sigma_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \sigma_3 = \sin \delta \cos(\nu - \lambda).$$

Учитывая, что согласно (4.1.17) $A'_1 = A'_2$, после вычислений получим

$$\begin{aligned} M_\psi \{L_3\} &= M_\psi \{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi\} = 0, \\ M_\psi \{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi\} &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2(1 - e^2)^3} \times \\ &\times (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2) (A'_1 - A'_3) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

здесь $M_\psi \{ \}$ – оператор усреднения по ψ .

Отсюда следует, что после усреднения по ψ уравнение (4.1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} T &= G(A'_1 - A'_3) \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2(1 - e^2)^3} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \times \\ &\times \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2) = (A'_1 - A'_3) \times \quad (4.1.18) \\ &\times \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{3G_{z_1} G_{z_2} G_{z_3} \omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G^2 2(1 - e^2)^3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3^2). \end{aligned}$$

В формулах (4.1.14) и (4.1.18) от быстрых переменных зависят только величины $G_{z_1}, G_{z_2}, G_{z_3}$. Но средние значения их произведений $G_{z_1} G_{z_2}$ и $G_{z_1} G_{z_2} G_{z_3}$ по полодии невозмущенного движения равны нулю в силу симметрии участков полодий относительно координатных плоскостей $Oz_1z_2, Oz_1z_3, Oz_2z_3$. Поэтому в обоих случаях после усреднения по полодии уравнение (4.1.6) принимает вид $T = 0$ и, следовательно, $T = T_0 = const$. Это означает, что уравнения для углов λ и δ после усреднения можно рассматривать независимо от других уравнений для медленных переменных.

Средние по ψ значения силовой функции в первом и втором случаях будут соответственно

$$M_{\psi}(U) = -a_0 R_0^2 R^{-2} \cos \theta \sin \varphi \cos(\lambda - \nu),$$

$$M_{\psi}(U) = -\frac{a_1 R_0^2}{2R^2} \left[(1 - 3/2 \sin^2 \theta) \sin^2 \delta \cos^2(\lambda - \nu) + 1/2 \sin^2 \theta \right].$$

Теперь силовую функцию нужно усреднить вдоль полодии невозмущенного движения. Невозмущенное движение трехосного спутника подробно исследовано в [28].

Вычислим усредненное значение силовой функции в первом приближении. Примем для определенности $A_1 > A_2 > A_3$. Функция $\theta(t)$ определяется разными формулами в зависимости от знака величины $2T_0 A_2 - G_0^2$. Если $2T_0 A_2 - G_0^2 > 0$, то (см. [28, 305]), $\cos \theta(\tau) = b d n \tau$. При $2T_0 A_2 - G_0^2 < 0$ получим $\cos \theta(\tau) = b c n \tau$. Здесь $d n \tau$, $c n \tau$ – эллиптические функции [308], периодические по τ с периодом $Q_{\tau} = 4K(k^2)$, $K(k^2)$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$$b^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1 + h}, \quad \varepsilon_1 = \frac{A_3(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)}, \quad h = \left(\frac{2T_0}{G_0^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3},$$

$$\tau = \beta t, \quad \beta = \frac{G_0(A_1 - A_2)}{A_1 A_2 \varepsilon_1} \sqrt{1 + \varepsilon_1}, \quad k^2 = \frac{b^2 - h}{b^2}.$$

Формулы для модуля эллиптических функций k^2 и β приведены для $h > 0$. Остальные соотношения справедливы при любых значениях h .

Движениям в окрестности оси Oz_3 (оси момента инерции A_3) соответствует значение $h > 0$ ($2T_0 A_2 - G_0^2 > 0$), движениям в окрестности Oz_1 (оси момента инерции A_1) – значение $h < 0$ ($2T_0 A_2 - G_0^2 < 0$), а $h = 0$ ($2T_0 A_2 = G_0^2$) отвечает движению по сепаратрисе.

В результате усреднения по полодии в случае $a_c = a_0$ с использованием формул для интегралов от эллиптических функций [308] получим систему уравнений для δ и λ

$$\dot{\delta} = -a_0 R_0^2 (G_0 R^2)^{-1} F \sin(\lambda - \nu), \quad (4.1.20)$$

$$\dot{\lambda} = -a_0 R_0^2 (G_0 R^2)^{-1} F \operatorname{ctg} \delta \cos(\lambda - \nu),$$

$$F = \frac{\pi b}{2K(k^2)} \text{ при } 2T_0 A_2 - G_0^2 > 0,$$

$$F = 0 \text{ при } 2T_0 A_2 - G_0^2 < 0.$$

В случае $a_c = a_1 \cos \varepsilon_s$ усредненная система первого приближения для δ и λ принимает вид

$$\delta \dot{} = -a_1 R_0^2 (2G_0 R^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \quad (4.1.21)$$

$$\lambda \dot{} = -a_1 R_0^2 (G_0 R^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu),$$

$$H = \frac{1}{2} \left[3b^2 \frac{E(k^2)}{K(k^2)} - 1 \right] \text{ при } 2T_0 A_2 - G_0^2 > 0,$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3b^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k^2)}{K(k^2)} \right] - 1 \right\} \text{ при } 2T_0 A_2 - G_0^2 < 0.$$

При этом для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения.

В системах уравнений (4.1.20) и (4.1.21) удобно перейти к новой независимой переменной $\nu = \nu(t)$. В силу уравнения (4.1.10) и уравнения движения центра масс спутника по плоской эллиптической орбите $R = P_f / (1 + e \cos \nu)$ после перехода от независимой переменной t к переменной ν системы (4.1.20) и (4.1.21) примут вид

$$d\delta / d\nu = -a_0 R_0^2 (G_0 \sqrt{\eta_1 P_f})^{-1} F \sin(\lambda - \nu), \quad (4.1.22)$$

$$d\lambda / d\nu = -a_0 R_0^2 (G_0 \sqrt{\eta_1 P_f})^{-1} F \operatorname{ctg} \delta \cos(\lambda - \nu).$$

$$d\delta / d\nu = -a_1 R_0^2 (2G_0 \sqrt{\eta_1 P_f})^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \quad (4.1.23)$$

$$d\lambda / d\nu = -a_1 R_0^2 (G_0 \sqrt{\eta_1 P_f})^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu).$$

Обозначим $\chi_\nu = \lambda - \nu$. Координата χ_ν есть угол между текущим радиус-вектором орбиты \mathbf{e}_r и проекцией вектора \mathbf{G} на плоскость орбиты. Таким образом, углы δ , χ_ν дают положение вектора \mathbf{G} во вращающейся системе координат \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e}_r , где \mathbf{n} направлено по нормали к плоскости

орбиты, τ – по трансверсали (рис. 40). Уравнения (4.1.22), (4.1.23) в переменных δ , χ_v принимают вид

$$d\delta / dv = -a_0 R_0^2 \left(G_0 \sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} F \sin \chi_v, \quad (4.1.24)$$

$$d\lambda / dv = -a_0 R_0^2 \left(G_0 \sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} F \operatorname{ctg} \delta \cos \chi_v - 1.$$

$$d\delta / dv = -a_1 R_0^2 \left(2G_0 \sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} H \sin \delta \sin 2\chi_v, \quad (4.1.25)$$

$$d\lambda / dv = -a_1 R_0^2 \left(G_0 \sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} H \cos \delta \cos^2 \chi_v - 1.$$

Системы уравнений (4.1.24) и (4.1.25) являются автономными и имеют первые интегралы

$$G_0 \cos \delta - a_0 R_0^2 \left(\sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} F \cos \varepsilon_G = \operatorname{const}, \quad (4.1.26)$$

$$G_0 \cos \delta - a_0 R_0^2 \left(2\sqrt{\eta_1 P_f} \right)^{-1} H \cos^2 \varepsilon_G = \operatorname{const}. \quad (4.1.27)$$

Здесь ε_G – угол между векторами \mathbf{G} и \mathbf{e}_r (рис. 40), $\cos \varepsilon_G = \sin \delta \cos \chi_v$.

Первые интегралы (4.1.26) и (4.1.27) отличаются от первых интегралов для систем, описывающих изменение углов δ и χ_v в случае динамически симметричного спутника [25], только множителями F и H . Поэтому результаты могут быть перенесены на рассматриваемый нами случай вызванного моментом сил светового давления движения относительно центра масс космического аппарата с трехосным эллипсоидом инерции, представляющим собой тело вращения.

Первый интеграл (4.1.26) может быть записан в виде

$$\cos \chi = \operatorname{const}, \quad (4.1.28)$$

где χ – угол между векторами \mathbf{G} и прямой OP , лежащей в плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_r)$ и составляющей с вектором \mathbf{n} угол δ^* . Величина угла δ^* определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \delta^* = -n_0, \quad n_0 = \frac{a_0 R_0^2}{G_0 \sqrt{\eta_1 P_f}} F.$$

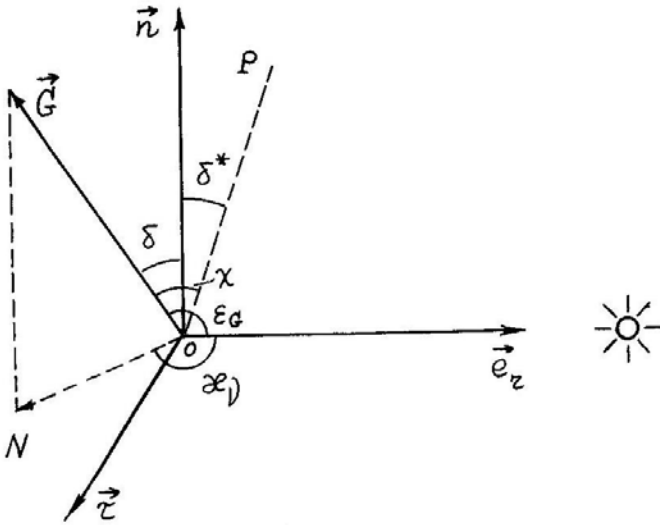


Рис. 40

Равенство (4.1.28) означает, что в системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_r)$ движение вектора кинетического момента \mathbf{G} представляет собой равномерное по V вращение вокруг прямой OP . В [25] определена угловая скорость вращения вектора \mathbf{G} , равная $-\sqrt{1+n_0^2}$.

Заметим, что если начальные условия T_0 и G_0 таковы, что $2T_0A_2 - G_0^2 > 0$, то $F = 0$ и угол δ^* равен нулю. Тогда движение вектора \mathbf{G} в системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_r)$ является вращением с угловой скоростью 1 вокруг вектора \mathbf{n} . В системе координат $Ox_1x_2x_3$ вектор \mathbf{G} будет постоянным. Это означает, что оскулирующие элементы не изменяются.

Если же T_0 и G_0 таковы, что $2T_0A_2 - G_0^2 < 0$, то угол δ^* отличен от нуля и вращение вектора \mathbf{G} происходит вокруг оси OP , наклонной к источнику света, причем угол наклона тела тем больше, чем больше величина n_0 .

Исследование движения спутника во втором случае на основании первого интеграла (4.1.27) может быть проведено также, как это сделано в [25] для случая динамически симметричного спутника в гравитационном поле на круговой орбите, поскольку система уравнений (4.1.25) отличается

от системы уравнений, описывающей движение спутника в гравитационном поле на круговой орбите, только множителем H , зависящим от начальных данных T_0, G_0 .

§2. Эволюция вращений спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления.

2.1. Исходные предположения и постановка задачи.

Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Введем три правых декартовых системы координат $Ox_1x_2x_3, Oy_1y_2y_3, Oz_1z_2z_3$ (см. §1 главы 1, рис.1, 2), начало координат совместим с центром инерции спутника. Углы δ, λ и углы Эйлера φ, ψ, θ , определяющие ориентацию системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно системы $Oy_1y_2y_3$, введены в §1 главы 1.

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме сил светового давления. Как и в §1 допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен по оси Oz_3 . В этом случае для момента сил светового давления \mathbf{L} , действующего на спутник, имеет место формула (4.1.1). Далее полагаем $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от ориентации оси симметрии тела в пространстве. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде (4.1.3). Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $G, \delta, \lambda, \theta, \varphi, \psi$ имеют вид (4.1.4). Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $v(t)$ и от направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ согласно (4.1.8). К системе уравнений (4.1.4) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем (4.1.10).

Момент сил (4.1.1) соответствует силовой функции

$$U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} \int a_c(\cos \varepsilon_s) d(\cos \varepsilon_s).$$

Рассмотрим вначале случай

$$a_c(\cos \varepsilon_s) = a_n \cos^n \varepsilon_s. \quad (4.2.1)$$

Силовая функция в этом случае имеет вид

$$U(\cos \varepsilon_s) = -\frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \cos^{n+1} \varepsilon_s, \quad (4.2.2)$$

$$\cos \varepsilon_s = \gamma_3 \cos \nu + \alpha_3 \sin \nu.$$

Направляющие косинусы α_3 , β_3 выражаются через δ , λ , θ , ψ по известным формулам [25].

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A_1 = J_0 + \varepsilon A_1', \quad A_2 = J_0 + \varepsilon A_2', \quad A_3 = J_0 + \varepsilon A_3', \quad (4.2.3)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Предположим также, что $a_0 \sim \varepsilon$, $a_1 \sim \varepsilon$, ..., $a_N \sim \varepsilon$, т.е. момент сил светового давления имеет тот же порядок величины ε , что и гироскопический момент. Из (4.2.2) следует, что $U \sim \varepsilon$. Исследуем решение системы (4.1.4), (4.1.10) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину $O(\varepsilon)$ на интервале времени, за который тело совершит ε^{-1} оборотов. Независимое усреднение по ψ , ν проводим как для нерезонансных случаев [26].

2.2. Преобразование выражения силовой функции, процедура усреднения и построение системы первого приближения.

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда уравнения (4.1.4), (4.1.10) описывают движение сферически симметричного тела и момент сил светового давления (4.1.1) равен нулю. Из системы (4.1.4) в этом случае получим, что λ , δ , G , θ и φ постоянны, а ψ определяется по формуле (1.2.17).

Как показано в [25] и в главе 1 нашего пособия усреднение функций, зависящих от ν , сводится к усреднению по ν согласно (1.2.19).

Смножитель $\cos^{n+1} \varepsilon_s$ выражения силовой функции (4.2.2) можно с использованием выражения для биннома Ньютона представить в виде

$$\cos^{n+1} \varepsilon_s = (d + g \cos \nu)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cos^k \nu (g^k d^{n+1-k}), \quad (4.2.4)$$

$$d = \cos \theta \sin \delta \cos(\lambda - \nu), \quad \nu = \psi - \zeta,$$

$$g = \left\{ \sin^2 \theta \left[\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \right] \right\}^{1/2},$$

$$\cos \zeta = \sin \theta \sin(\lambda - \nu) \left\{ \sin^2 \theta \left[\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \right] \right\}^{-1/2},$$

$$\sin \zeta = \sin \theta \cos \delta \cos(\lambda - \nu) \left\{ \sin^2 \theta \left[\sin^2(\lambda - \nu) \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \right] \right\}^{-1/2}.$$

С помощью известных выражений для направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz_3 относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ [25] получим среднее по ψ значение силовой функции. Для этого определим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d + g \cos \nu)^{n+1} d\nu = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k g^k d^{n+1-k} I_k, \quad (4.2.5)$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k \nu d\nu, \quad I_{2m+1} = 0, \quad I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.$$

В результате усреднения по ψ получим с учетом (4.2.7)

$$U_n = -\frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} C_{n+1}^{2m} (g^{2m} d^{n+1-2m}) \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \quad (4.2.6)$$

где $E(z)$ означает целую часть числа z .

Для упрощения записи усредненные выражения будем обозначать теми же символами, что и до усреднения.

Проведем усреднение по ν согласно (1.2.19). Заметим, что с учетом уравнения движения центра масс по эллиптической орбите имеем $R = P_f(1 + e \cos \nu)^{-1}$, поэтому на основании (1.2.19) и (4.2.6) выражения $(1 + e \cos \nu)^2$ в формуле для U_n сокращаются.

Обозначим $u = \lambda - \nu$; тогда $d = h \cos u$, где $h = \cos \theta \sin \delta$; выражение g^{2m} в (4.2.6) с помощью формулы бинома Ньютона представим в виде

$$g^{2m} = (b + q \sin^2 u)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \sin^{2k} u (q^k b^{m-k}),$$

$$b = \sin^2 \theta \cos^2 \delta, \quad q = \sin^2 \theta \sin^2 \delta.$$

Для второго усреднения по $u = \lambda - \nu$ необходимо рассмотреть интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b + q \sin^2 u)^m (h \cos u)^{n-2m+1} du = \sum_{k=0}^m h^{n+1-2m} C_m^k (q^k b^{m-k}) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (\cos u)^{n+1-2m} du.$$

Полученный интеграл вычисляется в явном виде [327], причем при $n = 2l$ он равен нулю.

Пусть $n = 2l + 1$ – нечетная степень; тогда имеем

$$k = 0, 1, \dots, m; \quad m = 0, 1, \dots, E\left(\frac{n+1}{2}\right) = l + 1.$$

После усреднения (4.2.6) по $u = \lambda - \nu$ получим

$$U_{2l+1} = -\sigma_l \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \sin^{2m} \theta (\sin \delta)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta)^{2(m-k)},$$

$$\sigma_l = \frac{a_{2l+1} R_0^2 (1 - e^2)^{3/2}}{2(l+1) P_f^2},$$

$$A_{lmk} = C_{2(l+1)}^{2m} C_m^k \frac{(2m-1)!!(2k-1)!![2(l+1-m)-1]!!}{(2m)!![2(k+l+1-m)]!!}.$$

Силовая функция для коэффициента момента сил светового давления вида (4.1.3) записывается следующим образом

$$U(\theta, \delta) = \sum_{l=0}^Q U_{2l+1}(\theta, \delta), \quad Q = E\left(\frac{N-1}{2}\right). \quad (4.2.8)$$

Таким образом, в первом приближении коэффициент момента сил светового давления (4.1.3) эквивалентен следующему

$$a_c \sim \tilde{a}_c = \sum_{l=0}^Q a_{2l+1} (\cos \varepsilon_s)^{2l+1}, \quad (4.2.9)$$

поскольку четные гармоники коэффициента момента сил светового давления выпадают при усреднении.

Вычисляя частные производные $\partial U / \partial \delta$, $\partial U / \partial \theta$ от функции (4.2.7) с учетом (4.2.8) и учитывая тождества

$$\partial U / \partial \lambda = \partial U / \partial \psi = \partial U / \partial \varphi = 0$$

находим, что усредненная система первого приближения принимает вид

$$\lambda = -2\sigma_l (G \sin \delta)^{-1} \partial U / \partial \delta, \quad (4.2.10)$$

$$\delta = 0, \quad G = 0, \quad \theta = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}),$$

$$\varphi = G \cos \theta (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) - 2\sigma_l (G \sin \theta)^{-1} \partial U / \partial \theta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \sin^{2m} \theta (\sin \delta)^{2(l-m+k)+1} (\cos \delta)^{2(m-k)-1} \times$$

$$\times \left[(l+1) \cos^2 \delta + k - m \right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\sin \delta)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta)^{2(m-k)} (\cos \theta)^{2(l-m)+1} (\sin \theta)^{2m-1} \times$$

$$\times \left[m - (l+1) \sin^2 \theta \right].$$

Коэффициенты σ_l и A_{lmk} определены в (4.2.7). Заметим, что коэффициенты a_{2l} разложения (4.1.3), содержащие четные степени, при усреднении исчезают. Вектор кинетического момента остается постоянным по величине и постоянно наклоненным к нормали к плоскости орбиты.

2.3. Исследование уравнений для углов нутации и собственного вращения θ , φ .

Уравнения для определения углов нутации θ и собственного вращения φ (4.2.10) описывают движение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно тела и приводятся к виду (в медленном времени ξ):

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (4.2.11)$$

$$\varphi' = \cos \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi) - 2\sigma_l \beta^{-1} G_0^{-2} (\sin \theta)^{-1} \partial U(\theta, \delta_0) / \partial \theta,$$

$$\xi = G_0 \beta t, \quad \eta_1 = -\gamma / \beta, \quad \beta = A_1^{-1} - A_2^{-1}, \quad \gamma = A_2^{-1} - A_3^{-1}.$$

Параметр σ_l определен в (4.2.7), а $\partial U(\theta, \delta_0) / \partial \theta$ введено в (4.2.10). Величины G_0 , δ_0 в (4.2.11) – это значения G , δ в начальный момент времени. С учетом соотношений (4.2.3) и предположения $a_{2l+1} \sim \varepsilon$ ($l = 0, \dots, Q$) получим, что β , γ , $\sigma_l \sim \varepsilon$. Для системы (4.2.11) имеет место первый интеграл

$$c = \sin^2 \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi) - 4\sigma_l \beta^{-1} G_0^{-2} f(\theta, \delta_0), \quad (4.2.12)$$

$$f(\theta, \delta_0) = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} \left[\frac{m}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (l+1) \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1} \right] (\sin \delta_0)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta_0)^{2(m-k)},$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейших исследований более удобно преобразованное выражение первого интеграла (4.2.12).

$$c = \sin^2 \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi) - 4\sigma_l \beta^{-1} G_0^{-2} F(\theta, \delta_0), \quad (4.2.13)$$

$$F(\theta, \delta_0) = \sum_{l=0}^Q \left\{ \left[-\frac{l+1}{2} \sum_{i=0}^l C_l^i \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2i+1}}{i+1} \right] (\sin \delta_0)^{2(l+1)} \frac{[2(l+1)-1]!!}{[2(l+1)]!!} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^l \sum_{k=0}^m A_{lmk} \left[\frac{m}{2} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \frac{l+1}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1} \right] \times \right. \\ \left. \times (\sin \delta_0)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta_0)^{2(m-k)} + \frac{[2(l+1)-1]!! (\sin \theta)^{2(l+1)}}{2[2(l+1)]!!} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k (\sin \delta_0)^{2k} (\cos \delta_0)^{2(l+1-k)} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right\}.$$

При отсутствии влияния момента сил светового давления, т.е. при $a_{2l+1} = 0 (l = 0, \dots, Q)$ система (4.2.11) приводится к виду

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \cos \theta (\eta_1 - \sin^2 \varphi). \quad (4.2.14)$$

2.4. Пример 10. Учет нулевой и первой гармоник при аппроксимации коэффициента момента сил светового давления.

2.4.1. Аналитическое исследование.

Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s. \quad (4.2.15)$$

В этом случае уравнения для определения θ и φ , как следует из (4.2.13), принимают вид (остаются члены, обусловленные a_1):

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \cos \theta (\eta^* - \sin^2 \varphi), \quad (4.2.16)$$

$$\eta^* = (\alpha - \gamma) / \beta, \quad \alpha = -\frac{1}{2} (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 P_f^{-2} G_0^{-2} (1 - 3/2 \sin^2 \delta_0).$$

Здесь G_0 – значение G в начальный момент времени. Для системы (4.2.16) имеет место первый интеграл

$$C_1 = \sin^2 \theta (\eta^* - \sin^2 \varphi) = \sin^2 \theta (\eta^* - \sin^2 \varphi_0) = const. \quad (4.2.17)$$

Этот результат можно также получить из выражения первого интеграла (4.2.13) для функции a_c вида (4.1.3) при $n = 1$ ($l = 0$).

Положим для определенности $A_1 > A_2 > A_3$; тогда $\beta < 0$, $\gamma < 0$, $\eta^* < 0$. Введем переменную $x = \cos \theta$. После ряда преобразований с учетом (4.2.17) уравнение (4.2.16) для определения θ допускает разделение переменных и приводится к соотношению

$$\phi(t - t_0) = \int_{x_0}^x [(x_1^2 - h)(b_1^2 - x_1^2)]^{-1/2} dx_1, \quad (4.2.18)$$

$$\phi = G_0 (A_2^{-1} - A_1^{-1}) [\eta^* (\eta^* - 1)]^{1/2}, \quad h = 1 - c_1 / \eta^*, \quad b_1^2 = 1 - c_1 / (\eta^* - 1).$$

Таким образом, задача свелась к квадратуре: справа в (4.2.18) стоит эллиптический интеграл. Обращение интеграла (4.2.18) для получения решения уравнений (4.2.16) проводится по-разному в зависимости от значений корней в подрадикальном выражении интеграла (4.2.18).

Если положить $A_3 > A_2 > A_1$, то $\beta > 0$, $\gamma > 0$. При этом $\eta^* > 0$, если $\alpha > \gamma$ и $\eta^* < 0$, если $\alpha < \gamma$. Эти случаи рассматриваются аналогично. Рассмотрим некоторые неравенства, которым удовлетворяют величины h и b_1^2 в (4.2.18).

Можно показать, что

$$h = 1 - c_1 / \eta^* \leq 1, \quad h \leq b_1^2, \quad b_1^2 \leq 1,$$

Откуда следуют неравенства $h \leq b_1^2 \leq 1$. Они могут удовлетворяться как при $h \leq 0$, так и при $h \geq 0$.

Проведем обращение интеграла (4.2.18) для случая $h \leq 0$. В этом случае $|x| \leq b_1$, поэтому сделаем замену переменной $x = b_1 \cos \omega$ и интеграл (4.2.18) приводится к виду

$$\tau = \Theta(t - t_*) = \int_0^\omega (1 - k^2 \sin^2 \omega)^{-1/2} d\omega, \quad (4.2.19)$$

$$\Theta = \phi(b_1^2 - h)^{1/2}, \quad k^2 = b_1^2 / (b_1^2 - h) \leq 1.$$

Здесь t_* – некоторый фиксированный момент времени. Таким образом, получен эллиптический интеграл первого рода. Обращение этого интеграла дает [308]

$$\omega = am\tau, \quad \cos \omega = cn\tau, \quad \cos \theta = b_1 cn\tau. \quad (4.2.20)$$

Амплитуда $\cos \theta$ равна b_1 . По аргументу τ функции $\text{cn}\tau$, $\text{sn}\tau$ являются периодическими с периодом $T_\tau = 4K(k^2)$. Период колебаний угла θ по времени равен $T_\theta = \frac{4K(k^2)}{\Theta}$. Таким образом, зависимость θ от времени вычисляется известным образом через эллиптические функции Якоби.

Для вычисления неизвестной $\varphi(t)$ достаточно знать, как изменяются со временем функции $\sin \varphi \sin \theta$ и $\cos \varphi \sin \theta$. Чтобы определить эти функции, обратимся к первому интегралу (4.2.17). Используя этот интеграл, получаем (для определенности берется знак плюс [28])

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \theta &= \left[\eta^* (h - b_1^2) \right]^{1/2} dnt, \\ \cos \varphi \sin \theta &= (1 - \eta^*)^{1/2} b_1 \text{sn}\tau. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Таким образом, все направляющие косинусы вектора кинетического момента с главными центральными осями инерции периодичны с периодом T_θ .

Принтегрируем теперь уравнение (4.2.16) для случая $h \geq 0$. Обозначим $h = b_2^2$ и представим интеграл (4.2.21) в виде

$$\phi(t - t_0) = \int_x^{b_1} \left[(b_1^2 - x_1^2)(x_1^2 - b_2^2) \right]^{-1/2} dx_1. \quad (4.2.22)$$

Сделаем замену переменных $x_1^2 = b_1^2 \cos^2 \omega + b_2^2 \sin^2 \omega$. После ряда выкладок интеграл (4.2.2) примет вид (4.2.19), где $\Theta \rightarrow b_1 \phi$, $t_* \rightarrow t_0$, а модуль k описывается соотношением $0 \leq k^2 = (b_1^2 - b_2^2) b_1^{-2} < 1$. Обращение этого интеграла запишется следующим образом: $\omega = a n \tau$, $\tau = b_1 \phi(t - t_0)$. Тогда

$$x = \cos \theta = b_1 d n \tau. \quad (4.2.23)$$

Используя первый интеграл (4.2.16) получим (с точностью до знака)

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \theta &= \left[\eta^* (b_2^2 - b_1^2) \right]^{1/2} \text{cn}\tau, \\ \cos \varphi \cos \theta &= \left[(1 - \eta^*) (b_1^2 - b_2^2) \right]^{1/2} \text{sn}\tau. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Таким образом, в первом приближении метода усреднения имеет место аналогия решаемой задачи со случаем Эйлера-Пуансо (в уравнениях (4.2.14) и (4.2.18) отличаются только множители η_1 и η^*). В медленном времени τ задача о движении близкого к динамически-сферическому твердого тела под действием момента сил светового давления эквивалентна задаче о движении фиктивного твердого тела с произвольными моментами инерции. Это обусловлено взятым приближением функции $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_S$ и является основным качественным результатом исследования.

2.4.2 Качественный анализ фазовой плоскости угловых переменных (θ, φ) .

Исследуем систему для θ и φ (4.2.16) с первым интегралом c_1 (4.2.17). В этой системе переменные θ , φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, а параметр η^* может принимать произвольные значения: $-\infty < \eta^* < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции). Область D допустимых значений параметров (c_1, η_1) приведена на рис. 41. Выделим три подобласти $D_{1,2,3}$, подобласть D_1 определяется неравенствами $\eta^* \geq c_1 \geq 0$ ($\eta^* \geq 1$), подобласть D_2 определяется следующими соотношениями $\eta^* \geq c_1 \geq \eta^* - 1$ ($0 \leq \eta^* \leq 1$) и, наконец, для D_3 имеем $0 \geq c_1 \geq \eta^* - 1$ ($\eta^* \leq 0$). Допустимая область D параметров системы (c_1, η^*) есть $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ – это все множество точек, которые находятся между положительной осью абсцисс и биссектрисой, параллелограмм, между отрицательной осью абсцисс и сдвинутой вниз биссектрисой (рис. 41).

Особыми подмножествами системы (4.2.16) являются границы подобластей $D_{1,2,3}$. В областях D_1 и D_3 движение представляет собой колебания по θ и колебания или вращения по φ . Сепаратриса для области D_1 задается соотношением $\sin^2 \theta = (\eta^* - 1)(\eta^* - \sin^2 \varphi)^{-1}$, а для области D_3 получим $\sin^2 \theta = \eta^*(\eta^* - \sin^2 \varphi)^{-1} \leq 1$. В области D_2 имеют место колебания по θ и φ .

Можно рассмотреть 11 различных характерных случаев выбора параметра η^* .:

- 1) $\eta^* = 0$, 2) $\eta^* = 1$, 3) $\eta^* = +\eta_1$,
- 4) $\eta^* = -\eta_1$, 5) $\eta^* = 1 + \eta_1$, 6) $\eta^* = 1 - \eta_1$,
- 7) $\eta^* \ll -1$, 8) $\eta^* \gg +1$, 9) $\eta^* < -1$,
- 10) $\eta^* > +1$, 11) $\eta^* \sim 1/2$, ($0 < \eta_1 \ll 1$).

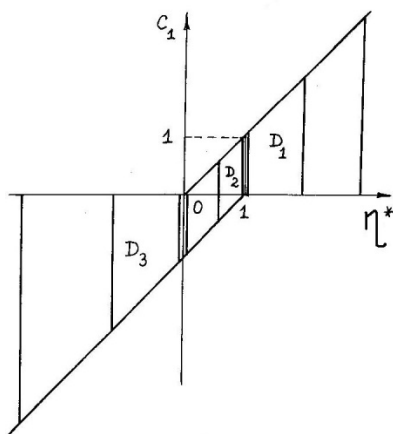


Рис. 41

Семейство графиков зависимости θ от φ , полученных численно из (4.2.17) при $\eta^* = 0$ (случай 1), представлены на рис. 42. Эти графики $\eta^* = 0$ соответствуют колебаниям при различных начальных условиях. Зависимость θ от φ при $\eta^* = 1$ (случай 2) получаются на изображенной на рис. 41 сдвигом на $\pi/2$ вдоль оси φ . При $\eta^* = -1.7$ (случай 9) графические зависимости θ от φ , полученные численно из первого интеграла (4.2.17) представлены на рис. 43. Эти графики соответствуют только колебаниям по θ . По φ – колебания внутри сепаратрисы $\sin^2 \theta = \eta^* (\eta^* - \sin^2 \varphi)^{-1} \leq 1$ и вращения вне сепаратрисы. Если $\eta^* > 1$ (случаи 5, 8, 10), то графические зависимости имеют такой же вид, но про-

исходит сдвиг на $\pi/2$ вдоль оси φ . При $\eta^* \rightarrow -\infty$ (случай 7) зависимости $\theta(\varphi)$ становятся параллельными прямыми. При $\eta^* = 0.95$ (случай 6) возможны только колебания и графические зависимости θ от φ представлены на рис. 44. Зависимость θ от φ при $\eta^* = +\eta_1$ (случай 3) получается из приведенной на рис. 43 соответствующей деформацией. При $\eta^* = 0.5$ (случай 11) графические зависимости колебательных движений представлены на рис. 45.

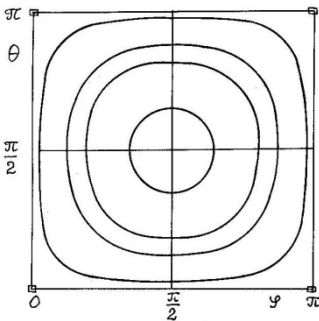


Рис. 42

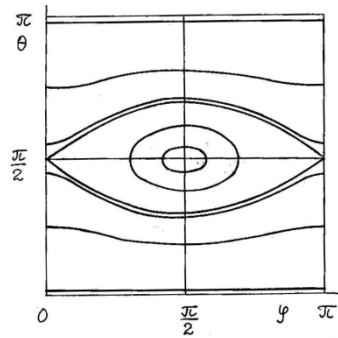


Рис. 43

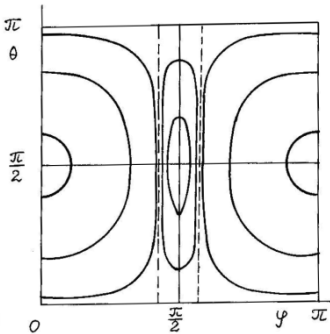


Рис. 44

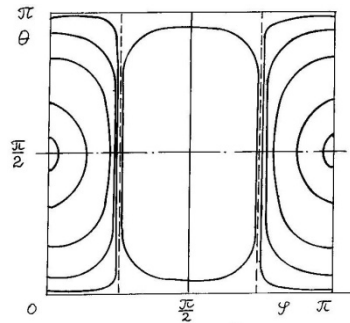


Рис. 45

2.4.3 Исследование эволюции вектора кинетического момента.

Система (4.2.10) для функции a_c вида (4.2.15) записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -1/2(1-e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} P_f^{-2} (1-3/2 \sin^2 \theta) \cos \delta, & (4.2.25) \\ \dot{\delta} &= 0, \quad \dot{G} = 0, \quad \dot{\theta} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}), \\ \dot{\varphi} &= \cos \theta \left[G (A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi) \right] - \\ &\quad - 1/2(1-e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} P_f^{-2} (1-3/2 \sin^2 \delta).\end{aligned}$$

Уравнение (4.2.25) для λ в случае $h \leq 0$ с подстановкой (4.2.20) после ряда преобразований принимает вид

$$d\lambda / d\tau = d(1-3b_1^2 c n^2 \tau), \quad \tau = \Theta(t-t_*), \quad (4.2.26)$$

$$d = 1/4(1-e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-2} A_1 A_2 \cos \delta_0 (A_1 - A_2)^{-1} (-c_1)^{-1/2},$$

где δ_0 – значение δ в начальный момент времени. После интегрирования уравнения получим

$$\lambda = \lambda_0 + d \left[\tau (1 + 3b_1^2 k'^2 / k^2) - 3E(g, k) b_1 / k^2 \right]. \quad (4.2.27)$$

Здесь $E(g, k)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода, k^2 – квадрат модуля эллиптической функции, k'^2 – квадрат дополнительного модуля, λ_0 – значение λ в начальный момент времени, $g = am\tau$ – эллиптическая амплитуда.

При малых значениях k можно пользоваться рядами для $E(g, k)$ [308]. Подставляя их в (4.2.27), получим

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + d \left\{ (2Ky / \pi) \left[1 + 3b_1^2 k^{-2} (k'^2 - E / K) \right] - \right. & (4.2.28) \\ &- 3b_1^2 \left[(1-k^2/4)(2\sin 2y + k^2 \sin 4y) + ((1+k^2)\sin y + k^2 \sin 3y) \times \right. \\ &\left. \left. \times 1/4((1-k^2)\cos y + k^2 \cos 3y)(1-k^2/2) \right] \right\} + O(k^4).\end{aligned}$$

Здесь $y = \pi\tau(2K)^{-1}$; K, E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Формула (4.2.28) справедлива для любых y и малых k и состоит из линейного и колебательного слагаемых по t .

При k , близком к единице, и небольших значениях g можно пользоваться соответствующими разложениями для $E(g, k)$ [307]. Сохраняя члены $\sim k'^2$, получим после подстановки их в (4.2.27) выражение

$$\lambda = \lambda_0 + d \left\{ \tau \left(1 + 3b_1^2 k'^2 k^{-2} \right) - 3b_1^2 k^{-2} \left[\left(1 - k'^2 / 4 \right) \times \right. \right. \quad (4.2.29)$$

$$\left. \left. \times \ln tg \left(1 / 2am\tau + \pi / 4 \right) + 1 / 4k'^2 sn\tau cn^{-2}\tau \right] \right\}.$$

При $h \geq 0$ уравнение для λ (4.2.26) с подстановкой (4.2.23) после ряда преобразований принимает вид

$$d\lambda / d\tau = N \left(1 - 3b_1^2 dn^2\tau \right), \quad \tau = b_1\phi(t - t_0), \quad (4.2.30)$$

$$N = 1 / 4 \left(1 - e^2 \right)^{3/2} a_1 R_0^{-2} G_0^{-2} P_f^{-2} A_1 A_2 \left(A_1 - A_2 \right)^{-1} \left[\eta^* \left(\eta^* - 1 - c_1 \right) \right]^{-1/2} \cos \delta.$$

После интегрирования уравнения (4.2.30) находим

$$\lambda = \lambda_0 + N \left[\tau - 3b_1^2 E(g, k) \right]. \quad (4.2.31)$$

При малых k , используя разложение $E(g, k)$ в ряд [308], определим

$$\lambda = \lambda_0 + N \left[\left(2Ky / \pi \right) \left(1 - 3b_1^2 E / K \right) - 51 / 8b_1^2 k^2 \sin 2y \right] + O(k^4). \quad (4.2.32)$$

Здесь $y = \pi\tau(2K)^{-1}$. Формула (4.2.32) справедлива для любых y и малых k и содержит линейное и колебательное слагаемые.

При k , близком к единице, и небольших g , используя разложение $E(g, k)$ [307], получим

$$\lambda = \lambda_0 + N \left\{ \tau - 3b_1^2 \left[\left(1 - k'^2 / 4 \right) \ln tg \left(am\tau / 2 + \pi / 4 \right) + 1 / 4k'^2 sn\tau cn^{-2}\tau \right] \right\}. \quad (4.2.33)$$

Как следует из уравнения для λ (4.2.25), при θ , близком к 0 или π , скорость $\dot{\lambda}$ знакопеременна; она отрицательна при $\cos \delta > 0$ и положительна, если $\cos \delta < 0$.

В общем случае переменная λ может иметь характер вращательного или колебательного движения. Если θ сильно изменяется, то выражение $1 - 3 / 2 \sin^2 \theta$ может быть знакопеременным. В результате значение λ может быть практически постоянным при $M_t \left\{ 1 - 3 / 2 \sin^2 \theta \right\} = 0$.

Анализ показывает, что существуют значения параметров η^* , θ_0 , φ_0 , при которых $\lambda \approx const$.

В рассматриваемой задаче картина эволюции движения оказывается более сложной по сравнению со случаем динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2 \neq A_3$), так как она содержит большее число (на единицу) медленных переменных.

2.4.4 Частные случаи движения тела.

Значение $\theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (4.2.16). Уравнение для φ при $\theta = 0$ принимает вид, допускающий разделение переменных. После интегрирования этого уравнения получим

$$tg \varphi = l tg \left[\pm r \xi + arctg \left(l^{-1} tg \varphi_0 \right) \right], \quad (4.2.34)$$

$$l = \left[\eta^* / (\eta^* - 1) \right]^{1/2}, \quad r = \left[\eta^* (\eta^* - 1) \right]^{1/2}, \quad \xi = G_0 \beta t.$$

Верхний и нижний знаки у r в (4.2.34) соответствуют случаям $\eta^* > 1$ и $\eta^* < 0$.

Если $0 < \eta^* < 1$, то имеем

$$tg \varphi = \Xi \left[z \exp(J \xi) - w \right] \left[z \exp(J \xi) + w \right]^{-1}, \quad (4.2.35)$$

$$z = 1 + \left[(1 - \eta^*) (\eta^*)^{-1} \right]^{1/2} tg \varphi_0, \quad J = 2 \left[\eta^* (1 - \eta^*) \right]^{1/2},$$

$$w = 1 - \left[(1 - \eta^*) (\eta^*)^{-1} \right]^{1/2} tg \varphi_0, \quad \Xi = \left[\eta^* / (1 - \eta^*) \right]^{1/2}.$$

При малых θ система (4.2.25) записывается следующим образом

$$\dot{\lambda} = -1/2 (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} P_f^{-2} \cos \delta_0, \quad (4.2.36)$$

$$\delta = \delta_0, \quad G = G_0, \quad \theta = G_0 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A_1^{-1} - A_2^{-1}),$$

$$\dot{\varphi} = G_0 \left(A_3^{-1} - A_1^{-1} \sin^2 \varphi - A_2^{-1} \cos^2 \varphi \right) -$$

$$-1/2 (1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G^{-1} P_f^{-2} (1 - 3/2 \sin^2 \delta_0).$$

Здесь учтены члены порядка θ . Уравнение для определения φ в случае малых θ совпадает с соответствующим уравнением при $\theta = 0$ и его решение может быть представлено в виде (4.2.34), (4.2.35). После инте-

грирования уравнения для определения θ (4.2.36) с учетом (4.2.34), получим

$$\theta^2 = \theta_0^2 l^{\mp 2} \left(l^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \right)^{\pm 1} \left\{ \cos^2 \left[\pm r \xi + \arctg \left(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0 \right) \right] + l^2 \sin^2 \left[\pm r \xi + \arctg \left(l^{-1} \operatorname{tg} \varphi_0 \right) \right] \right\}^{\pm 1}. \quad (4.2.37)$$

Верхние и нижние знаки в (4.2.37) отвечают, соответственно, $\eta^* > 1$ и $\eta^* < 0$.

Если $0 < \eta^* < 1$, то с учетом (4.2.35) определим

$$\theta = \theta_0 \left[G \exp(2J\xi) + H \exp(J\xi) + V \right]^{1/2} \exp(-1/2J\xi), \quad (4.2.38)$$

$$G = z(1 + \Xi^2), \quad H = 2zw(1 - \Xi^2), \quad V = w^2(1 + \Xi^2).$$

В результате интегрирования уравнения для определения λ (4.2.36) получим

$$\lambda = -1/2(1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G_0^{-1} P_f^{-2} t \cos \delta_0 + \lambda_0. \quad (4.2.39)$$

Отметим, что для строго динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2 + O(\varepsilon^2)$) уравнения (4.2.25) могут быть проинтегрированы в виде

$$\theta = \theta_0, \quad G = G_0, \quad \delta = \delta_0, \quad \varphi = G_0(\alpha - \gamma)t \cos \theta_0 + \varphi_0, \quad (4.2.40)$$

$$\lambda = -1/2(1 - e^2)^{3/2} a_1 R_0^2 G_0^{-1} P_f^{-2} (1 - 3/2 \sin^2 \theta_0) t \cos \delta_0 + \lambda_0.$$

Таким образом, исследована эволюция вращений спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления, при аппроксимации которого учтены нулевая и первая гармоники, выявлены качественные эффекты.

2.5 Пример 11. Учет третьей и четных гармоник.

Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = \sum_{k=0}^Q a_{2k} \cos^{2k} \varepsilon_s + a_3 \cos^3 \varepsilon_s. \quad (4.2.41)$$

В этом случае уравнение для определения θ и φ , как следует из (4.2.11), принимают вид (остаются члены, обусловленные a_3):

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad ' = \frac{d}{d\xi}, \quad (4.2.42)$$

$$\begin{aligned}\varphi' &= \cos\theta(\eta_2 - \sin^2\varphi - \alpha_1 \sin^2\theta), \quad \eta_2 = -\gamma / \beta - \alpha_1 s, \\ \alpha_1 &= \frac{3a_3 R_0^2}{64G_0^2 P_f^2 \beta} (1 - e^2)^{3/2} (8 - 40\sin^2\delta_0 + 35\sin^4\delta_0), \\ s &= \frac{4\sin^2\delta_0 (4 - 5\sin^2\delta_0)}{8 - 40\sin^2\delta_0 + 35\sin^4\delta_0}.\end{aligned}$$

Величины ξ , β , γ определены в (4.2.11). С учетом соотношения (4.2.3) и предположения $a_3 \sim \varepsilon$ получим, что β , α , γ – величины $\sim \varepsilon$.

Для системы (4.2.42) имеет место первый интеграл, который можно получить непосредственно или из выражения первого интеграла для функции a_c , аппроксимируемой тригонометрическим полиномом произвольного порядка, (4.2.13) при $n = 3$ ($l = 1$)

$$\begin{aligned}c_2 &= \sin^2\theta(\eta_2 - \sin^2\varphi - 1/2\alpha_1 \sin^2\theta) = \\ &= \sin^2\theta_0(\eta_2 - \sin^2\varphi_0 - 1/2\alpha_1 \sin^2\theta_0) = \text{const}.\end{aligned}\quad (4.2.43)$$

Проведем качественный анализ фазовой плоскости (θ, φ) . Исследуем систему для θ и φ (4.2.42) с первым интегралом c_2 (4.2.43). В этой системе переменные θ , φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а параметр η_2 может принимать произвольные значения $-\infty < \eta_2 < +\infty$ (в зависимости от соотношений между моментами инерции). Область D^* допустимых значений параметров приведена на рис. 46.

Определим стационарные точки уравнений (4.2.42), приравняв нулю их правые части.

1) $\cos\theta = 0$, $\theta = \pm\pi/2$, $\varphi = 0, \pi, \pm\pi/2$. Эти точки существуют во всей плоскости (η_2, α_1) .

2) $\sin\theta = 0$, $\theta = 0, \pi$, $\eta_2 - \sin^2\varphi = 0$, $0 \leq \eta_2 \leq 1$, $\varphi = \pm \arcsin\sqrt{\eta_2}$, $\varphi = \pm \arcsin\sqrt{\eta_2} + \pi$. Эти точки существуют в полосе $0 \leq \eta_2 \leq 1$.

3) $\varphi = 0, \pi$, $\eta_2 - \alpha_1 \sin^2\theta = 0$, $0 < \eta_2 / \alpha_1 \leq 1$, $\sin\theta = \pm\sqrt{\eta_2 / \alpha_1}$, $\theta = \pm \arcsin\sqrt{\eta_2 / \alpha_1}$, $\theta = \pm \arcsin\sqrt{\eta_2 / \alpha_1} + \pi$.

Эти точки существуют во внутренности углов, заштрихованных горизонтально на рис. 46, т.е. при

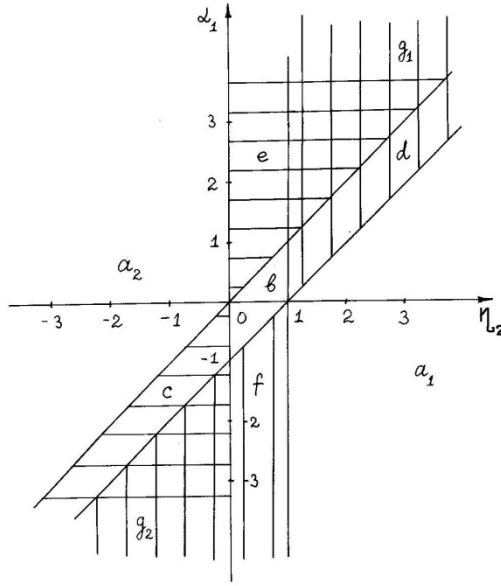


Рис. 46

$$\eta_2 \leq \alpha_1 \quad (\eta_2, \alpha_1 > 0), \quad \eta_2 \geq \alpha_1 \quad (\eta_2, \alpha_1 < 0).$$

$$4) \quad \varphi = \pm \pi / 2, \quad \eta_2 - 1 - \alpha_1 \sin^2 \theta = 0, \quad 0 \leq \frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1} \leq 1, \quad \theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1}},$$

$$\theta = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\eta_2 - 1}{\alpha_1}} + \pi.$$

Эти точки существуют во внутренней углов, заштрихованных вертикально, т.е. при

$$\eta_2 - 1 \leq \alpha_1 \quad (\eta_2 - 1, \alpha_1 > 0), \quad \eta_2 - 1 \geq \alpha_1 \quad (\eta_2 - 1, \alpha_1 < 0).$$

Можно рассмотреть различные характерные случаи выбора параметров η_2, α_1 (см. рис. 46): ($a_{1,2}$) не заштрихованные части плоскости вне углов; (b) не заштрихованный параллелограмм в центре; (c) полуполоса внизу налево; (d) полуполоса вверх направо, (e) полуполоса вверх; (f) полуполоса внизу; (g_1) угол вверх вправо; (g_2) угол внизу влево.

Ниже приводятся фазовые портреты усредненной системы, построенные численно для перечисленных выше случаев. Отметим, что все фазовые траектории, в силу (4.2.43), симметричны относительно прямых

$\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$. Поэтому достаточно изображать четвертую часть фазового портрета системы при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Семейство фазовых траекторий усредненной системы в плоскости θ , φ при $\eta_2 = -5$, $\alpha_1 = -2$ (случай (a_2)) представлено на рис. 47. Эти графики соответствуют колебаниям по углу θ , а по φ происходят либо колебания (внутри сепаратрисы), либо вращения (вне сепаратрисы). Аналогичный характер зависимости θ от φ будет и в случае (a_1) ($\eta_2 = 5$, $\alpha_1 = 2$). При этом в случае (a_2) на фазовой плоскости (θ, φ) имеется стационарная точка $(\pi/2, \pi/2)$ типа центр и точка $(\pi/2, 0)$ типа седло, а в случае (a_1) – точка $(\pi/2, 0)$ типа центр и $(\pi/2, \pi/2)$ типа седло.

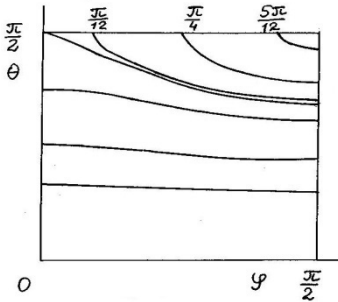


Рис. 47

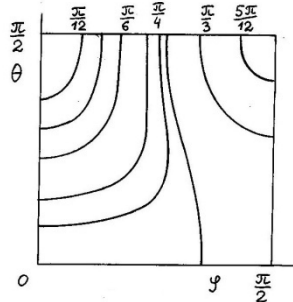


Рис. 48

При $\eta_2 = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$ (случай (b)) фазовые траектории представлены на рис. 48. Стационарными точками в этом случае являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0, 1.1071)$. При $\eta_2 = 0.8$, $\alpha_1 = 3$ (случай (e)) фазовые кривые описывают колебания по θ и колебания или вращения по φ , разделенные сепаратрисами (см. рис. 49). Стационарные точки в этом случае таковы: $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(0, 1.1071)$, $(0.5426, 0)$.

Подобные фазовые траектории получаются и в случае (f) ($\eta_2 = 0.8$; $\alpha_1 = -1.5$). При этом стационарными точками являются $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0, 1.1071)$, $(0.3738, \pi/2)$.

При $\eta_2 = 3$, $\alpha_1 = 5$ (случай (g_1)) фазовые траектории изображены на рис. 50 и описывают колебания по θ , колебания по φ внутри и

выше сепаратрисы, проходящей через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0.3225$, и вращения по φ ниже сепаратрисы. Стационарными точками являются: $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0.6847, \pi/2)$, $(0.8861, 0)$. В случае (g_2) ($\eta_2 = -2$, $\alpha_1 = -5$) имеет место аналогичный характер фазовых кривых. При этом сепаратриса проходит через точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0.9553$, стационарные точки – $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(0.8861, \pi/2)$, $(0.6847, 0)$.

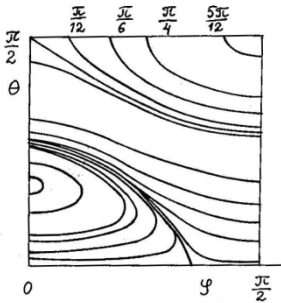


Рис. 49

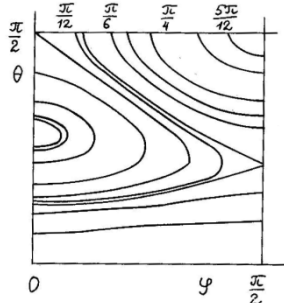


Рис. 50

Значение $\theta = 0$ является стационарной точкой первого уравнения (4.2.42). Уравнение для φ при $\theta = 0$ принимает вид, допускающий разделение переменных. После интегрирования этого уравнения получим выражения (4.2.34), (4.2.35), в которых вместо η^* надо поставить η_2 . При малых θ система (4.2.44) записывается следующим образом

$$\theta' = \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi' = \eta_1 - \sin^2 \varphi. \quad (4.2.44)$$

Здесь учтены члены порядка θ . Уравнение для определения φ в случае малых θ совпадает с соответствующим уравнением при $\theta = 0$ и его решение может быть представлено в виде (4.2.34), (4.2.35). После интегрирования уравнения (4.2.44) для θ с учетом решения (4.2.34) получим (4.2.37), (4.2.38) (заменив при этом η^* на η_2).

Таким образом, исследована эволюция вращений спутника близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. Выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите медленные и быстрые переменные в возмущенном движении спутника Солнца с трехосным эллипсоидом инерции относительно центра масс под действием момента сил светового давления.
2. Какой силовой функции соответствует момент сил светового давления?
3. Как связаны момент сил светового давления, действующий на спутник с трехосным эллипсоидом инерции, с гравитационным моментом?
4. Чем отличаются первые интегралы (4.1.26), (4.1.27) для динамически несимметричного спутника под действием светового момента от соответствующих интегралов в случае симметричного спутника?
5. Схематически изобразите первый интеграл (4.1.28).
6. Что является малым параметром при вращении спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления?
7. Найдите первый интеграл в уравнениях для угла нутации θ и собственного вращения φ при учете нулевой и первой гармоник в выражении коэффициента момента сил светового давления.
8. В чем заключается аналогия задачи о движении близкого к динамически сферическому твердого тела под действием момента сил светового давления с задачей о движении фиктивного твердого тела с произвольными моментами инерции?
9. Сколько существует характерных случаев для параметра η^* при анализе фазовой плоскости угловых переменных (θ, φ) ?
10. Найдите угол λ при эволюции вектора кинетического момента.

Глава 5.

Оптимальное по быстродействию торможение вращений квazitвердого тела.

Анализ гибридных систем, т.е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих «квazitвердые» тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко движению абсолютно твердых тел. Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера для некоторого фиктивного твердого тела. Исследованию динамически свободных твердых тел с внутренними степенями свободы посвящен ряд работ [223, 293, 294, 297, 298, 299] и др. Анализ пассивных движений твердого тела в сопротивляющейся среде уделялось большое внимание [70, 74]. Проблема управления вращениями «квazitвердых» тел посредством сосредоточенных моментов сил, имеющая значение для приложений, менее исследована. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения метода сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа «временных погранслоев» [223, 293, 298, 299].

Результаты § 1 главы 5 были впервые опубликованы в работе авторов [298], § 2 – в статье [299], § 3 – в работе [301], а § 4 – в статье авторов [300].

§1. Оптимальное торможение вращений твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент и полость, заполненную вязкой жидкостью.

1. Постановка задачи оптимального управления

Неравенство Шварца оказывается весьма полезным при построении синтеза закона торможения для «квazitвердых» тел, деформация (отклонения масс от равновесных состояний) которых, вызванная силами инерции, оказывается в известном смысле малой [83, 168 – 170]. При этом предполагается, что возможные большие начальные отклонения и относительные колебания быстро затухают.

Исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который

моделируется точечной массой, прикрепленной сильным демпфером к точке на оси симметрии. Управление вращениями производится с помощью момента сил ограниченного по модулю.

На основе подхода [135,168] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат представляются в виде [223, 293, 297]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Dr^4p + Qpr^2, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Dr^4q + Qqr^2, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} Dr^3(p^2 + q^2) + H(p^2 + q^2)r. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u , кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A_1^2(p^2 + q^2) + A_3^2r^2]^{1/2}$.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой [223]

$$\mathbf{L}^u = \mathbf{b}\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \boldsymbol{\omega}), \quad 0 < b_* \leq b \leq b^* < \infty, \quad (5.1.2)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов согласно (5.1.2). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^0$.

Далее, введенные в (5.1.1) коэффициенты D, F, Q, H выражаются через параметры системы следующим образом

$$\begin{aligned} D &= m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} A_1^{-4} A_3^3 (A_1 - A_3), \quad F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \\ Q &= \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad H = \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Коэффициенты D, F (5.1.3) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления, которая находится, по предположению, на оси динамической симметрии этого тела. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно, c – жесткость (коэффициент упругости), δ – коэффициент вязкости демп-

фера. Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в следующем смысле [168]

$$\Omega^2 \gg \lambda\omega \gg \omega^2. \quad (5.1.4)$$

Сильные неравенства (5.1.4) позволяют ввести малый параметр в (5.1.3) и считать указанные возмущающие моменты малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Кроме того, условия (5.1.4) позволяют пренебречь погранслойными участками свободных колебательных движений массы, обусловленных начальными отклонениями, вследствие их быстрого затухания и учесть вынужденные квазистационарные движения, вызванные вращением тела. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Аналогично изложенному, коэффициенты Q, H (5.1.3) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости, β – объемная плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости, P – коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7 / 525$ [135]. Основным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса Re :

$$Re = lV\nu^{-1} \sim l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \sim l^2 \omega \nu^{-1} \ll 1. \quad (5.1.5)$$

Здесь l – характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$), V – характерная скорость, а T_* – некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$). Если взять за единицу длины и времени l и T_* соответственно, то согласно (5.1.5) кинематическая вязкость является большим параметром, $\nu \gg 1$ [135]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и вязкостью демпфера, являются мономами вектора $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ четвертой и пятой степеней соответственно. Момент со стороны вязкой жидкости определяется мономами третьей степени от $\boldsymbol{\omega}$. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (5.1.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (5.1.6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \omega)$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что моменты сил, обусловленные движениями вязкоупругого элемента и вязкой жидкости в полости, являются внутренними для фиктивного тела. Это означает, что модуль $G = |\mathbf{G}|$ вектора кинетического момента $\mathbf{G} = \mathbf{J}\omega$ постоянен во времени: $G(t) = G^0 = \text{const}$ при $\mathbf{L} \equiv 0$, где G^0 – значение G в начальный момент времени $t = t_0$. Доказательство следует непосредственно; оно проводится на основе неуправляемой системы (5.1.1) скалярным умножением векторного уравнения на $\mathbf{G} = (A_1 p, A_1 q, A_3 r)^T$ [213, 223].

Таким образом, к рассматриваемой системе применена методика управления системами с инвариантной нормой посредством ограниченного по модулю управляющего воздействия [223]. Решение задачи синтеза закона оптимального по быстродействию торможения вращений может быть построено на основе функционального неравенства Шварца [213, 223] для $G(t)$

$$-b = -bG^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{G})_{\max} \leq G^0 \leq bG^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{G})_{\max} = b \quad (5.1.7)$$

Из (5.1.7) следует, что синтез оптимального закона торможения имеет вид

$$\mathbf{L}_0 = b(t, \mathbf{G})\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 = -\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} \quad (5.1.8)$$

Итак, орт оптимального по быстродействию тормозящего момента сил \mathbf{L}_0 направлен против вектора кинетического момента. Модуль кинетического момента $G(t)$ убывает до нуля за конечное время $T_0 - t_0$, которое определяется в результате интегрирования системы (5.1.1) при $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0(t, \omega)$. Оптимальный момент времени $T_0 = T_0(t_0, \omega^0)$ может быть оценен согласно (5.1.7), (5.1.8), (5.1.2)

$$t_0 + G^0/b^* = T^* \leq T_0 \leq T_* = t_0 + G^0/b^* \quad (5.1.9)$$

Оптимальное время быстрогодействия $T_0(t_0, \omega^0)$ определяется в результате интегрирования системы (5.1.1), (5.1.8) из следующего условия:

$\mathbf{G}(T_0, t_0, \mathbf{G}^0) = 0$ или $\boldsymbol{\omega}(T_0, t_0, \boldsymbol{\omega}^0) = 0$, что то же самое. Проблема определения величины T_0 упрощается и сводится к интегрированию одного уравнения для G , если $b = b(t, G)$; тогда для нахождения T_0 имеем

$$\dot{G} = -b(t, G), \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T_0, t_0, G^0) = 0 \quad (5.1.10)$$

В частности, если функция $b = b(G)$ не зависит от t явно, то

$$T_0(t_0, G^0) = t_0 + \int_0^{G^0} \frac{dG}{b(G)} \quad (5.1.11)$$

В другом частном случае $b = b(t)$ время быстрогодействия T_0 – единственный корень уравнения

$$G^0 = \int_{t_0}^{T_0} b(t) dt, \quad T_0 = T_0(t_0, G^0) \quad (5.1.12)$$

Наконец, при $b = \text{const}$ имеем $T_0 = t_0 + G^0/b$.

При помощи достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [321] можно также установить, что функция $\mathbf{L}_0(t, \boldsymbol{\omega})$ (5.1.8) есть оптимальный синтез в задаче быстрогодействия (5.1.1), (5.1.6), а соответствующая траектория $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ будет оптимальной. Время T_0 минимально, а функция $V(t, \boldsymbol{\omega}) = T_0(t, \boldsymbol{\omega})$ – функция Беллмана задачи оптимального быстрогодействия. Для ее определения необходимо интегрировать систему уравнений (5.1.1), (5.1.8) в текущий момент времени t при заданном (измеренном) значении вектора $\boldsymbol{\omega}$ до момента времени T_0 , для которого $\boldsymbol{\omega}_0(T_0, t, \boldsymbol{\omega}) = 0$. В частных случаях (5.1.10) – (5.1.12) функция Беллмана находится достаточно просто. Далее для определенности будем рассматривать указанные более простые выражения функции $b = b(t, G)$ и считать, что величина $T_0(t_0, G^0)$ и зависимость $G = G_0(t, t_0, G^0)$ известны.

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (5.1.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + A_3^{-1} (G^2 - A_3^2 r^2) (A_1^{-1} A_3^{-1} Dr^2 - A_1^{-2} H) \right] \quad (5.1.13)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (5.1.13) приводится к более удобному виду ($z = R^2$)

$$\dot{z} = -2A_1^{-1} A_3^{-2} G^2 z (1 - A_3^2 z) (DG^2 z + Q) \quad (5.1.14)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. Тогда $A_3 R = \cos \theta$ и уравнение (5.1.14) может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = (A_1 - A_3) G^2 \cos \theta \sin \theta (\alpha G^2 \cos^2 \theta + \chi) \quad (5.1.15)$$

$$\alpha = m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} A_1^{-5} A_3^{-1}, \quad \eta = \beta P \nu^{-1} A_1^{-3} A_3^{-1},$$

$$\theta(t_0) = \theta^0, \quad 0 \leq \theta, \quad \theta^0 < \pi,$$

где α , χ – положительные постоянные, а переменная $G = G(t, t_0, G^0)$ считается известной в соответствии с принятым в п.2 предположением ($\dot{G} = -b$). Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол θ в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (5.1.15) независимо от изменения G .

Исследуем поведение сферического угла в малой окрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. В первом случае

($\theta^* = 0$) имеем

$$\delta \dot{\theta} = (A_1 - A_3) G^2 (\alpha G^2 + \chi) \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 > 0 \quad (5.1.16)$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(A_1 - A_3) \int_{t_0}^t G^2(\tau) (\alpha G^2(\tau) + \chi) d\tau \right]$$

Из (5.1.16) следует, что с ростом t при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) – моно-

точно возрастает. Если торможение достаточно медленное (коэффициент b мал), то $\delta\dot{\theta}$ достаточно близко подходит к значению $\delta\dot{\theta} = 0$ или экспоненциально возрастает соответственно при $A_3 \gg A_1$. Таким образом, движение тела стремится к вращению вокруг оси с максимальным моментом инерции. Чтобы это установить рассмотрим второй случай ($\theta^* = \pi/2$); для $\delta\theta < 0$ аналогично (5.1.16) имеем

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta} &= (A_3 - A_1) \chi G^2 \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 < 0 \\ \delta\theta(t) &= \delta\theta^0 \exp \left[(A_3 - A_1) \chi \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Из (5.1.17) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A_1 < A_3$ — монотонно убывает. Если убывание $G(t)$ достаточно медленное, то при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -0$, т.е. $\theta \rightarrow \pi/2 - 0$, а при $A_1 < A_3$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -\infty$. Заметим, что изменения $\delta\theta$ в полукрестности $\theta^* = \pi/2$ несколько более медленные, чем при $\theta^* = 0$, поскольку обнуляется член, содержащий $\cos^2 \theta^*$ (5.1.16). Характер поведения θ для всех $0 \leq \theta \leq \pi/2$ непосредственно следует из уравнения (5.1.15), поскольку знак правой части определяется константой $A_1 - A_3$. Количественные характеристики поведения угла $\theta(t, t_0, \theta^0, [G])$ получается в результате численного интегрирования уравнений (5.1.15) и (5.1.10) (или (5.1.11), (5.1.12)).

Отметим, что случай $\chi = 0$ в (5.1.15) означает отсутствие полости (или жидкость «заморожена»). При этом уравнение (5.1.15) допускает разделение переменных θ , t и аналитическое интегрирование в квадратурах. Другой случай $\alpha = 0$ в (5.1.15) означает, что вязкоупругий элемент отсутствует или является абсолютно твердым. Наличие только полости с сильно вязкой жидкостью также допускает разделение переменных и интегрирование в квадратурах. Если параметр χ или α относительно мал, или оба малы, то к уравнению (5.1.15) можно применить методы регулярных возмущений на промежутке времени $t \in [t_0, T_0]$. Однако только случай малых

обоих коэффициентов χ и α приводит к рациональным обозримым конструкциям приближенного решения. Они могут быть реализованы в виде разложений по степеням χ , α или последовательными приближениями по схеме Пикара (см. п. 5).

Если в (5.1.15) формально положить $G = G^0 = const$, то это уравнение совпадает с полученным для неуправляемого движения ($b = 0$). Тогда правая часть есть тригонометрическая функция θ , а уравнение допускает разделение переменных и полное интегрирование в элементарных функциях. Анализ неуправляемого движения в [294] отвечает изложенному выше качественному выводу о финальном значении $\theta(t, \theta^0, G^0)$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение переменных p , q согласно первым двум уравнениям (5.1.1) с учетом (5.1.5) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = A_3^{-1}G(t)\cos\theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией $t: b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A_1(p^2 + q^2)^{1/2}$, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (5.1.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе на $A_1 q N^{-1}$, и складывая, получим для N линейное однородное уравнение, интегрируя которое находим

$$N(t) = N^0 \exp \left[- \int_{t_0}^t \eta(\tau) d\tau \right], \quad N^0 = A_1 \left((p^0)^2 + (q^0)^2 \right)^{1/2}, \quad (5.1.18)$$

$$\eta(t) = b(t)/G(t) - A_1^{-1} D r^4(t) - A_1^{-1} Q r^2(t)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде $G^2 = N^2 + A_3^2 r^2$.

Отсюда легко получить выражение для N : $N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$ или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (5.1.19)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Из (5.1.18) следует, что $N(T_0) = 0$, так как $G(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow T_0 + 0$. Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$ приведем уравнения для p , q (5.1.1) к виду линейных с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $\eta(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -\eta(t)\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \\ g(t) &= A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Здесь I – симплектическая единица, а «коэффициент диссипации» $\eta(t)$ определен выше в (5.1.18). Оба коэффициента η и g известным образом зависят от времени t .

Уравнение (5.1.20) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде [223]. Действительно, полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = gI\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0 \mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv |\mathbf{n}(t_0)| = |\mathbf{n}^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\sigma)\mathbf{n}^0, \quad \sigma = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad (5.1.21)$$

где $\Pi(\sigma)$ – матрица поворота (начального вектора \mathbf{n}^0) на угол σ . Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (5.1.18), (5.1.21). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в п.2, 3.

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к проблеме определения сферического угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$. На основе п.2, 3 получим для θ и G представления

$$\theta' = \gamma(1-\tau)^2 \cos \theta \sin \theta \left(k(1-\tau)^2 \cos^2 \theta + h \right), \quad (5.1.22)$$

$$G(\tau) = G^0(1-\tau), \quad \tau = t/T_0 \in [0,1], \quad T_0 = G^0/b,$$

$$k = G^{05} |A_1 - A_3| \alpha/b, \quad h = G^{03} |A_1 - A_3| \chi/b,$$

$$0 \leq k, \quad h < \infty, \quad \gamma = \text{sign}(A_1 - A_3) = \pm 1.$$

Здесь штрих означает производную по аргументу τ . Заметим, что в автономном случае $b = b(G)$ (в частности, $b = \text{const}$) без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$. При малых k и h , а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям: полиномам по τ и экспонентам от полиномов и квадратурам от их произведений. Например, после первой итерации в первом приближении по k , h и во втором по $\delta\theta^0$ имеем выражения для $\theta(t)$

$$\theta(\tau) = \theta^0 + \gamma \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[(k/5) \cos^2 \theta^0 \left(1 - (1-\tau)^5 \right) + (h/3) \left(1 - (1-\tau)^3 \right) \right] + O(k^2 + h^2), \quad (5.1.23)$$

$$\theta(\tau) = \delta\theta(\tau) = \delta\theta^0 \exp \gamma \left[(k/5) \cos^2 \theta^0 \left(1 - (1-\tau)^5 \right) + (h/3) \left(1 - (1-\tau)^3 \right) \right] + O(\delta\theta^{03}), \quad \theta^* = 0, \quad \delta\theta^0 > 0,$$

$$\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta^0 \exp[-\gamma(h/3)(1-(1-\tau)^3)] + O(|\delta\theta^0|^3), \\ \theta^* = \pi/2, \quad \delta\theta^0 < 0.$$

Для произвольных различных значений k , h и θ^0 решение уравнения (5.1.22) проводилось численно. Заметим, что семейства графиков $\theta = \theta^\gamma(\tau, \theta^0, k, h)$ являются трехпараметрическими; кроме того, два значения принимает параметр $\gamma = \pm 1$.

На рис. 51, 52 представлены расчетные графические зависимости θ^\pm при начальных условиях $\theta^0 = \pi/3, \pi/6$ соответственно и различных значениях параметров k , h , которые приведены на соответствующих кривых. Значениям $k = h = 0$ отвечают горизонтальные прямые

$\theta^\gamma(\tau) = \theta^0$. Если параметр $\gamma = +1$, то при $k, h > 0$ кривые $\theta^+(\tau)$ идут монотонно вверх к $\theta^* = \pi/2$ выше этих прямых; если $\gamma = -1$, то, наоборот, кривые $\theta^-(\tau)$ идут монотонно вниз к $\theta^* = 0$ ниже этих прямых. При $h = 0$ (полость отсутствует или жидкость «заморожена») семейства кривых по k совпадают с построенными ранее в [223, 293]; аналогично при $k = 0$ (вязкоупругий элемент отсутствует или является «абсолютно жестким») семейства по h отвечают изученным в [223, 297].

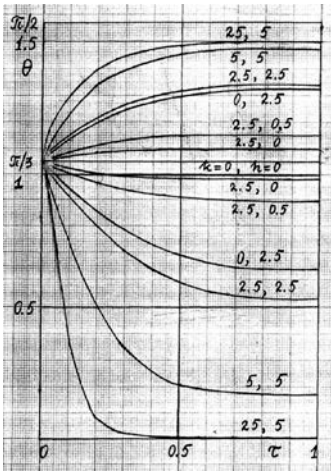


Рис. 51

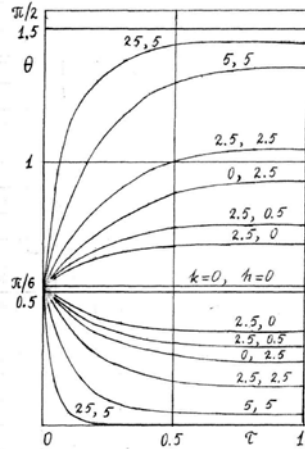


Рис. 52

Основной качественный вывод, следующий из графиков рис. 51, 52 и других расчетов, состоит в следующем. Оба фактора (вязкоупругий элемент и вязкая жидкость) способствуют стремлению $\theta^\gamma(\tau) \rightarrow \theta^* = 0, \pi/2$ при $\gamma = \mp 1$. Для фиксированных значений k возрастание h приводит к более крутому стремлению $\theta^\gamma(\tau)$ к 0 или $\pi/2$; аналогичная ситуация имеет место при фиксированных значениях h и возрастании k . Итак, для семейств графиков имеют место следующие свойства монотонности

$$\theta^\pm(\tau_1, \theta^0, k, h) \triangleleft \theta^\pm(\tau_2, \theta^0, k, h), \quad \tau_2 > \tau_1, \quad \tau_{1,2} \in [0, 1],$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta_1^0, k, h) \triangleleft \theta^\pm(\tau, \theta_2^0, k, h), \quad \theta_2^0 > \theta_1^0, \quad \theta_{1,2}^0 \in [0, \pi/2],$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k_1, h) \triangleleft \theta^\pm(\tau, \theta^0, k_2, h), \quad k_2 > k_1, \quad k_{1,2} \in [0, \infty), \quad (5.1.24)$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_1) \triangleleft \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_2), \quad h_2 > h_1, \quad h_{1,2} \in [0, \infty),$$

$$\tau \in (0, 1), \quad \theta^0 \in (0, \pi/2), \quad k, h \in (0, \infty).$$

Верхние знаки (меньше) неравенств (5.1.24) отвечают θ^+ ($\gamma = +1$), нижние (больше) — θ^- ($\gamma = -1$). Неравенства (5.1.24) означают, что при фиксированных двух параметрах из трех и изменении третьего эти однопараметрические семейства не пересекаются (кроме точки θ^0 , $\tau = 0$).

На основе имеющихся зависимостей $G(t)$, $\theta(t)$ находится осевая составляющая r вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$: $r(\tau) = A_3^{-1} G \cos \theta$. Это позволяет по формулам (5.1.18), (5.1.21) определить другие составляющие:

$$(p, q)^T = A_1^{-1} N \mathbf{n}.$$

§2. Наискорейшее торможение вращений гиростата с массой, связанной демпфером с квадратичным трением.

1. Постановка задачи оптимального управления

Исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело соединено в точке на оси симметрии с массой относительно малых размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая ниже модель обобщает исследованные ранее в [223, 293, 297, 298].

На основе подхода [168, 297] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с твердым телом системы координат могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) qr &= L_p + FG^2 qr + Spr^6 \omega_\perp + Qpr^2, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) pr &= L_q - FG^2 pr + Sqr^6 \omega_\perp + Qqr^2, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} Sr^5 \omega_\perp^3 + Hr \omega_\perp^2. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u , кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A_1^2 \omega_1^2 + A_3^2 r^2]^{1/2}$, $\omega_1^2 = p^2 + q^2$.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой и заданы (5.1.2).

Далее, введенные в (5.2.1) коэффициенты F, S, Q, H выражаются через параметры системы следующим образом

$$F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \quad S = m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} d |d| A_1^{-4} A_3^4, \quad d = 1 - A_3 A_1^{-1}, \quad (5.2.2)$$

$$Q = \beta P v^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad H = \beta P v^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1).$$

Введенные в (5.2.2) обозначения D, F характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии, $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \mu/m = \Lambda \Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость, μ – коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ_1 и Ω таковы, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела близко к движению Эйлера-Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малыми. Предполагается, что

$$\Omega \gg \omega. \quad (5.2.3)$$

Неравенство (5.2.3) позволяет ввести малый параметр в (5.2.2) и считать указанные возмущающие моменты малыми с целью применения методов сингулярных возмущений.

Коэффициенты Q, H (5.2.2) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением демпфера, яв-

ляются однородными функциями вектора $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степеней соответственно. Момент со стороны вязкой жидкости определяется мономами третьей степени от $\boldsymbol{\omega}$. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (5.2.1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений (5.1.6).

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстрого действия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \boldsymbol{\omega})$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что моменты сил, обусловленные движениями подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения и вязкой жидкости в полости, являются внутренними для фиктивного тела. Это означает, что модуль $G = |\mathbf{G}|$ вектора кинетического момента $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$ постоянен во времени: $G(t) = G^0 = const$ при $\mathbf{L} \equiv 0$, где G^0 – значение G в начальный момент времени $t = t_0$. Доказательство следует непосредственно; оно проводится на основе неуправляемой системы (5.2.1) скалярным умножением векторного уравнения на $\mathbf{G} = (A_1 p, A_1 q, A_3 r)^T$. Таким образом, к рассматриваемой системе применима методика управления системами с инвариантной нормой посредством ограниченного по модулю управляющего воздействия [223]. Решение задачи синтеза закона оптимального по быстродействию торможения вращений может быть построено на основе функционального неравенства Шварца [213, 223] для $G(t)$ (5.1.7). Из (5.1.7) следует, что синтез оптимального закона торможения имеет вид (5.1.8).

Итак, орт оптимального по быстродействию тормозящего момента сил \mathbf{L}_0 направлен против вектора кинетического момента. Модуль кинетического момента $G(t)$ убывает до нуля за конечное время $T_0 - t_0$, которое определяется в результате интегрирования системы (5.2.1) при $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0(t, \boldsymbol{\omega})$. Оптимальный момент времени $T_0 = T_0(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ может быть оценен согласно (5.1.9).

Оптимальное время быстрогодействия $T_0(t_0, \omega^0)$ определяется в результате интегрирования системы (5.2.1), (5.1.8) из следующего условия: $\mathbf{G}(T_0, t_0, \mathbf{G}^0) = 0$ или $\omega(T_0, t_0, \omega^0) = 0$, что то же самое. Проблема определения величины T_0 упрощается и сводится к интегрированию одного уравнения для G , если $b = b(t, G)$; тогда для нахождения T_0 имеем (5.1.10).

В частности, если функция $b = b(G)$ не зависит от t явно, то получим (5.1.11). В другом частном случае $b = b(t)$ время быстрогодействия T_0 есть единственный корень уравнения (5.1.12).

Пусть $b = b^0 + c^0 t$, коэффициенты $b^0 > 0$ и $c^0 > 0$. Тогда уравнение для G принимает вид

$$\dot{G} = -b^0 - c^0 t. \quad (5.2.4)$$

В результате интегрирования уравнения (5.2.4) получим

$$g = 1 - \tau - \alpha \tau^2. \quad (5.2.5)$$

Здесь $g = G/G^0$, $\tau = t/T_0 \in [0, \tau_*]$, $T_0 = G^0/b^0$, $\alpha = c^0 G^0 / (2b^{02})$, $\tau_* = \left[-1 + (1 + 4\alpha)^{1/2} \right] / (2\alpha)$.

Для произвольных различных значений α , указанных на рис. 53, расчетные графические зависимости $g = g(\tau)$ определены с помощью численного расчета. Основной вывод, следующий из графиков рис. 53 состоит в том, что g достигает нулевых значений за конечное время $\tau \in [0, \tau_*]$ и тем быстрее, чем больше значение α .

Наконец, при $b = \text{const}$ имеем $T_0 = t_0 + G^0/b$.

При помощи достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [321] можно также установить, что функция $\mathbf{L}_0(t, \omega)$ (5.1.8) есть оптимальный синтез в задаче быстрогодействия (5.2.1), (5.1.6), а соответствующая траектория $\omega = \omega_0(t, t_0, \omega^0)$ будет оптимальной. Время T_0 является минимальным, а функция $V(t, \omega) = T_0(t, \omega)$ есть функция Беллмана задачи оптимального быстрогодействия. Для ее определения необходимо интегрировать систему уравнений (5.2.1), (5.1.8) в теку-

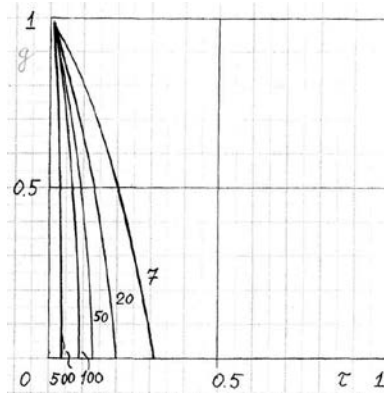


Рис. 53

щий момент времени t при заданном (измеренном) значении вектора ω до момента времени T_0 , для которого $\omega_0(T_0, t, \omega) = 0$. В частных случаях (5.1.10) – (5.1.12) функция Беллмана находится достаточно просто. Далее для определенности будем рассматривать указанные более простые выражения функции $b = b(t, G)$ и считать, что величина $T_0(t_0, G^0)$ и зависимость $G = G_0(t, t_0, G^0)$ известны.

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для \dot{G} в третье уравнение (5.2.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + A_1^{-2} A_3^{-1} (G^2 - A_3^2 r^2) \left(A_3^{-1} S r^4 (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2} - H \right) \right]. \quad (5.2.6)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (5.2.6) приводится к более удобному виду ($z = R^2$)

$$\dot{z} = -2A_1^{-2} A_3^{-1} G^2 z (1 - A_3^2 z) \left[A_3^{-1} S G^5 z^2 (1 - A_3^2 z)^{1/2} - H \right]. \quad (5.2.7)$$

Уравнение (5.2.7) после перехода к сферическому углу θ с учетом $A_3 R = \cos \theta$ может быть записано в виде, удобном для дальнейшего изучения

$$\dot{\theta} = (A_1 - A_3) G^2 \cos \theta \sin \theta (\alpha G^5 |\sin \theta| \cos^4 \theta + \chi) \quad (5.2.8)$$

$$\alpha = m \rho^3 \Lambda \Omega^{-3} A_3^{-2} A_1^{-7} |d|, \quad d = 1 - A_3 A_1^{-1},$$

$$\chi = \beta P \nu^{-1} A_1^{-3} A_3^{-1}, \quad \theta(t_0) = \theta^0, \quad 0 \leq \theta, \quad \theta^0 < \pi.$$

Здесь α , χ – положительные постоянные, а переменная $G = G(t, t_0, G^0)$ считается известной в соответствии с принятым в п.2 предположением ($\dot{G} = -b$). Переменная θ и уравнение (5.2.8) обладают привлекательной геометрической наглядностью. Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (5.2.8) независимо от изменения G .

Иследуем поведение угла θ в малой окрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\delta \dot{\theta} = (A_1 - A_3) G^2 \chi \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 > 0 \quad (5.2.9)$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(A_1 - A_3) \chi \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]$$

Из (5.2.9) следует, что с ростом t при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает. Если торможение достаточно медленное (коэффициент b мал), то $\delta\theta$ достаточно близко подходит к значению $\delta\theta = 0$ или экспоненциально возрастает соответственно при $A_3 \gg A_1$. Таким образом, движение тела стремится к вращению вокруг оси с максимальным моментом инерции. Чтобы это установить, рассмотрим второй случай ($\theta^* = \pi/2$); для $\delta\theta < 0$ аналогично (5.2.9) имеем

$$\delta \dot{\theta} = (A_3 - A_1) \chi G^2 \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 < 0 \quad (5.2.10)$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(A_3 - A_1) \chi \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]$$

Из (5.2.10) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A_1 < A_3$ — монотонно убывает. Если убывание $G(t)$ достаточно медленное, то при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -0$, т.е. $\theta \rightarrow \pi/2 - 0$, а при $A_1 < A_3$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -\infty$. Характер поведения θ для всех $0 \leq \theta \leq \pi/2$ непосредственно следует из уравнения (5.2.8), поскольку знак правой части определяется константой $A_1 - A_3$. Количественные характеристики поведения угла $\theta(t, t_0, \theta^0, [G])$ получается в результате численного интегрирования уравнений (5.2.8) и (5.1.10) (или (5.1.11), (5.1.1)).

Отметим, что случай $\chi = 0$ в (5.2.8) означает отсутствие полости (или жидкость «заморожена»), рассмотренный в [223, 297]. При этом уравнение (5.2.8) допускает разделение переменных θ , t и аналитическое интегрирование в квадратурах. Другой случай $\alpha = 0$ в (5.2.8) означает, что подвижная масса, соединенная с телом упругой связью с квадратичным трением, отсутствует или является абсолютно твердой. Наличие только полости с сильно вязкой жидкостью также допускает разделение переменных и интегрирование в квадратурах; эта задача изучена в [223, 297]. Если параметр χ или α относительно мал или оба малы, то к уравнению (5.2.8) можно применить методы регулярных возмущений на рассматриваемом промежутке времени $t \in [t_0, T_0]$. Однако только случай малых обоих коэффициентов χ и α приводит к рациональным обозримым конструкциям приближенного решения. Они могут быть реализованы в виде разложений по степеням χ , α или последовательными приближениями по схеме Пикара (см. п. 5).

Если в (5.2.8) формально положить $G = G^0 = const$, то это уравнение совпадает с полученным для неуправляемого движения ($b = 0$). Тогда правая часть есть тригонометрическая функция θ , а уравнение допускает разделение переменных и численное интегрирование. Результаты численного интегрирования в [294] отвечают изложенному выше качественному выводу о финальном значении $\theta(t, \theta^0, G^0)$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение переменных p , q согласно первым двум уравнениям (5.2.1) с учетом (5.1.8) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = A_3^{-1}G(t)\cos\theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией t : $b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A_1(p^2 + q^2)^{1/2}$, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (5.2.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе на $A_1 q N^{-1}$, и складывая, получим для N уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t)N + f(t)N^2, \quad N(t_0) = N^0, \quad (5.2.11)$$

$$\eta(t) = b(t)/G(t) - A_1^{-1}Qr^2(t), \quad f(t) = A_1^{-2}Sr^6(t).$$

Это уравнение Бернулли (см. [317], стр. 297). Интегрируя (5.2.11), находим

$$N^{-1} - (N^0)^{-1} = -E(t)A_1^{-2}S \int_{t_0}^t r^6(t)E^{-1}(t)dt, \quad (5.2.12)$$

$$E(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \eta(t) dt \right].$$

Отметим, что $N^2 = G^2 - A_3^2 r^2$, $r = A_3^{-1}G \cos\theta$ и поэтому G и N одновременно обращаются в нуль при $\tau = \tau_*$, где

$$\tau_* = \left[-1 + (1 + 4\alpha)^{1/2} \right] / (2\alpha) - \text{время окончания процесса,}$$

$$\alpha = c^0 G^0 / (2b^{02}) \quad (\text{см. (5.2.5)}).$$

Кроме того, согласно (5.1.19) $N = G|\sin\theta|$. Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5 этого параграфа.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$ приведем уравнения для p и q (5.2.1) к виду линейных с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$, $\eta(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\dot{\mathbf{N}} = -[\eta(t) - f(t)N(t)]\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \quad (5.2.13)$$

$$g(t) = A_1^{-1} r(t)(A_1 - A_3 + FG^2(t))$$

Здесь I – симплектическая единица, а «коэффициенты диссипации» $d(t)$ и $f(t)$ определены выше в (5.2.11). Коэффициенты η , f и g известным образом зависят от времени t .

Уравнение (5.2.13) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде [223]. Действительно, полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = gI\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv |\mathbf{n}(t_0)| = |\mathbf{n}^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; имеем (5.1.21). Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (5.2.12), (5.1.21). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определились в п.2, 3.

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к проблеме определения сферического угла $\theta(t)$ в частном случае $b = const$. На основе п.2, 3 получим для θ и G представления

$$\theta' = \gamma(1 - \tau)^2 \cos \theta \sin \theta \left(k(1 - \tau)^5 |\sin \theta| \cos^4 \theta + h \right), \quad (5.2.14)$$

$$G(\tau) = G^0(1 - \tau), \quad \tau = t/T_0 \in [0, 1], \quad T_0 = G^0/b,$$

$$k = G^{08} |A_1 - A_3| \alpha/b, \quad h = G^{03} |A_1 - A_3| \chi/b,$$

$$0 \leq k, \quad h < \infty, \quad \gamma = \text{sign}(A_1 - A_3) = \pm 1.$$

Здесь штрих означает производную по аргументу τ . Заметим, что в автономном случае $b = b(G)$ (в частности, $b = const$) без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$. При малых k и h , а также $|\delta\theta^0|$ в

окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям: полиномам по τ и экспонентам от полиномов и квадратурам от их произведений. Например, после первой итерации в первом приближении по k , h и во втором по $\delta\theta^0$ имеем выражения для $\theta(t)$

$$\theta(\tau) = \theta^0 + \gamma \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[(k/8) |\sin \theta^0| \cos^4 \theta^0 (1 - (1 - \tau)^8) + (h/3) (1 - (1 - \tau)^3) \right] + O(k^2 + h^2), \quad (5.2.15)$$

$$\theta(\tau) = \delta\theta(\tau) = \delta\theta^0 \exp \gamma \left[(h/3) (1 - (1 - \tau)^3) + O(\delta\theta^{02}) \right], \theta^* = 0, \\ \delta\theta^0 > 0,$$

$$\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta^0 \exp[-\gamma (h/3) (1 - (1 - \tau)^3)] + O(|\delta\theta^0|^2), \\ \theta^* = \pi/2, \delta\theta^0 < 0.$$

Для произвольных различных значений k , h и θ^0 решение уравнения (5.2.14) проводилось численно. Заметим, что семейства графиков $\theta = \theta^\gamma(\tau, \theta^0, k, h)$ являются трехпараметрическими; кроме того, два значения принимает параметр $\gamma = \pm 1$.

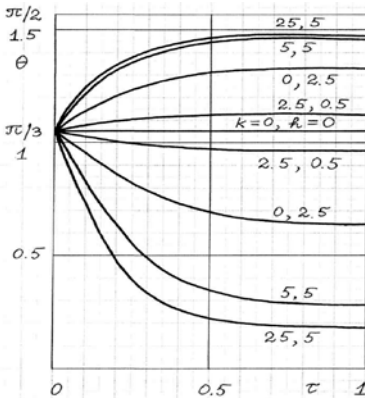


Рис. 54

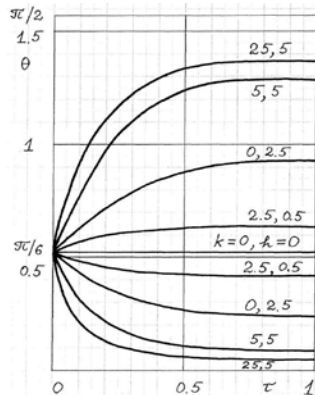


Рис. 55

На рис. 54, 55 приведены расчетные графические зависимости θ^\pm при начальных условиях $\theta^0 = \pi/3, \pi/6$ соответственно и различных значениях параметров k, h , которые приведены на соответствующих кривых. Значениям $k = h = 0$ отвечают горизонтальные прямые $\theta^\gamma(\tau) = \theta^0$. Если параметр $\gamma = +1$, то при $k, h > 0$ кривые $\theta^+(\tau)$ идут монотонно вверх к $\theta^* = \pi/2$ выше этих прямых; если $\gamma = -1$, то, наоборот, кривые $\theta^-(\tau)$ идут монотонно вниз к $\theta^* = 0$ ниже этих прямых. При $h = 0$ (полость отсутствует или жидкость «заморожена») семейства кривых по k совпадают с построенными ранее в [223, 297]; аналогично при $k = 0$ (подвижная масса, соединенная с телом упругой связью с квадратичной диссипацией, отсутствует или является «абсолютно жесткой») семейства по h также отвечают изученным в [223, 297]. Основной качественный вывод, следующий из графиков рис. 54, 55 и других многочисленных расчетов, состоит в следующем. Оба фактора (упругий элемент с квадратичным трением и вязкая жидкость) способствуют стремлению $\theta^\gamma(\tau) \rightarrow \theta^* = 0, \pi/2$ при $\gamma = \mp 1$. Для фиксированных значений k возрастание h приводит к более крутому стремлению $\theta^\gamma(\tau)$ к 0 или $\pi/2$; аналогичная ситуация имеет место при фиксированных значениях h и возрастании k . Итак, для семейств графиков имеют место следующие свойства монотонности $\theta^\pm(\tau_1, \theta^0, k, h) \lessgtr \theta^\pm(\tau_2, \theta^0, k, h)$, $\tau_2 > \tau_1$, $\tau_{1,2} \in [0, 1]$,

$$\theta^\pm(\tau, \theta_1^0, k, h) \lessgtr \theta^\pm(\tau, \theta_2^0, k, h), \theta_2^0 > \theta_1^0, \theta_{1,2}^0 \in [0, \pi/2],$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k_1, h) \lessgtr \theta^\pm(\tau, \theta^0, k_2, h), k_2 > k_1, k_{1,2} \in [0, \infty), \quad (5.2.16)$$

$$\theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_1) \lessgtr \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_2), h_2 > h_1, h_{1,2} \in [0, \infty),$$

$$\tau \in (0, 1), \theta^0 \in (0, \pi/2), k, h \in (0, \infty).$$

Верхние знаки (меньше) неравенств (5.2.16) отвечают $\theta^+(\gamma = +1)$, нижние (больше) $-\theta^-(\gamma = -1)$. Неравенства (5.2.16) означают, что при фиксированных двух параметрах из трех и изменении третьего эти однопараметрические семейства не пересекаются (кроме точки $\theta^0, \tau = 0$).

На основе имеющихся зависимостей $G(t)$, $\theta(t)$ находится осевая составляющая r вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$: $r(\tau) = A_3^{-1} G \cos \theta$. Это позволяет по формулам (5.2.12), (5.1.21н) определить другие составляющие:

$$(p, q)^T = A_1^{-1} N \mathbf{n}.$$

Сравнение графических зависимостей рис. 51 и 54, 52 и 55 показывает, что при одинаковых значениях k и h $\theta^\gamma(\tau)$ более круто стремится к 0 или $\pi/2$ в случае твердого тела, соединенного с подвижной массой упругой связью с вязким трением, рассмотренном в [298] и в § 1 этой главы.

Изложенная выше методика синтеза и анализа гибридных систем может быть обобщена с учетом возмущающих факторов различной физической природы [223].

§3. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в соприкасающейся среде.

1. Постановка задачи оптимального управления.

На основе подхода [135, 223] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 135, 223]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1) q r &= L_p + Q p r^2 - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3) p r &= L_q + Q q r^2 - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= L_r + H(p^2 + q^2) r - \lambda A_3 r. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Здесь p , q , r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u ; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A_1^2 \omega_\perp^2 + A_3^2 r^2]^{1/2}$, $\omega_\perp^2 = p^2 + q^2$.

Для упрощения задачи в систему (5.3.1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил вязкого

сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{L}' = -\lambda \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (5.3.2)$$

где λ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление действующее на тело, можно представить парой приложенных сил. При этом, проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами $\lambda A_1 p$, $\lambda A_1 q$, $\lambda A_1 r$ [70, 74]. Такое предположение не является противоречивым.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}' ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Введенные в (5.3.1) обозначения Q , H выражаются через параметры системы согласно (5.1.3)

$$Q = \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad H = \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1). \quad (5.3.3)$$

Коэффициенты Q , H в (5.3.1) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости, β – объемная плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости, P – коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7 / 525$ [135]. Основное допущение – предположение о малости числа Рейнольдса Re , введенное, следуя (5.1.5).

Итак, в квазистатическом приближении момент со стороны вязкой жидкости в полости определяется мономами третьей степени от $\boldsymbol{\omega}$. Малый тормозящий момент сил вязкого трения является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (5.3.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений (5.1.6).

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстрейшего действия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = V(t, \boldsymbol{\omega})$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил вязкого трения – внешним.

На основе динамического программирования синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [223]

$$L_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad L_q = -b \frac{A_1 q}{G}, \quad L_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (5.3.4)$$

Здесь для дальнейшего упрощения полагается $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (5.3.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим уравнение вида

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \\ V(t, G) = T(t, G).$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{-\lambda(T-\tau)} d\tau, \\ T = T(t_0, G^0). \quad (5.3.5)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

При $b = const$ решение уравнения и краевой задачи (5.3.5) записывается следующим образом

$$G(t) = \left(G^0 + \frac{b}{\lambda} \right) \exp(-\lambda t) - \frac{b}{\lambda}, \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (5.3.6)$$

Далее детально анализируется случай (5.3.6).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G (5.3.6) в третье уравнение (5.3.1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r (уравнению Бернулли)

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \lambda - A_1^{-2} H A_3^{-1} (G^2 - A_3^2 r^2) \right]. \quad (5.3.7)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (5.3.7) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A_1^{-2} H A_3^{-1} G^2 (1 - A_3^2 R^2) R. \quad (5.3.8)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (5.3.8) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде, также допускающем разделение переменных и аналитическое интегрирование

$$\dot{\theta} = -A_1^{-2} H A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \cos \theta \sin \theta, \theta(0) = \theta^0. \quad (5.3.9)$$

Его решение записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta^0 \exp \left\{ -A_1^{-2} H A_3^{-1} \left[-0.5(G^0 \lambda + b)^2 \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2b(G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Без нарушения общности можно принять, что начальное значение $\theta(0) = \theta^0$ принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол θ в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (5.3.9) независимо от изменения G .

Исследуем поведение угла нутации в малой полукрестности стационарных точек $\theta^* = 0, \pi/2$ уравнения (5.3.8): $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\delta\dot{\theta} = -A_1^{-2} H A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left\{ -A_1^{-2} H A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[-0.5(G^0 \lambda + b)^2 \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2b(G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из (5.3.11) следует, что при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает, так как $H > 0$ или $H < 0$.

Рассмотрим второй случай $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$ $\left(\theta^* = \frac{\pi}{2}\right)$. Аналогично (5.3.11) имеем

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta} &= A_1^{-2} H A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \\ \delta\theta(t) &= \delta\theta^0 \exp \left\{ A_1^{-2} H A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[-0.5(G^0 \lambda + b)^2 \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2b(G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right] \right\}, \quad \delta\theta(0) = \delta\theta^0 < 0. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Из (5.3.12) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_1 < A_3$ монотонно возрастает.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p , q согласно первым двум уравнением (5.3.1) с учетом (5.1.5) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = A_3^{-1} G(t) \cos \theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией t : $b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A_1 \left(p^2 + q^2 \right)^{1/2}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (5.3.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t) N, \quad \eta(t) = \frac{b}{G(t)} - A_1^{-1} Q r^2(t) + \lambda, \quad \eta(t) > 0. \quad (5.3.13)$$

После интегрирования имеем

$$N(t) = N^0 \exp \left[-\int_{t_0}^t \eta(\tau) d\tau \right], \quad N^0 = A_1 \left((p^0)^2 + (q^0)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.3.14)$$

Согласно (5.1.19) $N = G |\sin \theta|$.

При $b = \text{const}$ с учетом (5.3.6) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right] |\sin \theta|. \quad (5.3.15)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (5.3.1) к виду линейных с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $\eta(t)$ соответственно

$$\dot{\mathbf{N}} = -\eta(t)\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, g(t) = A_1^{-1}r(t)(A_1 - A_3). \quad (5.3.16)$$

Здесь I –симплектическая единица, а коэффициент η определен в (5.3.13).

Уравнение (5.3.16) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = g/I\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; в этом случае получим (5.1.21).

Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (5.3.14), (5.1.21).

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к задаче определения сферического угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (5.3.9). Проведем обезразмеривание этого уравнения. Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{T}, \tilde{\lambda} = \lambda T, \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \tilde{H} = A_1^{-2}HA_3^{-1}T^3b^2. \quad (5.3.17)$$

В результате этих преобразований получим уравнения для угла θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \pm \tilde{H} \tilde{\lambda}^{-2} \left[(\tilde{G}^0 \tilde{\lambda} + 1) \exp(-\tilde{\lambda}\tau) - 1 \right]^2 \cos \theta \sin \theta, \quad (5.3.18)$$

при $A_1 > A_3$ или $A_1 < A_3$.

Уравнения (5.3.18) было численно проинтегрированы для произвольных различных значений $\tilde{G}^0, \tilde{\lambda}, \tilde{H}$ и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла θ представлены на рис.56 – 59. Рис. 56, 57 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 58, 59 – сплюснутому.

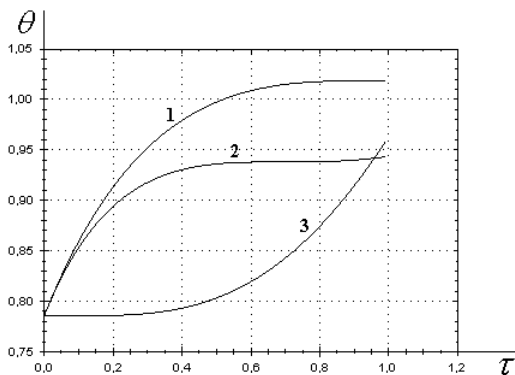


Рис. 56

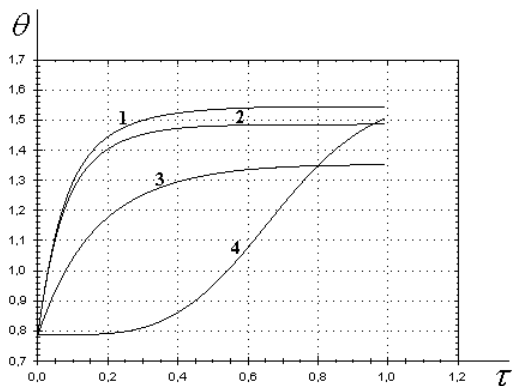


Рис. 57

Расчет кривых рис. 56 проводился при значении $\tilde{H} = 1$ для различных безразмерных коэффициентов момента сил сопротивления и начального значения кинетического момента. Кривая 1 для $\tilde{G}^0 = 1$ и $\tilde{\lambda} = 0.1$, кривая 2 – $\tilde{G}^0 = \tilde{\lambda} = 1$ и кривая 3 – $\tilde{G}^0 = \tilde{\lambda} = 0.1$. Видно, что во всех расчетных случаях угол θ растет, но характер роста зависит от значения величины \tilde{G}^0 . Данная безразмерная величина характеризует отношение начального кинетического момента твердого тела по отношению к характеристикам управляемого движения, что позволяет сделать вывод: при малой начальной скорости вращения тела изменение сферического угла θ носит

более ярко выраженный экспоненциальный характер. При данных значениях безразмерных параметров уравнения (5.3.18) изменение угла происходит в среднем на 20 %. Рис.57 показывает существенный рост сферического угла твердого тела за время торможения с достижением предельного значения. Кривые 1, 2 соответствуют $\tilde{G}^0 = 1$, кривая 3 – $\tilde{G}^0 = 2$, а кривая 4 – $\tilde{G}^0 = 0.1$. Эти кривые подтверждают вышеуказанный вывод о характере изменения функции сферического угла. Кривые 1, 2, 4 соответствуют существенному влиянию момента сил вязкой жидкости в полости $\tilde{H} = 10$. Кривая 3 получена при $\tilde{H} = 1$. Для расчета учитываются различные значения безразмерного коэффициента момента сил сопротивления среды: кривые 1, 4 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, кривые 2, 3 – $\tilde{\lambda} = 1$. Видно, что чем больше отношение коэффициента \tilde{H} к безразмерному коэффициенту момента сил сопротивления $\tilde{\lambda}$, то тем быстрее тело стремится к устойчивому предельному положению оси вращения.

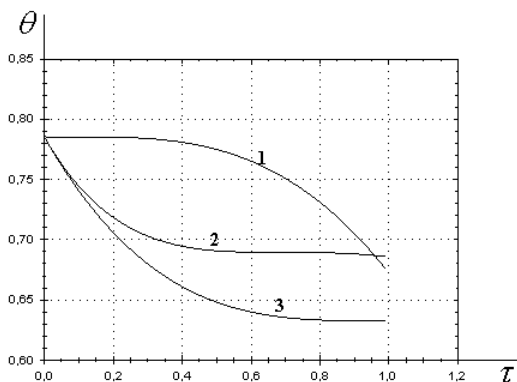


Рис. 58

Расчет кривых рис.58, 59 проводился для динамически сплюснутого твердого тела. Значения безразмерных величин \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{H} выбраны аналогично случаю динамически вытянутого тела. Из рисунков видно, что угол θ убывает, стремясь к некоторому предельному значению. Характер убывания функции также зависит от величины кинетического момента тела в начальный момент времени, а при значительном коэффициенте момента сил вязкой жидкости в полости при незначительном сопротивлении среды, угол стремится к предельному положению 0 рад.

При $A_1 = A_3$, а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(\tau) = \theta^0 - A_1^{-3} A_3^{-1} \beta P V^{-1} (A_3 - A_1) \lambda^{-2} \cos \theta^0 \sin \theta^0 \times \quad (5.3.19)$$

$$\times \left[-0.5(G^0 \lambda + b)^2 \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + 2(G^0 \lambda + b)b\lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right]$$

Формула (5.3.19) позволяет провести анализ угла θ во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

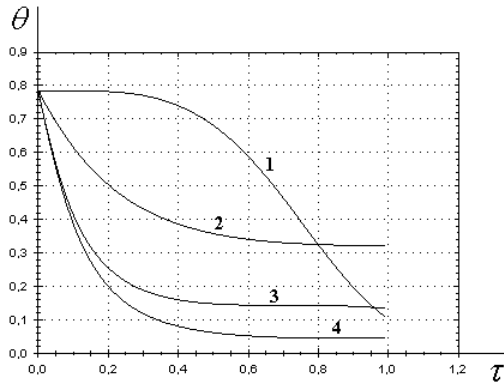


Рис. 59

Таким образом, аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного «квазитвердого» тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол θ , установлены качественные свойства оптимального движения.

§4. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с подвижной массой в сопротивляющейся среде.

1. Постановка задачи оптимального управления.

На основе подхода [135, 223] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 168, 223]

$$\begin{aligned}
A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Dr^4p - \lambda A_1 p, \\
A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Dr^4q - \lambda A_1 q, \\
A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} Dr^3(p^2 + q^2) - \lambda A_3 r.
\end{aligned}
\tag{5.4.1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u ; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A_1^2 \omega_{\perp}^2 + A_3^2 r^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2$.

Как и в § 3 данной главы считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Введенные в (5.4.1) обозначения F, D выражаются через параметры системы согласно (5.1.3)

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}A_3A_1^{-3}, \quad D = m\rho^2\Lambda\Omega^{-4}A_3^3(A_1 - A_3)A_1^{-4}. \tag{5.4.2}$$

Коэффициенты D, F в (5.4.1) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента, m – масса подвижной точки, ρ – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления, которая находится, по предположению, на оси динамической симметрии этого тела. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость (коэффициент упругости), δ – коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в смысле (5.1.4).

В квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и вязкостью демпфера, определяются мономами компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ четвертой и пятой степенями соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (5.4.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений (5.1.6).

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \omega)$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что момент сил, обусловленный движением вязкоупругого элемента, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстрдействию управления имеет вид [223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (5.4.3)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (5.4.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \quad \eta(t).$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau, \\ T = T(t_0, G^0). \quad (5.4.4)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрогодействия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (5.4.4) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (5.4.5)$$

Далее детально анализируется случай (5.4.5).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G (5.4.5) в третье уравнение (5.4.1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \lambda + A_1^{-1} A_3^{-2} D r^2 (G^2 - A_3^2 r^2) \right]. \quad (5.4.6)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (5.4.6) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A_1^{-1} A_3^{-2} D G^4 R^3 (1 - A_3^2 R^2). \quad (5.4.7)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (5.4.7) после перехода к неизвестной θ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= A_1^{-1} A_3^{-4} D \lambda^{-4} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^4 \cos^3 \theta \sin \theta, \\ \theta(0) &= \theta^0. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Решение (5.4.8) записывается следующим образом:

$$\operatorname{tg}^2 \theta \exp(\operatorname{tg}^2 \theta) = \operatorname{tg}^2 \theta^0 \exp(\operatorname{tg}^2 \theta^0) \exp(2K(t)), \quad (5.4.9)$$

$$K(t) = A_1^{-1} A_3^{-4} D \lambda^{-4} \left[-\frac{f(4\lambda t)}{4} + \frac{4f(3\lambda t)}{3} - \frac{3f(2\lambda t)}{2} + 4f(\lambda t) + b^4 t \right],$$

где $f(\beta\lambda t) = \lambda^{-1} b^{4-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta\lambda t) - 1)$, $\beta = 1, 2, 3, 4$.

Без нарушения общности можно принять, что начальное значение $\theta(0) = \theta^0$ принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (5.4.9) независимо от изменения G .

Уравнение (5.4.9) определяет в неявном виде зависимость угла θ от t . Левая часть этого равенства есть монотонно возрастающая функция

от $|\operatorname{tg} \theta|$, а правая часть – монотонная функция t . Следовательно, соотношение (5.4.9) задает однозначную монотонную функцию $\theta(t)$. Характер поведения данной функции аналогичен изученному в [168].

Исследуем поведение сферического угла в малой окрестности стационарной точки $\theta^* = 0$ уравнения (5.4.8): $\theta = \delta\theta > 0$. Уравнение (5.4.8) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\delta\theta} &= A_1^{-1} A_3^{-4} D \lambda^{-4} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^4 \delta\theta, \\ |\delta\dot{\theta}| &= |\delta\theta_0| \exp(K(t)). \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Из (5.4.10) следует, что при $A_3 > A_1$ (динамически сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $A_3 < A_1$ (динамически вытянутое тело) – монотонно возрастает, так как $D > 0$ или $D < 0$.

При $A_1 \approx A_3$, а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + A_1^{-1} A_3^{-4} D \lambda^{-5} \sin \theta^0 \cos^3 \theta^0 K(t). \quad (5.4.11)$$

Формула (5.4.11) позволяет провести анализ угла θ во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p , q согласно первым двум уравнениям (5.4.1) с учетом (5.1.5) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = A_3^{-1} G(t) \cos \theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией t : $b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A_1 \omega_{\perp}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (5.4.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t) N, \quad \eta(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A_1^{-1} D r^4(t) + \lambda, \quad \eta(t) > 0. \quad (5.4.12)$$

После интегрирования имеем

$$N(t) = N^0 \exp \left[- \int_{t_0}^t \eta(\tau) d\tau \right], \quad N^0 \equiv A_1 \left((p^0)^2 + (q^0)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.4.13)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде $G^2 = N^2 + A_3^2 r^2$.

Отсюда легко получить выражение для N : $N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$ или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (5.4.14)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (5.4.5) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right] |\sin \theta|. \quad (5.4.15)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p , q (5.4.1) к виду линейных уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $\eta(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -\eta(t) \mathbf{N} + g(t) I \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \\ g(t) &= A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + F G^2(t)). \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Здесь I – симплектическая единица, а коэффициент η определен в (5.4.12).

Гироскопический коэффициент $g(t)$ совпадает с аналогичной величиной, определенной при движении тела со сферической полостью, заполненной несжимаемой жидкостью большой вязкости, и с вязкоупругим элементом [298].

Уравнение (5.4.16) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = g I \mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $N^0 = N^0 \mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I \mathbf{n}$; в этом случае получим (5.1.21).

Таким образом, прецессионные вращения твердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (5.4.13), (5.1.21).

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к задаче определения сферического угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (5.4.8). Проведем обезразмеривание уравнения (5.4.8). Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda T, \quad \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \quad \tilde{D} = A_1^{-1} A_3^{-4} D T^5 b^4. \quad (5.4.17)$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \tilde{D} \tilde{\lambda}^{-4} \left[(\tilde{G}^0 \tilde{\lambda} + 1) \exp(-\tilde{\lambda} \tau) - 1 \right]^4 \cos^3 \theta \sin \theta. \quad (5.4.18)$$

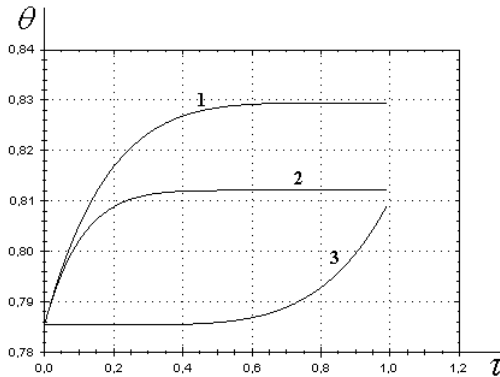


Рис. 60

Уравнения (5.4.18) было численно проинтегрированы для произвольных различных значений \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{D} и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла θ представлены на рис.60 – 63. Рис.60, 61 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 62, 63 – сплюснутому.

Расчет кривых рис. 60 проводился при значении $\tilde{D} = 1$ для различных безразмерных коэффициентов момента сил сопротивления и начального значения кинетического момента. Кривая 1 для $\tilde{G}^0 = 1$ и $\tilde{\lambda} = 0.1$, кривая 2 – $\tilde{G}^0 = \tilde{\lambda} = 1$ и кривая 3 – $\tilde{G}^0 = \tilde{\lambda} = 0.1$. Видно, что во всех расчет-

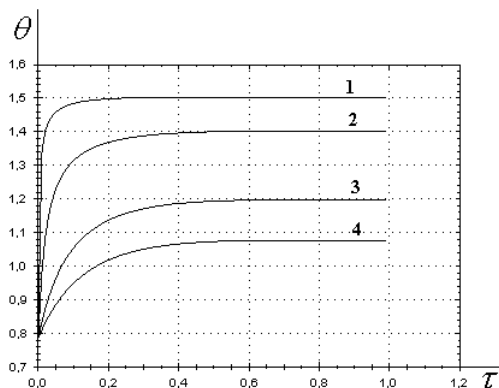


Рис. 61

ных случаях угол θ растет, но характер роста зависит от значения величины \tilde{G}^0 . Данная безразмерная величина характеризует отношение начального кинетического момента твердого тела по отношению к характеристикам управляемого движения. Можно сделать вывод: при малом значении вектора кинетического момента в начальный момент времени изменение сферического угла θ носит более ярко выраженный экспоненциальный характер. Для заданных значений безразмерных параметров уравнения (5.3.18) изменение угла происходит на незначительную величину.

На рис.61 показан более существенный рост сферического угла твердого тела за время торможения с достижением предельного значения. Все кривые получены при значении параметра $\tilde{G}^0 = 1$. Кривая 1 соответствует $\tilde{\lambda} = 1$, а остальные – при значении параметра $\tilde{\lambda} = 0.1$. Численный расчет показал, что с увеличением значения параметра \tilde{D} , рост сферического угла происходит с большим градиентом на начальном промежутке движения твердого тела. Таким образом, чем больше возмущающий момент, обусловленный наличием вязкоупругого элемента, то тем быстрее угол θ достигает своего предельного значения. Само предельное значение сферического угла, при котором происходит полное торможение твердого тела, также зависит от величины возмущающего момента вязкоупругого элемента.

Аналогичный характер поведения для функции $\theta(t)$ получен в работах [293, 298].

Расчет кривых рис.62, 63 проводился для динамически сплюснутого твердого тела. На рис. 62 представлено численное интегрирование

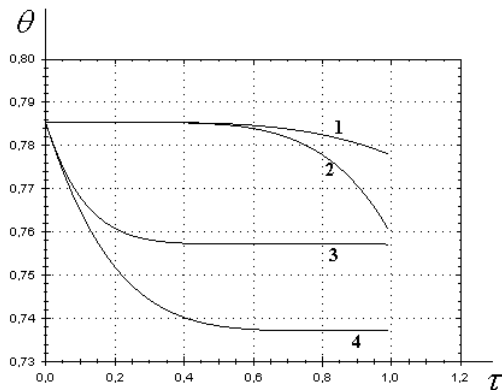


Рис. 62

при значении $\tilde{D} = 1$. Видим что, как и для динамически вытянутого твердого тела, изменение угла θ незначительно. Для тела с такой геометрией масс сферический угол является функцией убывающей. Предельное значение, к которому стремится убывающая функция и характер поведения зависит от величины безразмерных параметров \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$. Для кривых 1, 2 отношение кинетического момента в начальный момент времени к параметрам управляющего момента равно 0.1, а для кривых 3, 4 $\tilde{G}_0 = 1$. Рассматривались значения для безразмерного параметра $\tilde{\lambda} = 1$ для кр. 1, 3 и $\tilde{\lambda} = 0.1$ – кр. 2, 4.

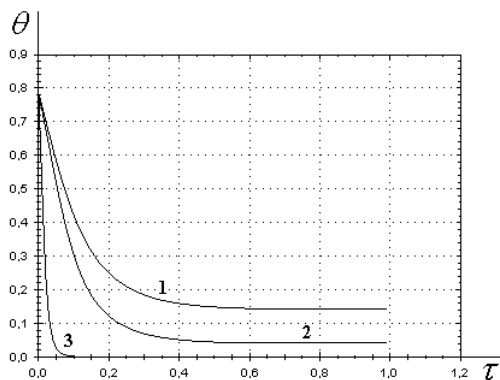


Рис. 63

Из рисунка 63 видно, что угол θ убывает, стремясь к некоторому предельному значению. Характер убывания функции зависит от величины кинетического момента тела в начальный момент времени, а при значительном коэффициенте возмущающего момента вязкоупругого элемента стремится к предельному положению 0 рад. Кривая 1: $\tilde{G}^0 = 2$, $\tilde{\lambda} = 1$, $\tilde{D} = 1$; кр. 2 – $\tilde{G}^0 = 1$, $\tilde{\lambda} = 0.1$, $\tilde{D} = 20$; кр. 3 – $\tilde{G}^0 = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$, $\tilde{D} = 100$.

Численный расчет показал, что характер поведения функции $\theta(t)$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения сферического угла для твердого тела с подвижными внутренними массами [168].

Таким образом, направление вектора кинетического момента \mathbf{G} в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстрдействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с вязкоупругим элементом в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрейшего действия (функция Беллмана) и сферический угол θ , установлены качественные свойства оптимального движения.

§5. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением

1. Постановка задачи оптимального управления.

На основе подхода [223, 293] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 223, 293]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Spr^6\omega_{\perp} - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_{\perp} - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_{\perp}^3 - \lambda A_3 r. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора момента управляющих сил \mathbf{L}^u ; кине-

тический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = [A_1^2 \omega_{\perp}^2 + A_3^2 r^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2$.

Как и в §3 данной главы считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Введенные в (5.5.1) обозначения F, S выражаются через параметры системы согласно (5.2.2)

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-3}A_3, S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|A_1^{-4}A_3^4, d = 1 - A_3A_1^{-1}. \quad (5.5.2)$$

Коэффициенты F, S характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \mu/m = \Lambda\Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость; μ – коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ_1 и Ω таковы, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела близко к движению Эйлера-Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением будут малы (5.2.3).

Итак в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением демпфера, определяются мономами компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степени соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (5.5.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений (5.1.6).

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \boldsymbol{\omega})$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что момент сил, обусловленный движением подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним.

На основе динамического программирования синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, b = b(t, G). \quad (5.5.3)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (5.5.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, G(t_0) = G^0, G(T, t_0, G^0) = 0, T = T(t_0, G^0), \\ V(t, G) = T(t, G).$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau, \\ T = T(t_0, G^0). \quad (5.5.4)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (5.5.4) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), t_0 = 0. \quad (5.5.5)$$

Далее детально анализируется случай (5.5.5).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G (5.5.5) в третье уравнение (5.5.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + A_1^{-2} A_3^{-2} S r^4 (G^2 - A_3^2 r^2)^{3/2} + \lambda \right]. \quad (5.5.6)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (5.5.6) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A_1^{-2} A_3^{-2} S G^4 R^5 \left[G^2 (1 - A_3^2 R^2) \right]^{3/2}. \quad (5.5.7)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (5.5.7) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = A_1^{-2} A_3^{-6} S \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta \lambda^{-7} \left| (G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right|^7, \quad (5.5.8)$$

$$\theta(0) = \theta^0.$$

Его решение записывается следующим образом:

$$2 \sec^4 \theta \operatorname{cosec} \theta + 5 (\sec^2 \theta - 3) \operatorname{cosec} \theta - 2 \sec^4 \theta^0 \operatorname{cosec} \theta^0 -$$

$$-5 (\sec^2 \theta^0 - 3) \operatorname{cosec} \theta^0 + 15 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta^0}{2} \right) \right| = K(t),$$

$$K(t) = \pm 8 A_1^{-2} A_3^{-6} S \lambda^{-7} \left\{ -\frac{f(7\lambda t)}{7} + \frac{7f(6\lambda t)}{6} - \frac{21f(5\lambda t)}{5} + \right. \quad (5.5.9)$$

$$\left. + \frac{35f(4\lambda t)}{4} - \frac{35f(3\lambda t)}{3} + \frac{21f(2\lambda t)}{2} - 7f(\lambda t) + b^7 t \right\},$$

где $f(\beta \lambda t) = \lambda^{-1} b^{7-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta \lambda t) - 1)$, $\beta = 1, 2, \dots, 7$.

Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежат первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (5.5.8).

При $A_1 \approx A_3$, а также θ^0 в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + \frac{1}{8} \sin^2 \theta^0 \cos^5 \theta^0 K(t). \quad (5.5.10)$$

Формула (5.5.10) позволяет провести анализ угла θ во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p , q согласно первым двум уравнениям (5.5.1) с учетом (5.1.5) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = A_3^{-1} G(t) \cos \theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией t : $b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A_1 \omega_{\perp}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (5.5.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t)N + f(t)N^2, \quad N(t_0) = N^0, \quad (5.5.11)$$

$$\eta(t) = \frac{b(t)}{G(t)} + \lambda, \quad f(t) = A_1^{-2} S r^6(t).$$

Это уравнение Бернулли (см. [317], с.297). Интегрируя (5.5.11), находим

$$N^{-1} - (N^0)^{-1} = -E(t) A_1^{-2} S \int_{t_0}^t r^6(t) E^{-1}(t) dt, \quad E(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \eta(t) dt \right]. \quad (5.5.12)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде $G^2 = N^2 + A_3^2 r^2$.

Отсюда легко получить выражение для N : $N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$ или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (5.5.13)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (5.5.4) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right] |\sin \theta|. \quad (5.5.14)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p , q (5.5.1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$, $\eta(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -[\eta(t) - f(t)N] \mathbf{N} + g(t) I \mathbf{N}, \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \\ g(t) &= A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Здесь I – симплектическая единица, а «коэффициенты диссипации» $\eta(t)$ и $f(t)$ определены в (5.5.11).

Уравнение (5.5.15) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = g I \mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0 \mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I \mathbf{n}$; в этом случае получим (5.1.21).

Таким образом, прецессионные вращения твердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (5.5.12), (5.1.21).

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к задаче определения угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (5.5.8). Проведем обезразмеривание уравнения (5.5.8). Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{T}, \tilde{\lambda} = \lambda T, \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \tilde{S} = A_1^{-2} A_3^{-6} S T^8 b^7. \quad (5.5.16)$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \tilde{S} \tilde{\lambda}^{-7} \text{sign}(d) \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta \left| (\tilde{G}^0 \tilde{\lambda} + 1) \exp(-\tilde{\lambda} \tau) - 1 \right|^7. \quad (5.5.17)$$

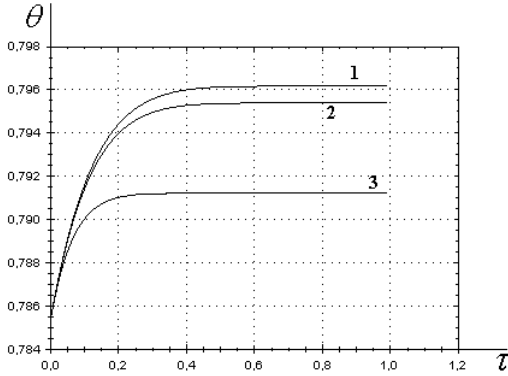


Рис. 64

Уравнения (5.5.17) было численно проинтегрированы для произвольных различных значений \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{S} и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла θ представлены на рис. 64 – 67. Рис. 64, 65 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 66, 67 – сплюснутому.

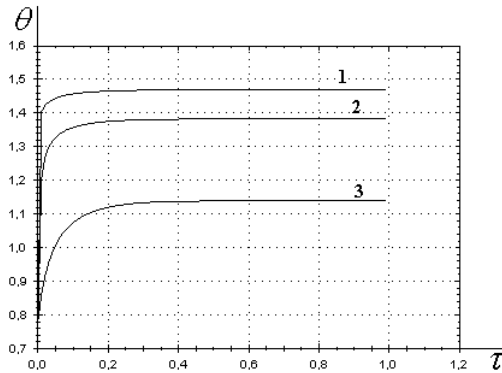


Рис. 65

На рис. 64 представлено небольшое изменение сферического угла, при чем наибольший градиент изменения его величины наблюдается в первой трети времени. Расчет проводился при постоянных безразмерных значениях $\tilde{G}^0 = 1$ и $\tilde{S} = 1$, безразмерный коэффициент, характеризующий величину момента сил сопротивления среды, имел значения

$\tilde{\lambda} = 1, 0.1, 0.01$ для кривых 3, 2 и 1 соответственно. Видно, что чем больше коэффициент $\tilde{\lambda}$, тем на меньшую величину возрастает угол. На рис. 65 представлен численный расчет с большим приращением угла θ . Кривая 1 – $\tilde{G}^0 = 3$, $\tilde{S} = 10$, $\tilde{\lambda} = 1$, кривая 2 – $\tilde{G}^0 = 3$, $\tilde{S} = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$, кривая 3 – $\tilde{G}^0 = 1$, $\tilde{S} = 100$, $\tilde{\lambda} = 0.1$. Видно, что чем больше отношение начального значения кинетического момента к параметрам управления, тем к большему асимптотическому значению стремится сферический угол. При этом градиент возрастания зависит от величины безразмерного коэффициента момента сопротивления. Уменьшение отношения возмущающего момента сил, обусловленного наличием упругого элемента, к параметрам управления при одних и тех же значениях \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$ приводит к уменьшению асимптотического значения угла θ .

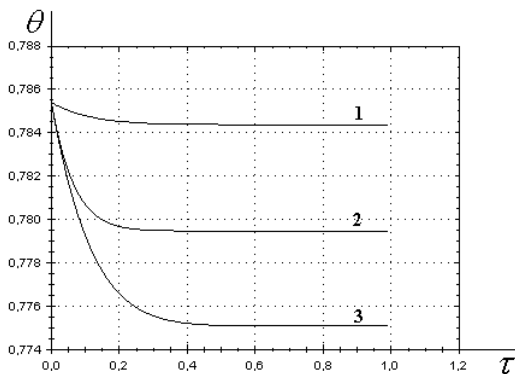


Рис. 66

Аналогичный характер поведения для функции $\theta(t)$ получен в работах [297 – 299].

Численно исследовано изменения сферического угла для динамически сплюснутого твердого тела ($A_1 < A_3$). Получено убывание угла к некоторому асимптотическому значению, которое зависит от безразмерных параметров уравнения (5.5.17). На рис. 66 видно незначительное изменение угла θ при $\tilde{G}^0 = 1$: кривая 1 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, $\tilde{S} = 0.1$, кривая 2 – $\tilde{\lambda} = 1$, $\tilde{S} = 1$, кривая 3 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, $\tilde{S} = 1$. Из рисунка видно, что более существенное убывание численно получено при малом коэффициенте момента со-

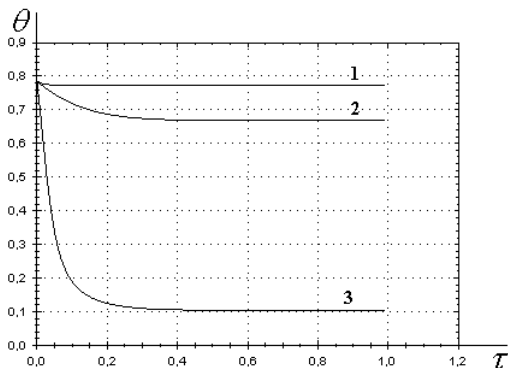


Рис. 67

противления и безразмерном коэффициенте возмущающего момента, обусловленного наличием упругого элемента, одного порядка с безразмерным коэффициентом \tilde{G}^0 . При существенном влиянии возмущающего момента упругого элемента убывание сферического угла может происходить до малого значения. На рис. 67 представлен результат численного расчета поведения сферического угла θ для динамически вытянутого твердого тела при $\tilde{G}^0 = 1$. Кривая 1 – $\tilde{\lambda} = 10$, $\tilde{S} = 10$, кривая 2 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, $\tilde{S} = 10$, кривая 3 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, $\tilde{S} = 100$. Видно, что характер поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ аналогичен рис. 66.

Численный расчет показал, что характер поведения функции $\theta(t)$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения угла нутации для твердого тела с подвижными внутренними массами [168].

Таким образом, направление вектора кинетического момента \mathbf{G} в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол θ , установлены качественные свойства оптимального движения.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулу для числа Рейнольдса.
2. Сформулируйте задачу оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела.
3. Проведите численное интегрирование уравнения изменения сферического угла (5.1.22) для различных значений параметров k , h при различных начальных условиях для угла θ^0 .
4. Постройте графики изменения функции $\theta = \theta(t)$ с помощью библиотеки ZedGraph.dll и проведите анализ полученных результатов.
5. Что является малым параметром задачи о наискорейшем торможении вращений гиростата с массой, связанной демпфером с квадратичным трением?
6. Численно определите характер поведения функции $\theta(t)$ для динамически симметричного гиростата (5.2.14) при $b = const$.
7. Сформулируйте результаты исследования задачи оптимального торможения вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде.
8. Численно исследуйте характер поведения модуля вектора кинетического момента при различных выражениях функции $b = b(t)$ (5.4.4).
9. Запишите формулы частоты колебаний и скорости их затухания.
10. В чем заключаются результаты анализа вращений тела в экваториальной плоскости при оптимальном торможении вращений динамически симметричного тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением?

Глава 6.

Оптимальное по быстрдействию торможение вращений твердого тела в среде с сопротивлением.

Естественное развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а в некотором смысле близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.).

Главы 5 и 6 посвящены исследованию задач оптимального по быстрдействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела под действием моментов сил различной природы. Рассматриваются вращения твердого тела при наличии моментов сил, обусловленных влиянием: а) сферической полости, заполненной жидкостью большой вязкости; б) подвижной массы, соединенной с телом упругой связью с вязким или квадратичным трением; в) линейного сопротивления внешней среды и некоторых сочетаний вышеуказанных возмущающих факторов.

Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю.

В главе 5 рассматриваются задачи оптимального торможения вращений твердого тела под действием двух различных приложенных к данному телу моментов сил. В первых двух параграфах главы 6 исследуются задачи активного торможения вращений твердого тела под действием трех приложенных моментов сил. Кроме того, в этой главе рассматривается задача оптимального по быстрдействию торможения вращений динамически несимметричного твердого тела.

Результаты § 1 главы 6 были впервые опубликованы в работе авторов [323], § 2 – в статье [302], § 3 – в статье авторов [303], § 4 – в работах [325, 326].

§1. Активное торможение вращений симметричного гиростата с подвижной массой в вязкой среде.

1. Постановка задачи оптимального управления.

Исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. На твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные ранее в работах [223, 293, 298, 301].

На основе подхода [135, 168, 223] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 135, 168, 223]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Dr^4p + Qpr^2 - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Dr^4q + Qqr^2 - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} Dr^3(p^2 + q^2) + H(p^2 + q^2)r - \lambda A_3 r. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u , кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = \left[A_1^2(p^2 + q^2) + A_3^2 r^2 \right]^{1/2}.$$

Как и в §3 главы 5 считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту. Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Введенные в (6.1.1) обозначения D, F, Q, H выражаются через параметры системы согласно (5.1.3)

$$\begin{aligned} D &= m\rho^2 \Lambda \Omega^{-4} A_1^{-4} A_3^3 (A_1 - A_3), \quad F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \\ Q &= \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad H = \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1). \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и вязкостью демпфера, являются монома-

ми вектора $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ четвертой и пятой степенью соответственно. Момент со стороны вязкой жидкости определяется мономами третьей степени от $\boldsymbol{\omega}$. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (6.1.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\omega}(T) = 0, T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (6.1.3)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \boldsymbol{\omega})$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что моменты сил, обусловленные вязкой жидкостью в полости, а также движением вязкоупругого элемента являются внутренними для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстрдействию управления имеет вид [223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, b = b(t, G). \quad (6.1.4)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (6.1.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, G(t_0) = G^0, G(T, t_0, G^0) = 0, T = T(t_0, G^0), \\ V(t, G) = T(t, G).$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau, T = T(t_0, G^0). \quad (6.1.5)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрогодействия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (6.1.5) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (6.1.6)$$

Далее детально анализируется случай (6.1.6).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G (6.1.6) в третье уравнение (6.1.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \lambda - A_1^{-1} A_3^{-1} (G^2 - A_3^2 r^2) (HA_1^{-1} - DA_3^{-1} r^2) \right]. \quad (6.1.7)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (6.1.7) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = A_1^{-1} A_3^{-1} R G^2 (1 - A_3^2 R^2) [HA_1 - DA_3^{-1} GR^2]. \quad (6.1.8)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (6.1.8) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & A_1^{-1} A_3^{-1} \lambda^{-2} \sin \theta \cos \theta \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \times \\ & \times \left\{ -A_1^{-1} H + A_3^{-3} D \lambda^{-2} \cos \theta \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \right\}, \quad \theta(0) = \theta^0. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (6.1.9) независимо от изменения G .

Исследуем поведение сферического угла малой окрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A_1^{-1} A_3^{-1} \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \times \quad (6.1.10)$$

$$\times \left\{ -A_1^{-1} H + A_3^{-3} D \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \right\} \delta\theta, \\ |\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(K(t)), \quad (6.1.11)$$

$$K(t) = -A_1^{-1} A_3^{-1} \lambda^{-3} \left\{ Z_1 \frac{f(4\lambda t)}{4} - 4Z_1 \frac{f(3\lambda t)}{3} + \left(3Z_1 - \frac{1}{2} Z_2 \right) f(2\lambda t) - \right. \\ \left. - 2(2Z_1 - Z_2) f(\lambda t) + (Z_1 \lambda^{-1} - Z_2 \lambda) b^4 t \right\},$$

где $f(\beta\lambda t) = b^{4-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta\lambda t) - 1)$, $Z_1 = A_3^{-3} D$,

$$Z_2 = A_1^{-1} H b^{-2}, \beta = 1, \dots, 4.$$

Из (6.1.11) следует, что с ростом t при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает ($-H < 0$, $D < 0$), а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает ($-H > 0$, $D > 0$).

Рассмотрим второй случай $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$ ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$). Аналогично (6.1.10) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A_1^{-1} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \quad (6.1.12)$$

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp \left\{ A_1^{-1} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[-0,5(G^0 \lambda + b)^2 \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2b(G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t \right] \right\}. \quad (6.1.13)$$

Из (6.1.13) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A_1 < A_3$ – монотонно убывает. Отметим, что в уравнение (6.1.12) не входят слагаемые, обусловленные влиянием подвижной массы.

При $A_1 \approx A_3$, а также θ^0 в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + S(t). \quad (6.1.14)$$

$$S(t) = -A_1^{-1} A_3^{-1} \lambda^{-3} \cos \theta^0 \sin \theta^0 \left\{ Z_1 \frac{f(4\lambda t)}{4} - 4Z_1 \frac{f(3\lambda t)}{3} + \right. \\ \left. + \left(3Z_1 - \frac{1}{2} Z_2 \right) f(2\lambda t) - 2(2Z_1 - Z_2) f(\lambda t) + (Z_1 - Z_2) b^4 \lambda t \right\},$$

где $f(\beta\lambda t) = b^{4-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta\lambda t) - 1)$, $Z_1 = A_3^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0$,

$$Z_2 = A_1^{-1} H b^{-2}, \quad \beta = 1, \dots, 4.$$

Формула (6.1.14) позволяет провести анализ сферического угла во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение экваториальных компонент вектора ω p , q согласно первым двум уравнениям (6.1.1). Введем переменную $N = A_1 \omega_\perp$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (6.1.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t) N, \quad \eta(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A_1^{-1} r^2(t) [Dr^2(t) + Q] + \lambda, \quad \eta(t) > 0. \quad (6.1.15)$$

Интегрируя (6.1.15), находим

$$N(t) = N^0 \exp \left[- \int_{t_0}^t \eta(\tau) d\tau \right], \quad N^0 \equiv A_1 \left((p^0)^2 + (q^0)^2 \right)^{1/2}. \quad (6.1.16)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде $G^2 = N^2 + A_3^2 r^2$.

Отсюда легко получить выражение для N : $N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$ или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (6.1.17)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (6.1.5) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right] |\sin \theta|. \quad (6.1.18)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p , q (6.1.1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $\eta(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -\eta(t)\mathbf{N} + g(t)\mathbf{I}\mathbf{N}, \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \\ g(t) &= A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Здесь I – симплектическая единица, а «коэффициент диссипации» $\eta(t)$ определен в (6.1.15).

Уравнение (6.1.19) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = g\mathbf{I}\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0 \mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = \mathbf{I}\mathbf{n}$; в этом случае получим (5.1.21).

Таким образом, прецессионные вращения твердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (6.1.16), (5.1.21).

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к задаче определения угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (6.1.9). Проведем обезразмеривание уравнения (6.1.9). Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda T, \quad \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \quad \tilde{H} = A_1^{-2} H A_3^{-1} T^3 b^2, \quad \tilde{D} = A_1^{-1} A_3^{-4} D T^5 b^4.$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\tilde{H} \tilde{\lambda}^{-2} \sin \theta \cos \theta f^2(\tau) + \tilde{\lambda}^{-4} \tilde{D} \sin \theta \cos^2 \theta f^4(\tau), \quad (6.1.20)$$

где $f(\tau) = (\tilde{G}^0 \tilde{\lambda} + 1) \exp(-\tilde{\lambda} \tau) - 1$.

Уравнение (6.1.20) было численно проинтегрировано для произвольных различных значений \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{H} , \tilde{D} и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики из-

менения угла θ представлены на рис. 68-71. Рис. 68-70 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 71-73 – сплюснутому.

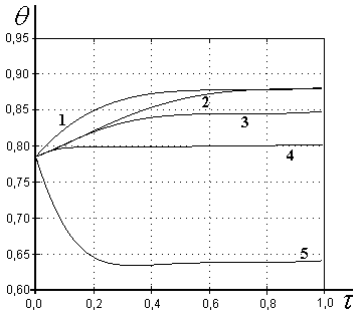


Рис. 68

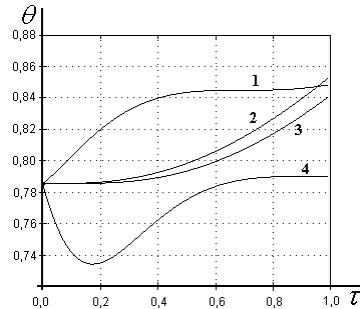


Рис. 69

Расчет кривых рис. 68 был проведен при различных значениях безразмерного кинетического момента в начальный момент времени $\tilde{G}^0 = 3, 2, 0.1, 1$ для кривых 1-4 соответственно. Другие параметры имели единичные значения. Из рисунка видно, что характер поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ существенно зависит от величины параметра \tilde{G}^0 . Функция является монотонно убывающей только в случае, когда параметр \tilde{G}^0 совпадает с другими безразмерными коэффициентами, а во всех остальных расчетных случаях угол θ сначала увеличивается, а затем убывает. При этом увеличение безразмерного кинетического момента приводит к большим градиентам возрастания сферического угла, а в момент остановки твердого тела значение угла θ не достигает своего первоначального значения.

На рис. 69 представлен результат численного интегрирования уравнения (6.1.20) при различных значениях безразмерного коэффициента для момента сил сопротивления среды. Кривая 2 – $\tilde{\lambda} = 10$, кривая 3 – $\tilde{\lambda} = 1$, кривая 4 – $\tilde{\lambda} = 0.1$, остальные параметры уравнения имеют единичные значения. Имеем, что чем больше безразмерный коэффициент для момента сопротивления среды, то тем на меньший угол отклонится ось твердого тела. При этом во всех трех расчетных случаях функция является монотонно убывающей. Кривая 1 рис. 69 показывает характер поведения функции сферического угла при увеличении безразмерного коэффициента момента сил вязкоупругого элемента. $\tilde{D} = 5$ для кривой 1 и $\tilde{D} = 1$ для кривой 3. Из рисунка видно, что при существенном влиянии момента сил вязкоупругого

элемента функция $\theta = \theta(\tau)$ становится немонотонной, но во всех расчет случаях рис. 69 функция стремится к некоторому предельному значению.

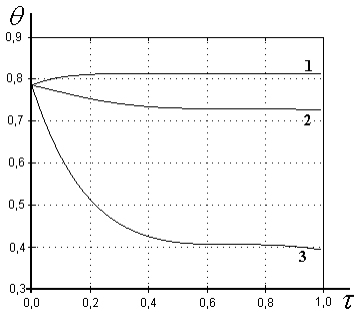


Рис. 70

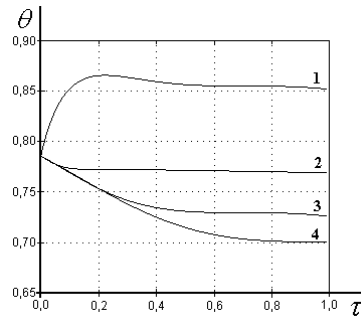


Рис. 71

Проведено численное исследование поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ для различных значений безразмерного коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости: $\tilde{H} = 0.1, 5, 1$ для кривых 1 – 3 рис. 70 соответственно. Видно, что наибольшее уменьшение сферического угла происходит в том случае, когда все безразмерные коэффициенты уравнения (6.1.20) имеют одинаковую единичную величину, а в других случае изменение угла незначительное, но характер поведения функции имеет разный вид. Если $\tilde{H} < 1$, то функция $\theta = \theta(\tau)$ монотонно убывает, а для $\tilde{H} > 1$ возрастает.

Проведено численное исследование характера поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ для динамически сплюснутого тела. На рис. 71 представлен результат численного интегрирования уравнения (6.1.20) при различных выражениях безразмерного начального значения кинетического момента твердого тела: $\tilde{G}^0 = 1, 0.1, 0.01, 1.5$ для кривых 1 – 4 соответственно, все остальные параметры уравнения имели единичные значения. Видно, что при единичном значении параметра \tilde{G}^0 , совпадающем по величине с остальными параметрами уравнения, функция является возрастающей и имеет перегиб. В случае малого начального значения кинетического момента $\theta = \theta(\tau)$ носит явно выраженный экспоненциальный характер. Самый сложный вид функция имеет при значении параметра больше 1, в этом случае сферический угол изначально уменьшается, достигая некоторого

минимального значения, а затем плавно увеличивается до некоторого предельного значения, при котором происходит полное торможение тела.

Кривые 2 – 4 рис.72 показывают зависимость сферического угла от безразмерного коэффициента сопротивления среды для динамически сплюснутого твердого тела. Коэффициент $\tilde{\lambda}=0.1, 1, 10$ для соответствующих кривых. Во всех трех расчетных случаях функция $\theta = \theta(\tau)$ является монотонно возрастающей. При изменении значения безразмерного коэффициента момента сил вязкоупругого элемента имеем, что для $\tilde{D}=0.1$ (кривая 1) наблюдается большой градиент возрастания функции $\theta = \theta(\tau)$ изначальнo, а для $\tilde{D}=5$ функция сферического угла становится убывающей.

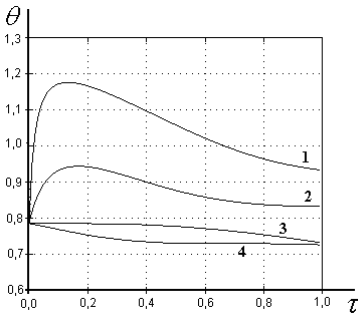


Рис. 72

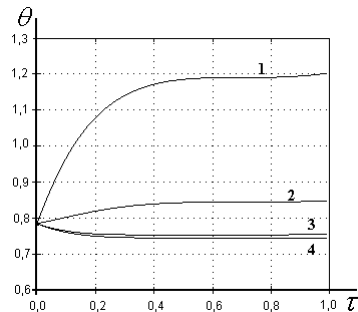


Рис. 73

На рис.73 представлен результат численного интегрирования при различных значениях безразмерного коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости. $\tilde{H}=5, 1, 0.1, 0.01$ для кривых 1 – 4 соответственно, все остальные безразмерные коэффициенты имели единичное значение. Существенное увеличение сферического угла наблюдается при наибольшем значении коэффициента \tilde{H} , при малых значениях – функция $\theta = \theta(\tau)$ является монотонно убывающей.

Таким образом, аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстрдействию торможения вращений динамически симметричного квазитвердого тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрдействия (функция Беллмана) и сферический угол $\theta(\tau)$, установлены качественные свойства оптимального движения.

§2. Оптимальная стабилизация вращений симметричного гиростата с внутренними степенями свободы в среде с сопротивлением.

1. Постановка задачи оптимального управления.

Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Кроме того, тело содержит подвижную массу, прикрепленную демпфером к точке на оси симметрии посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. На твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления. Управление вращениями проводится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая ниже модель обобщает исследованные ранее в работах [298, 299, 300, 301].

На основе подхода [135, 223, 293] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 135, 223, 293]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Spr^6\omega_{\perp} + Qpr^2 - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_{\perp} + Qqr^2 - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_{\perp}^2 + H(p^2 + q^2)r - \lambda A_3 r. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, $L_{p,q,r}$ – проекции вектора управляющего момента сил \mathbf{L}^u , кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = \left[A_1^2 (p^2 + q^2) + A_3^2 r^2 \right]^{1/2}.$$

Как и в §4 главы 5 считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

Предполагается, что допустимые значения \mathbf{L}^u ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Введенные в (6.2.1) обозначения S, F, Q, H выражаются через параметры системы согласно (5.2.2)

$$\begin{aligned} S &= m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} d |d| A_1^{-4} A_3^4, \quad F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \quad d = 1 - A_3 A_1^{-1}, \\ Q &= \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad H = \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением, являются мо-
номами компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степенью
соответственно. Момент сил со стороны вязкой жидкости определяется
мономами компонент третьей степени от вектора $\boldsymbol{\omega}$. Математическая мо-
дель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравне-
ний Эйлера (6.2.1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения
вращений(6.1.3).

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза
 $u = u(t, \boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быст-
родействия $T = T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \boldsymbol{\omega})$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Отметим, что моменты сил, обусловленные вязкой жидкостью в
полости, а также движением подвижной массы, соединенной с телом упру-
гой связью при наличии квадратичного трения, являются внутренними для
фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внеш-
ним.

На основе динамического программирования и неравенства
Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид
[223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, b = b(t, G). \quad (6.2.3)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (6.2.1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$,
третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее
интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, G(t_0) = G^0, G(T, t_0, G^0) = 0, T = T(t_0, G^0), \\ V(t, G) = T(t, G).$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau, T = T(t_0, G^0). \quad (6.2.4)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрого действия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (6.2.4) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (6.2.5)$$

Далее детально анализируется случай (6.2.5).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.

Подстановка известного выражения для G (6.2.5) в третье уравнение (6.2.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + \lambda - A_1^{-2} A_3^{-1} H (G^2 - A_3^2 r^2) + A_1^{-2} A_3^{-2} S r^4 (G^2 - A_3^2 r^2)^{3/2} \right]. \quad (6.2.6)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R – неизвестная функция, уравнение (6.2.6) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = A_1^{-2} A_3^{-1} H G^2 R (1 - A_3^2 R^2) - A_1^{-2} A_3^{-2} S G^7 R^5 (1 - A_3^2 R^2)^{3/2}. \quad (6.2.7)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – сферический угол. В результате для неизвестной R получается соотношение $A_3 R = \cos \theta$. Уравнение (6.2.7) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = -A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \sin \theta \cos \theta + A_1^{-2} A_3^{-6} S \lambda^{-7} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^7 \cos^5 \theta \sin^2 \theta, \quad \theta(0) = \theta^0. \quad (6.2.8)$$

Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ – стационарные точки уравнения (6.2.8) независимо от изменения G .

Исследуем поведение сферического угла малой полуокрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = -A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \quad (6.2.9)$$

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(K(t)), \quad (6.2.10)$$

$$K(t) = -A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[\frac{1}{2} \lambda^{-1} (G^0 \lambda + b)^2 (1 - \exp(-2\lambda t)) - \right. \\ \left. - 2b \lambda^{-1} (G^0 \lambda + b) (1 - \exp(-\lambda t)) + b^2 t \right].$$

Из (6.2.10) следует, что с ростом t при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает ($-H < 0$), а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) – монотонно возрастает ($-H > 0$).

Рассмотрим второй случай $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$ ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$). Аналогично (6.2.9) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \delta\theta, \quad (6.2.11)$$

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(-K(t)). \quad (6.2.12)$$

Из (6.2.12) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A_1 < A_3$ – монотонно убывает. Отметим, что в уравнение (6.2.11) не входят слагаемые, обусловленные влиянием подвижной массы.

При $A_1 \approx A_3$, а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + S(t). \quad (6.2.13)$$

$$S(t) = A_1^{-2} A_3^{-1} \lambda^{-3} \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[-B(\theta^0) \left[\frac{f(7\lambda t)}{7} - \frac{7f(6\lambda t)}{6} + \frac{21f(5\lambda t)}{5} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{35f(4\lambda t)}{4} + \frac{35f(3\lambda t)}{3} - \frac{21f(2\lambda t)}{2} + 7f(\lambda t) + b^7 \lambda t \right] + \right. \\ \left. + H \left[\frac{f(2\lambda t)}{2b^5} - \frac{2f(\lambda t)}{b^5} - b^2 \lambda t \right] \right\},$$

$$B(\theta^0) = A_3^{-5} S \lambda^{-3} \sin \theta^0 \cos^4 \theta^0,$$

$$f(\beta \lambda t) = b^{7-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta \lambda t) - 1), \quad \beta = 1, 2, \dots, 7.$$

Формула (6.2.13) позволяет провести анализ сферического угла с течением времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p , q согласно первым двум уравнениям (6.2.1). Введем переменную $N = A_1 \omega_\perp$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (6.2.1) на $A_1 p N^{-1}$, а второе – на $A_1 q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение

$$\dot{N} = -\eta(t)N + f(t)N^2, \quad N(t_0) = N^0, \\ \eta(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A^{-1} Q r^2(t) + \lambda, \quad \eta(t) > 0, \quad f(t) = A^{-2} S r^6(t). \quad (6.2.14)$$

Это уравнение Бернулли (см. [317] с.297).

Интегрируя (6.2.14), находим

$$E(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \eta(t) dt \right]. \quad (6.2.15)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде $G^2 = N^2 + A_3^2 r^2$.

Отсюда легко получить выражение для N : $N = (G^2 - A_3^2 r^2)^{1/2}$ или, учитывая соотношение $A_3 r = G \cos \theta$,

$$N = G|\sin \theta|. \quad (6.2.16)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (6.2.5) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right] |\sin \theta|. \quad (6.2.17)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п.5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p , q (6.2.1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $\eta(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -[\eta(t) - f(t)N(t)]\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \mathbf{N} = (A_1 p, A_1 q)^T, \\ g(t) &= A_1^{-1} r(t) (A_1 - A_3 + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Здесь I – симплектическая единица, а «коэффициенты диссипации» $\eta(t)$ и $f(t)$ определены в (6.2.14).

Уравнение (6.2.18) для \mathbf{N} интегрируется в явном виде. Полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ – орт вектора \mathbf{N} , получим для неизвестной \mathbf{n} уравнение $\dot{\mathbf{n}} = gI\mathbf{n}$. Начальное значение $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$, $|\mathbf{n}^0| = 1$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0 \mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$ для всех $t \in [0, T_0]$. Введем аргумент σ так, чтобы $\mathbf{n}' = I\mathbf{n}$; в этом случае получим (5.1.21).

Таким образом, прецессионные вращения твердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (6.2.15), (5.1.21).

5. Численный анализ и выводы.

Обратимся вновь к задаче определения угла $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (6.2.8). Проведем обезразмеривание уравнения (6.2.8). Введем обозначения

$$\tau = \frac{t}{T}, \tilde{\lambda} = \lambda T, \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \tilde{H} = A_1^{-2} H A_3^{-1} T^3 b^2, \tilde{S} = A_1^{-2} A_3^{-6} S T^8 b^7.$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\tilde{H}\tilde{\lambda}^{-2}f^2(\tau)\sin\theta\cos\theta + \tilde{S}\tilde{\lambda}^{-7}f^7(\tau)\cos^5\theta\sin^2\theta, \quad (6.2.19)$$

где $f(\tau) = (\tilde{G}^0\tilde{\lambda} + 1)\exp(-\tilde{\lambda}\tau) - 1$.

Уравнения (5.3.18) было численно проинтегрированы для произвольных различных значений \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{H} , \tilde{S} и $\theta^0 = \pi/4$ рад. Графики изменения угла θ представлены на рис.74 – 77. Рис.74, 75 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 76, 77 – сплюснутому.

На рис. 74 исследуется характер поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ при различных значениях безразмерного коэффициента кинетического момента тела в начальный момент времени и при различных значениях безразмерного коэффициента момента сил сопротивления. Кривые 2, 3, 5 соответствуют значениям $\tilde{G}^0 = 0.1, 1, 1.5$, при этом все остальные безразмерные коэффициенты равны единице. Видно, что характер поведения функции сферического угла зависит от порядка величины \tilde{G}^0 . Если \tilde{G}^0 на порядок меньше единицы, то функция \tilde{G}^0 имеет немонотонный характер, при этом само изменение сферического угла весьма незначительно. При значениях порядка 1 и выше, функция $\theta = \theta(\tau)$ является монотонно убывающей при этом, чем больше значение \tilde{G}^0 , тем с большим градиентом происходит убывание. В этих расчетных случаях θ стремится к некоторому предельному значению.

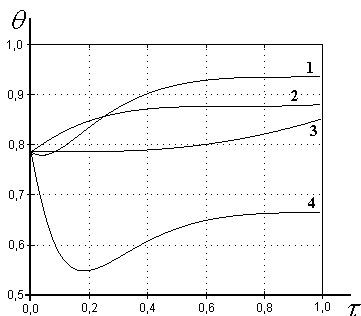


Рис. 74

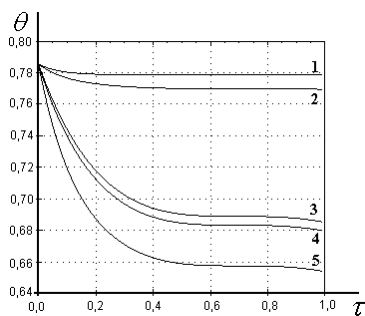


Рис. 75

Расчет проводился для различных значений $\tilde{\lambda} = 0.1, 1, 10$ – кривые 4, 3, 1 рис. 74 соответственно, при единичных значениях остальных безразмерных параметров уравнения (6.2.19). Характер поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ остается монотонным во всех расчетных случаях, а предельное значение тем больше, чем меньше коэффициент сопротивления среды, что вполне согласуется с физической постановкой задачи.

Численный расчет показал, что характер поведения функция $\theta = \theta(\tau)$ остается одинаковым при различных значениях безразмерного коэффициента момента сил подвижной массы. Это видно из рис. 75 для кривых 3 – 5, которые получены для $\tilde{S} = 0.1, 1, 5$ соответственно. При расчете все остальные безразмерные коэффициенты моментов сил равны 1.

На рис. 75 также представлен результат численного интегрирования уравнения (6.2.19) для различных значений безразмерного коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости твердого тела. Для $\tilde{H} = 0.01, 0.1, 1$ получены кривые 1, 2, 4 соответственно. Во всех расчетных случаях функция $\theta = \theta(\tau)$ является монотонно убывающей и стремящейся к некоторому предельному значению сферического угла. Следует отметить, что при увеличении безразмерной величины \tilde{H} наблюдается более значительное уменьшение угла θ и его стремление к нулевому значению.

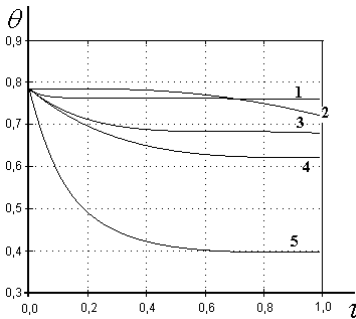


Рис. 76

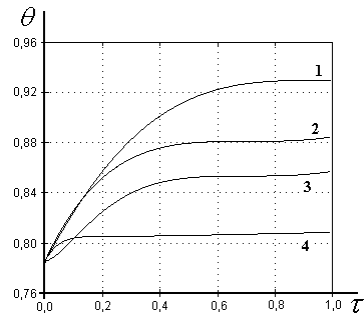


Рис. 77

Проведено численное интегрирование уравнения (6.2.19) для динамически сплюснутого тела при различных значениях безразмерного параметра \tilde{G}^0 . Результат расчета приведен на рис. 76, значения $\tilde{G}^0 = 1.5, 1, 0.1, 1.75$ соответствуют кривым 1–4. Видно, что функция $\theta = \theta(\tau)$ имеет

монотонный характер для значений \tilde{G}^0 меньших или равных единице. При значениях больших единицы сферический угол сначала уменьшается, а затем увеличивается до некоторого предельного значения, при котором происходит полное торможение твердого тела.

На рис.77 представлен результат численного интегрирования при различных значениях безразмерных коэффициентов моментов сил сопротивления среды и подвижной массы. Кривая 1 соответствует значениям $\tilde{G}^0 = \tilde{H} = \tilde{S} = 1$, $\tilde{\lambda} = 0.1$, кривая 2 – $\tilde{S} = \tilde{H} = \tilde{\lambda} = \tilde{G}^0 = 1$, кривая 3 – $\tilde{G}^0 = \tilde{\lambda} = \tilde{H} = 1$, $\tilde{S} = 5$, кривая 4 – $\tilde{S} = \tilde{H} = \tilde{G}^0 = 1$, $\tilde{\lambda} = 10$. Видно, что характер поведения функции аналогичен во всех расчетных случаях. Ось тела достигает предельного положения меньше чем за половину времени торможения.

Таким образом, аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного квазитвердого тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол $\theta(\tau)$, установлены качественные свойства оптимального движения.

§3. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в среде с сопротивлением.

1. Постановка задачи оптимального управления.

На основе подхода [223] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть записаны в виде [70, 74, 223]

$$J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] = M - \lambda J\omega, \quad (6.3.1)$$

Здесь $\omega = (p, q, r)$ – вектор абсолютной угловой скорости, $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, M – вектор управляющего момента сил, кинетический момент тела $G = J\omega$, его модуль $G = |G| = [A_1^2 p^2 + A_2^2 q^2 + A_3^2 r^2]^{1/2}$.

Как и в §4 главы 5 считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту. Предполагается, что допустимые значения M ограничены сферой и заданы в виде (5.1.2).

Тормозящий момент сопротивления является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений твердого тела построена в виде уравнений Эйлера (6.3.1).

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений (5.1.6). Решение задачи (6.3.1), (5.1.6) строится в точной постановке без предположения о малости различных параметров.

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \omega)$.

2. Решение задачи оптимального торможения.

Решим задачу синтеза оптимального управления в упрощенной постановке. На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстрдействию управления имеет вид [223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_2 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (6.3.2)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (6.3.1) на $A_1 p$, второе – на $A_2 q$, третье – на $A_3 r$ и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \quad (6.3.3)$$

$$V(t, G) = T(t, G).$$

В предположении $b = b(t)$, т.е. функция $b(t)$ не зависит от модуля G получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau, \quad T = T(t_0, G^0). \quad (6.3.4)$$

Решение всегда существует, что приводит к построению решения задачи оптимального торможения в форме синтеза. Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрогодействия. При $b = \text{const}$ решение уравнения (6.3.3) для G и краевой задачи (6.3.4) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (6.3.5)$$

Далее подробно анализируется случай (6.3.5). Домножим первое уравнение (6.3.1) на p , второе – на q , третье – на r и сложим. Получим выражение для производной от кинетической энергии H

$$\dot{H} = -\frac{2bH}{G} - 2\lambda H, \quad H = \frac{1}{2}(A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2). \quad (6.3.6)$$

Поскольку функция $G(t)$ известна, то уравнение (6.3.6) допускает полное интегрирование

$$H = H^0 G^{0-2} \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2. \quad (6.3.7)$$

Примем для определенности, что $A_1 > A_2 > A_3$. Рассмотрим сначала движение при условии $2HA_1 \geq G^2 > 2HA_2$, соответствующем траекториям, охватывающим ось наибольшего момента инерции Oz_1 . Введем функцию k , имеющую смысл модуля эллиптических функций [305]

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2HA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2HA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1) \quad (6.3.8)$$

и однозначно связанную с кинетической энергией H и величиной кинетического момента G . Значение $k = 0$ соответствует вращению вокруг оси Oz_1 , а $k = 1$ – движению по сепаратрисе. При помощи формул (6.3.1), (6.3.2), (6.3.5), (6.3.7) получим выражение для производной k^2

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{2(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t)}{\sigma \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]} (\alpha + \delta k^2 + \gamma k^4), \quad k^2(0) = (k^0)^2. \quad (6.3.9)$$

$$\sigma = \lambda^{-1} (A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_1 - A_3),$$

$$\alpha = A_1 (A_2 - A_3)^2 \left(1 - 2A_1 H^0 (G^0)^{-2} \right),$$

$$\delta = (A_1 - A_2)(A_2 - A_3) \left(A_1 + A_3 - 4A_1 A_3 H^0 (G^0)^{-2} \right),$$

$$\gamma = A_3 (A_1 - A_2)^2 \left(1 - 2A_3 H^0 (G^0)^{-2} \right).$$

Стационарные точки k^{*2} соответствуют положительным корням уравнения $\alpha + \delta z + \gamma z^2 = 0$, $z = k^2$.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (6.3.9), получим неявную зависимость k^2 от времени t

$$\frac{\delta + 2\gamma k^2 - \sqrt{-\Delta}}{\delta + 2\gamma k^2 + \sqrt{-\Delta}} = \exp(4\lambda t) \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^{4\lambda t}, \quad (6.3.10)$$

где $\Delta = -(A_1 - A_2)^2 (A_2 - A_3)^2 (A_1 - A_3)^2$.

Формула (6.3.10) связывает переменные k^2 и t ; она элементарно разрешима относительно k^2 .

3. Построение оптимального управляемого движения.

Приведем решение системы (6.3.1) другим способом. Система (6.3.1) в векторном виде записывается следующим образом

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} - \lambda \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (6.3.11)$$

Здесь \mathbf{L} – вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела.

Обозначим

$$L_x = A_1 p, \quad L_y = A_2 q, \quad L_z = A_3 r. \quad (6.3.12)$$

Тогда

$$\dot{L}_x = A_1 \dot{p}, \quad \dot{L}_y = A_2 \dot{q}, \quad \dot{L}_z = A_3 \dot{r}, \quad (6.3.13)$$

где L_x, L_y, L_z – проекции вектора \mathbf{L} на оси связанной системы координат $Oxyz$. Систему (6.3.11) с учетом (6.3.12), (6.3.13) можно записать следующим образом

$$\dot{\mathbf{L}} + [J^{-1} \mathbf{L} \times \mathbf{L}] = -b \frac{\mathbf{L}}{G} - \lambda \mathbf{L}. \quad (6.3.14)$$

Проведем в (6.3.14) замену $\mathbf{L} = G \mathbf{l}$, где G – величина кинетического момента, \mathbf{l} – орт вектора \mathbf{L} . Учитывая, что $\dot{G} = -b - \lambda G$, получим

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}^0, \quad \mathbf{L}(T) = 0, \quad \dot{\mathbf{L}} = \dot{G} \mathbf{l} + G \dot{\mathbf{l}}. \quad (6.3.15)$$

Подстановка формулы (6.3.15) в (6.3.14) с учетом равенства $\dot{G} = -b - \lambda G$ дает

$$G^{-1} \dot{\mathbf{l}} + [J^{-1} \mathbf{l} \times \mathbf{l}] = 0. \quad (6.3.16)$$

Выполним замену аргумента t на τ . Из (6.3.16) окончательно следует

$$\mathbf{l}' + [J^{-1} \mathbf{l} \times \mathbf{l}] = 0, \quad d\tau = G(t) dt, \quad l(0) = L^0 / G^0. \quad (6.3.17)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{K} = J^{-1} \mathbf{I}. \quad (6.3.18)$$

Подставляя (6.3.18) в (6.3.17) получим систему уравнений, аналогичную системе уравнений в случае Эйлера для свободного твердого тела:

$$\mathbf{JK}' + [\mathbf{K} \times \mathbf{JK}] = 0. \quad (6.3.19)$$

Оно может быть полностью проинтегрировано. Для сравнения приведем формулы.

Для этого умножим скалярно уравнение (6.3.19) на \mathbf{K} , результатом чего будет уравнение:

$$(\mathbf{K}, \mathbf{JK}') = 0. \quad (6.3.20)$$

Интегрируя это уравнение, получим выражение, аналогичное выражению для кинетической энергии [320]

$$H_k = \frac{1}{2} (\mathbf{K}, \mathbf{JK}) = \text{const}. \quad (6.3.21)$$

Умножим теперь уравнение (6.3.19) скалярно на \mathbf{I} . Имеем соотношение:

$$(\mathbf{JK}, \mathbf{JK}) = G_k^2 = 1, \quad (6.3.22)$$

где G_k – величина вектора \mathbf{I} кинетического момента.

Выразим из (6.3.21) и (6.3.22) величины k_x^2 и k_z^2 через k_y^2 , A_1 , A_2 , A_3 , H_k , G_k

$$\begin{aligned} k_x^2 &= \frac{1}{A_1(A_3 - A_1)} \left[(2H_k A_3 - G_k^2) - A_2(A_3 - A_2)k_y^2 \right], \\ k_z^2 &= \frac{1}{A_3(A_3 - A_1)} \left[(G_k^2 - 2H_k A_1) - A_2(A_2 - A_1)k_y^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Определяемые из (6.3.23) значения k_x , k_z подставим во второе уравнение системы (6.3.19). Получим дифференциальное уравнение для k_y с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dk_y}{d\tau} &= \pm \frac{1}{A_2 \sqrt{A_1 A_3}} \left[(2H_k A_3 - G_k^2) - A_2(A_3 - A_2)k_y^2 \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[(G_k^2 - 2H_k A_1) - A_2(A_2 - A_1)k_y^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

Если уравнение (6.3.20) проинтегрировано, то функции k_x , k_z найдутся из равенств (6.3.23). При этом при извлечении квадратных кор-

ней перед радикалами возможны два знака: плюс или минус. Конкретный выбор этих знаков делается при помощи уравнений (6.3.19).

Выделим два случая, соответствующих различным соотношениям между постоянными H_k и G_k . Будем, для определенности считать, что $A_1 > A_2 > A_3$.

Рассмотрим случай $2H_k A_1 \geq G_k^2 > 2H_k A_2$, при котором величина k_x во все время движения отлична от нуля.

Для интегрирования уравнения (6.3.24) сделаем замены переменных

$$k_y = \pm \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \sin \zeta, \quad \tau' = \sqrt{\frac{(A_1 - A_2)(G_k^2 - 2H_k A_3)}{A_1 A_2 A_3}} t \quad (6.3.25)$$

и введем положительный параметр $0 \leq k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2H_k A_1 - G_k^2)}{(A_1 - A_2)(G_k^2 - 2H_k A_3)}.$$

В новых переменных уравнение (6.3.24) запишется в виде

$$\frac{d\zeta}{d\tau'} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}.$$

Пусть при $t = 0$ компонента $k_y = 0$; тогда $\zeta = \text{am } \tau'$, где am – эллиптическая амплитуда по модулю k . Решение уравнений Эйлера (6.3.19) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби dn , sn , cn (см. [308]) в виде:

$$k_x = \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_k A_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \text{dn}(\tau'; k), \quad k_y = \pm \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \text{sn}(\tau'; k),$$

$$k_z = \mp \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \text{cn}(\tau'; k). \quad (6.3.26)$$

Учитывая, что $\mathbf{I} = \mathbf{L}/G$, а также формулы (6.3.18) и (6.3.12), получим

$$p = G_k \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_k A_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \text{dn}(\tau'; k), \quad q = \pm G_k \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_2(A_1 - A_2)}} \text{sn}(\tau'; k),$$

$$r = \mp G_k \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn}(\tau'; k). \quad (6.3.27)$$

Перейдем с сферическим углом θ и φ , характеризующим проекции вектора кинетического момента \mathbf{L} на оси системы координат, связанных с телом. Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz равны

$$p = \frac{G_k}{A_1} \sin \theta \sin \varphi, \quad q = \frac{G_k}{A_2} \sin \theta \cos \varphi, \quad r = \frac{G_k}{A_3} \cos \theta. \quad (6.3.28)$$

Тогда подставляя (6.3.28) в (6.3.27) получим

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \varphi &= \sqrt{\frac{A_1(G_k^2 - 2H_k A_3)}{(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn}(\tau'; k), \\ \sin \theta \cos \varphi &= \pm \sqrt{\frac{A_2(2H_k A_1 - G_k^2)}{(A_1 - A_2)}} \operatorname{sn}(\tau'; k), \\ \cos \theta &= \mp \sqrt{\frac{A_3(2H_k A_1 - G_k^2)}{(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn}(\tau'; k). \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

Теперь проанализируем вариант $2H_k A_2 > G_k^2 \geq 2H_k A_3$. В этом случае величина k_z во все время движения отлична от нуля. Сделаем замены переменных:

$$k_y = \pm \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_k A_3}{A_2(A_2 - A_3)}} \sin \zeta, \quad \tau' = \sqrt{\frac{(A_2 - A_3)(2H_k A_1 - G_k^2)}{A_1 A_2 A_3}} t.$$

Если ввести параметр $0 \leq k^2 < 1$ по формуле

$$k^2 = \frac{(A_1 - A_2)(G_k^2 - 2H_k A_3)}{(A_2 - A_3)(2H_k A_1 - G_k^2)},$$

то уравнение (6.3.24) примет вид

$$\frac{d\zeta}{d\tau'} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}.$$

Допустим, что при $t=0$ компонента $k_y=0$. Тогда решение (6.3.19) будет иметь вид

$$k_x = \mp \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_k A_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn}(\tau'; k), \quad k_y = \pm \sqrt{\frac{G_k^2 - 2H_k A_3}{A_2(A_2 - A_3)}} \operatorname{sn}(\tau'; k),$$

$$k_z = \sqrt{\frac{2H_k A_1 - G_k^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn}(\tau'; k). \quad (6.3.30)$$

Учитывая, что $\mathbf{l} = \mathbf{L}/G$, формулы (6.3.17), (6.3.12) и (6.3.27) получим

$$\sin \theta \sin \varphi = \mp \sqrt{\frac{A_1(G_k^2 - 2H_k A_3)}{(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn}(\tau'; k),$$

$$\sin \theta \cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{A_2(G_k^2 - 2H_k A_3)}{(A_2 - A_3)}} \operatorname{sn}(\tau'; k),$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{A_3(2H_k A_1 - G_k^2)}{(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn}(\tau'; k). \quad (6.3.31)$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Заметим, что в двух рассмотренных случаях величины k_x , k_y , k_z – периодические функции времени, поэтому полодии представляют собой замкнутые кривые.

Таким образом, исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде. Определены управление и время быстродействия (функция Беллмана). Управляемое движение представляет собой движение типа Эйлера-Пуансо с изменяющейся по времени согласно формулам (6.3.4), (6.3.5) величиной кинетического момента тела G_k . Отметим, что изложенный выше подход был развит в [223] на основе теории [162, 213, 322], разработанной для управляемых систем с инвариантной нормой.

§4. Оптимальное торможение вращений несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде.

1. Постановка задачи. Рассматривается динамически несимметричное твердое тело, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$. На основе подхода [223] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с твердым телом

системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [70, 74, 135, 223]

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^r + \mathbf{M}^c. \quad (6.4.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор абсолютной угловой скорости; $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела, \mathbf{M}^u – вектор управляющего момента сил; \mathbf{M}^r – момент сил диссипации; \mathbf{M}^c – момент сил вязкой жидкости в полости тела.

Кинетический момент тела определяется стандартным образом

$$\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3), \quad G_1 = A_1 p, \quad G_2 = A_2 q, \quad G_3 = A_3 r,$$

где $G = |\mathbf{G}| = (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)^{1/2}$ его величина.

Для упрощения задачи в систему (6.4.1) далее вносятся структурные ограничения, в частности, предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил \mathbf{M}^u принадлежит шару [223]. Это допущение не противоречит распределению масс и форме твердого тела и часто применяется в исследованиях задач управления ориентацией.

Считается также, что диагональный тензор момента сил внешнего сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\lambda J\boldsymbol{\omega}. \quad (6.4.2)$$

Здесь λ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом, проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами $\lambda A_1 p$, $\lambda A_2 q$, $\lambda A_3 r$ [70, 74]. Такое предположение не является противоречивым.

Далее предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\mathcal{G} \gg 1$ ($\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$). Форма полости считается близкой к сферической, тогда, следуя [135], для тензора вязких сил $\tilde{\mathbf{P}}$ имеем выражение

$$\tilde{\mathbf{P}} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{525\mathcal{G}}. \quad (6.4.3)$$

Здесь ρ , \mathcal{G} – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, a – радиус полости.

Тензор $\tilde{\mathbf{P}}$, зависящий только от формы полости, характеризует внутренний диссипативный момент сил в квазистатическом приближении,

обусловленный вязкой жидкостью в полости. Для простоты в уравнениях (6.4.1) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$. Компоненты этого тензора имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символы Кронекера (такой вид тензор $\tilde{\mathbf{P}}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил \mathbf{M}^u ограничены сферой

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (6.4.4)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t , \mathbf{G} согласно условиям (6.4.4). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для \mathbf{G} , $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$. Далее полагаем, что $b = b(t, \mathbf{G})$ (либо $b = b(t)$ или $b = \text{const}$).

На основе динамического программирования и неравенства Шварца при упрощающем условии на коэффициент b синтез оптимального по быстройдействию управления имеет вид [223]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_2 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, \mathbf{G}). \quad (6.4.5)$$

Момент сил вязкой жидкости в полости \mathbf{M}^c с учетом внешних силовых факторов согласно [135] определяется следующим образом

$$\mathbf{M}^c = \frac{P\rho}{\nu} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \quad (6.4.6)$$

$$\begin{aligned} m_1 = & p \left(\lambda^2 + \frac{b^2}{G^2} \right) + \frac{2\lambda b}{G} p + \\ & + \frac{1}{A_1} \left(\lambda + \frac{b}{G} \right) \left(3qr(A_3 - A_2) + \frac{G\alpha_{33}}{1 - \alpha_{33}^2} q(\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2) - Gr\alpha_{32} \right) + \\ & + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right]. \end{aligned}$$

Выражения для m_2 , m_3 получаются из m_1 в (6.4.6) циклической перестановкой величин A_1 , A_2 , A_3 и p , q , r . При этом, коэффициенты

$\lambda^2 + \frac{b^2}{G^2}$, $\lambda + \frac{b}{G}$, $\frac{2\lambda b}{G}$ в $m_i (i=1,2,3)$ остаются неизменными, а слагаемые, содержащие α_{31} , α_{32} , $\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2$ имеют похожий вид. Направляющие косинусы α_{ij} выражаются через углы Эйлера φ , ψ , θ по известным формулам [25].

Без учета влияния \mathbf{M}^u и \mathbf{M}^r на \mathbf{M}^c с точностью до величины первого порядка малости ε момент сил вязкой жидкости в полости имеет вид

$$\mathbf{M}^c = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \times \quad (6.4.7)$$

$$\times \begin{pmatrix} p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \\ q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) \right] \\ r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_2 - A_3)(A_1 - A_2 - A_3) \right] \end{pmatrix}$$

Ограничимся указанным выражением в первом приближении. Упрощенные на основе выражения (6.4.7) уравнения управляемого движения (6.4.1) в проекциях на главные центральные оси инерции имеет вид

$$A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr = -b \frac{A_1 p}{G} - \lambda A_1 p +$$

$$+ \frac{P}{A_1 A_2 A_3} p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right],$$

$$A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr = -b \frac{A_2 q}{G} - \lambda A_2 q + (6.4.8)$$

$$+ \frac{P}{A_1 A_2 A_3} q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_2 - A_1)(A_1 - A_3 + A_2) \right],$$

$$A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq = -b \frac{A_3 r}{G} - \lambda A_3 r +$$

$$+ \frac{P}{A_1 A_2 A_3} r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) \right].$$

Кинематические соотношения не выписываем, так как уравнения (6.4.8) образуют замкнутую систему. Уравнения (6.4.8) подвергаются дальнейшему анализу.

Ставится задача оптимального по быстрдействию торможения вращений

$$\omega(t_0) = \omega^0, \quad \omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (6.4.9)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрдействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана $W = T(t, \omega)$. Напомним, что в выражении b в (6.4.4) полагается далее $b = b(t, G)$ (либо $b = b(t)$ или $b = \text{const}$).

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости, являются внутренним, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним. Домножим первое уравнение (6.4.8) на G_1 , второе – на G_2 , третье – на G_3 и сложим (скалярное умножение $\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}$). Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию,

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \\ W(t, G) &= T(t, G). \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Напомним, что $\mathbf{G} = J\omega$.

В общем случае для произвольной функции $b = b(t, G)$ в (6.4.10) аналитическое интегрирование задачи Коши затруднительно: возможно ее численное решение. Из уравнений (6.4.10) следует, что эволюция величины кинетического момента G происходит под влиянием управляющего момента и сопротивления среды. Внутренний момент сил вязкой жидкости в полости влияния не оказывает.

В предположении $b = b(t)$, т.е. функция $b(t)$ не зависит от модуля \mathbf{G} , приходим к решению краевой задачи (6.4.9)

$$G(t) = G^0 \exp(-\lambda(t-t_0)) - \int_{t_0}^t b(\tau) \exp(-\lambda(t-\tau)) d\tau, \quad (6.4.11)$$

$$\text{где } G^0 = \exp(-\lambda t_0) \int_{t_0}^T b(\tau) \exp(\lambda \tau) d\tau.$$

Решение всегда существует, что приводит к построению решения задачи оптимального быстрдействия в форме синтеза. Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстрдействия.

При $b = \text{const}$ и $t_0 = 0$ решения уравнения (6.4.10) и краевой задачи (6.4.11) записываются следующим образом:

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1). \quad (6.4.12)$$

Далее детально анализируется случай (6.4.12). Домножим первое уравнение (6.4.8) на p , второе – на q , третье – на r и сложим. В результате имеем выражение для производной от кинетической энергии H

$$\dot{H} = -\frac{2bH}{G^2} - 2\lambda H + \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left[p^2 q^2 (A_1 - A_2)^2 (A_3 - A_1 - A_2) + \right. \\ \left. + p^2 r^2 (A_1 - A_3)^2 (A_2 - A_1 - A_3) + q^2 r^2 (A_2 - A_3)^2 (A_1 - A_2 - A_3) \right]. \quad (6.4.13)$$

Рассмотрим невозмущенное движение ($b = \lambda = \varepsilon = 0$). Напомним, что в полости находится жидкость большой вязкости и $\mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$, где \mathcal{G} – кинематический коэффициент вязкости. При отсутствии возмущений вращение твердого тела является движением Эйлера-Пуансо. Переменные G , H становятся постоянными, а φ , ψ , θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G , H , а быстрыми – углы Эйлера φ , ψ , θ .

Рассмотрим движение при условии $2HA_1 \geq G^2 > 2HA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции Oz_1 . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2HA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2HA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (6.4.14)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение, однозначно связанный с величиной кинетического момента G и кинетической энергией H .

Для построения усредненной системы первого приближения представим функции p , q , r из невозмущенного движения Эйлера-Пуансо [305] в правую часть уравнения (6.4.14) и проведем усреднение по периоду движения Эйлера-Пуансо. При этом для медленных переменных G , H сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{2bH}{G} - 2\lambda H - \frac{4PH^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \quad (6.4.15)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[k^2 V(k) - U(k) \right] + \right. \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[(k^2 - 2)U(k) + k^2 \right] + \\ & \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[(1 - 2k^2)U(k) + k^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{где } U(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, S^2(k) = \left[A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2 \right]^2, V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [308]. Из уравнения (6.4.15) следует, что под влиянием сопротивления среды и момента сил вязкой жидкости в полости тела, а также управляющего момента происходит эволюция кинетической энергии тела H . Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части уравнения (6.4.15) положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [308]. Поэтому $dH / dt < 0$ поскольку $H > 0$, т.е. переменная H строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Заметим, что уравнение (6.4.15) при $G \rightarrow 0$ обладает существенной особенностью.

Дифференцируя выражение для k^2 (6.4.14) с учетом (6.4.15), получим дифференциальное уравнение следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{dt} = & \frac{PG^2(A_1 - A_3) \left[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3 \right]}{3A_1^2A_2^2A_3^2} \times \\ & \times \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

$$\text{где } \chi = \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}.$$

Уравнения (6.4.15), (6.4.16) получены в предположении, что $b, \lambda, \mathcal{G}^{-1} \sim \varepsilon \ll 1$ методом усреднения. Это соответствует тому, что кинетическая энергия вращения тела много больше величины управляющего вектора, сопротивление среды предполагается слабым порядка малости ε , полость заполнена жидкостью большой вязкости.

Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2HA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (6.4.16) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере

радиуса G . Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости в полости и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния момента сил вязкой жидкости в полости, а также управляющего момента и момента сопротивления. Анализ уравнения (6.4.16) свидетельствует об отсутствии стационарных значений k , кроме $k = 0$ и $k = 1$.

3. Численный расчет. Проведем обезразмеривание уравнений (6.4.15), (6.4.16) и дифференциального уравнения изменения кинетического момента при $b = \text{const}$. В качестве характерных параметров задачи возьмем значение кинетического момента в начальный момент времени $G_0 = G(t_0)$ и время быстрогодействия T (6.4.12)

$$\tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}.$$

Значение безразмерной кинетической энергии вводится следующим образом [135]

$$\tilde{H} = \frac{2HA_1}{G_0^2}.$$

Получим безразмерную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\left(\frac{b}{G_0} + \lambda\tilde{G}\right)T, \\ \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \frac{PT\tilde{G}^2G_0^2(A_1 - A_3)\left[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3\right]}{3A_1^3A_2^2A_3^2} \times \\ &\times \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \\ \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} &= -T \left(\frac{2b\tilde{H}}{\tilde{G}G_0} + 2\lambda\tilde{H} + \frac{4PG_0^2\tilde{H}^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^3A_2^2A_3^2S^2(k)} \times \right. \\ &\times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)\left[k^2V(k) - U(k)\right] + \right. \\ &+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)\left[(k^2 - 2)U(k) + k^2\right] + \\ &\left. \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)U(k) + k^2\right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Выше проведено усреднение, так как из выражений (6.4.13), (6.4.14) следует, что H и k^2 являются медленными переменными.

Проведем численное интегрирование на промежутке времени $[0, 1]$, который соответствует полному торможению тела. Расчет соответствует начальным значениям функций $\tilde{G}(0) = G_0 = 1$, $\tilde{H}(0) = 1$ и $k^2(0) \approx 1$. Для моментов инерции задаются значения [135]: $A_1 = 8$, $A_2 = 6$, $A_3 = 4$. Интегрирование проводится при различных значениях λ , b , P , что позволяет провести исследование влияния различных силовых факторов на характер торможения твердого тела. Для каждого расчетного случая первоначально определялось время быстрого действия, затем в соответствующем временном диапазоне проводился расчет характеристик движения твердого тела.

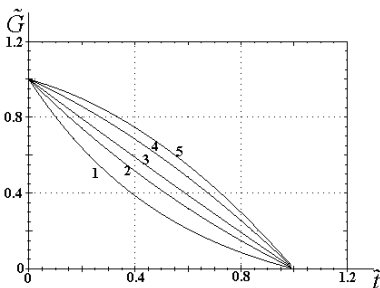


Рис. 78

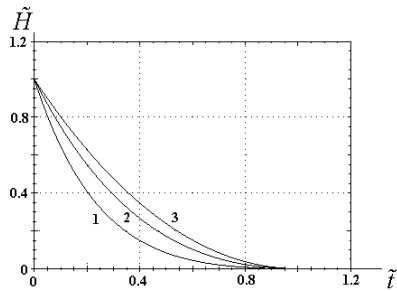


Рис. 79

На рис. 78, 79 представлен численный анализ при $P = 10^{-1}$, $b = 10^{-1}$ и $\lambda = 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}$ (кривые 1 – 3). Видно, что при уменьшении момента сил сопротивления среды, торможение твердого тела происходит с меньшим градиентом, а изменение модуля кинетического момента имеет почти прямолинейный характер (кривая 3 рис. 78).

На рис. 80, 81 представлены результаты расчета при $P = 10^{-1}$, $\lambda = 10^{-1}$ и $b = 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-1}$ (кривые 1 – 3). Видно, что при увеличении момента управляющих сил (кривая 3 рис. 81), торможение твердого тела происходит быстрее, а изменение модуля кинетического момента носит почти прямолинейный характер при большем значении b (кривая 3 рис. 80).

Изменение величины P от 1 до 10^{-2} не приводит к изменению характера функций $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{t})$ и $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{t})$, так как момент сил вязкой жид-

кости в полости не входит в первое уравнение системы (6.4.17), а его влияние на изменение кинетической энергии мало по сравнению с воздействием момента сил сопротивления и управляющего момента.

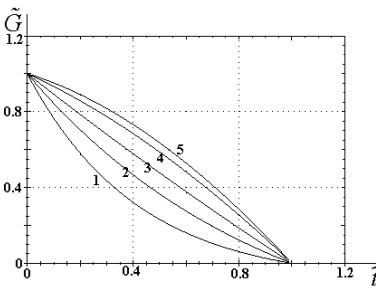


Рис. 80

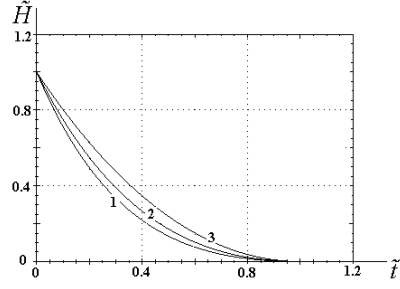


Рис. 81

Следует отметить, что согласно численному расчету для указанных значений величин λ , b , P значение модуля эллиптических функций k^2 убывает незначительно от величины порядка 1 до 0.9996.

4. Исследование торможения твердого тела при $k^2 \rightarrow 1$. Рассмотрим (6.4.16) при $k^2 \rightarrow 1$, что соответствует траекториям вектора кинетического момента вблизи сепаратрисы. Согласно [308] эллиптические интегралы можно разложить в ряды с учетом малых второго порядка величины k' – дополнительного модуля эллиптических функций, где

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \text{ т.е. } k' \ll 1. \quad (6.4.18)$$

С учетом членов первого и второго порядков малости величины k' можно найти асимптотику решения дифференциального уравнения (6.4.16)

$$t = \frac{(1 - k^2)}{2cG^2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} + \frac{1}{2} \right), \quad (6.4.19)$$

где $c = \frac{P(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}{3A_1^2A_2^2A_3^2}$.

При $b = \text{const}$

$$t = \frac{(1 - k^2)}{c[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]^2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.4.20)$$

Уравнение (6.4.20) задает в неявном виде зависимость $k^2 = k^2(t)$.

Согласно численному расчету модуль эллиптических функций $k^2 \rightarrow 1$ меняется также от величины порядка 1 до 0.9996, как в п.3.

В случае $k^2 \rightarrow 1$ уравнение (6.4.15) с учетом малых первого порядка малости величины k' принимает вид

$$\frac{dH}{dt} = -2\left(\frac{b}{G} + \lambda\right)H + \frac{2\alpha H^2(1-k^2)(A_2^2 - A_1A_2 - 2A_1A_3 - A_2A_3)}{(A_1 - A_3)(4cG^2t - 1 + k^2)}, \quad (6.4.21)$$

где $\alpha = \frac{4P(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2A_2^2A_3^2}$.

Обезразмерив уравнение (6.4.21) аналогично п.3, получим

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} = -2\left(\frac{bG_0}{\tilde{G}} + \lambda\right)\tilde{H}\tilde{T} + \frac{\alpha\tilde{H}^2G_0^2(1-k^2)(A_2^2 - A_1A_2 - 2A_1A_3 - A_2A_3)}{A_1(A_1 - A_3)(4c\tilde{G}^2G_0^2\tilde{T} - 1 + k^2)}. \quad (6.4.22)$$

Уравнение (6.4.22) численно проинтегрировано с учетом первых двух уравнений системы (6.4.17) при значении величин λ , b , P равном 0.1 и начальных значениях функций $\tilde{G}(0) = G_0 = 1$, $\tilde{H}(0) = 1$ и $k^2(0) \approx 1$. Для моментов инерции задаются значения [135]: $A_1 = 8$, $A_2 = 6$, $A_3 = 4$. Численное интегрирование проводилось на промежутке времени $[0, 1]$. Результаты численного анализа приведены на рис. 82 (кривая 1); видно, что характер функции кинетической энергии имеет такой же вид, как и в случае расчета в п.3.

5. Решение задачи оптимального торможения в предположении $b = b_0 + \beta t$. Время торможения твердого тела может быть определено согласно (6.4.10) и зависит от значений коэффициентов β , b_0 и λ , характеризующих управляющий момент и момент сил сопротивления соответственно.

Проведенное численное интегрирование показало характер зависимости времени торможения от этих параметров и результат представленна рис 83. Кривая 1 – зависимость времени торможения от параметра β , кривая 2 – от параметра b_0 , 3 – от параметра λ . Расчет времениторможениядля каждой кривой проводился в диапазонеот 0.01 до 0.5 для соответствующей

величины, при этом значения остальных параметров были равны 0.1. Видно, что для всех кривых время торможения минимальное для наибольших значений параметров из допустимого диапазона. Кривые 2 и 3 имеют линейный характер, а кривая 1 – экспоненциальный. Наименьшее время торможения твердого тела получено для параметра b_0 , который характеризует значение управляющего момента в начальный момент времени.

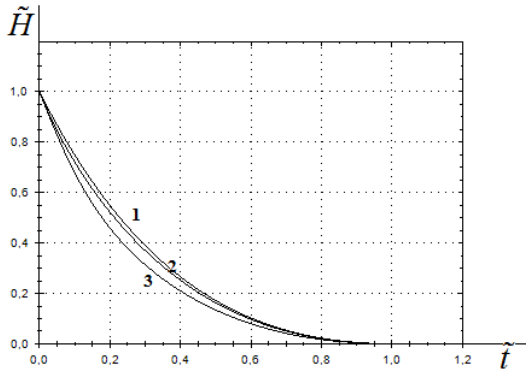


Рис. 82

Система уравнений движения (6.4.17) была численно проинтегрирована для различных значений параметров P , λ , b_0 и β с учетом закономерности $b = b_0 + \beta t$.

Рис. 80 (кривые 4, 5) соответствует численному расчету для постоянных параметров момента сил сопротивления и момента сил вязкой жидкости в полости $P = 0.1$, $\lambda = 0.1$, при различных значениях параметров управляющего момента. Кривая 4: $b_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$. Кривая 5: $b_0 = 0.01$, $\beta = 0.1$. Характер поведения функции $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{t})$ при данном законе изменения управляющего момента существенно отличается от характера поведения функции кинетического момента при $b = \text{const}$. Проводилось численное интегрирование для постоянных параметров управляющего момента для закона $b = b_0 + \beta t$ при различных значениях параметра момента сил сопротивления. Для $P = 0.1$, $\beta = 0.1$ и $b_0 = 0.1$ результаты численного расчета представлены на рис. 1, где кривая 4: $\lambda = 0.1$, кривая 5: $\lambda = 0.01$. Видно, что тело тормозится быстрее для больших значений коэффициента момента сил сопротивления среды. Характер убывания функции кинетического момента отличается от вида функции, представленного на рис. 80. Согласно численному анализу можно сделать

вывод о том, что торможение тела при $b = \text{const}$ происходит быстрее в первой половине безразмерного времени \tilde{t} , а при $b = b_0 + \beta t$ – во второй.

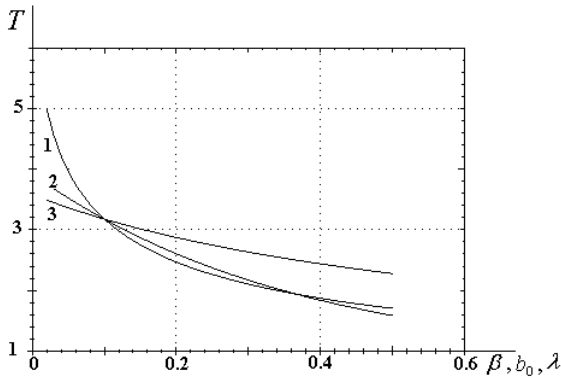


Рис. 83

На рис. 84 представлены результаты численного расчета кинетической энергии твердого тела при $b = b_0 + \beta t$. Приняты следующие значения параметров возмущающих моментов $P = 0.1$, $\lambda = 0.1$. Параметры управляющего момента имеют значения: кривая 1 – $b_0 = 0.01$, $\beta = 0.01$, кривая 2 – $b_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$, кривая 3 – $b_0 = 0.01$, $\beta = 0.1$. Характер поведения функции кинетической энергии не отличается от представленной на рис. 79. При этом функция $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{t})$ при $b = b_0 + \beta t$ убывает с меньшими градиентами.

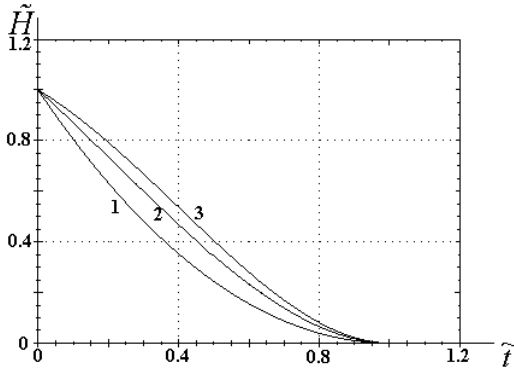


Рис. 84

6. Численное исследование торможения твердого тела при различных начальных значениях k^2 . Исследование задачи оптимального управления несимметричного твердого тела в п. 3, 5 проводилось для начального значения модуля эллиптических функций $k^2(0) \approx 1$. Проанализируем характер поведения функций кинетического момента и кинетической энергии при различных начальных значениях k^2 для твердых тел с различной геометрией масс.

Рассмотрим твердое тело с моментами инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 6$, $A_3 = 4$, задаем значения для коэффициентов возмущающих моментов $P = 10^{-1}$, $b = 10^{-1}$, $\lambda = 10^{-1}$. При различных начальных значениях модуля эллиптических функций: $k^2 = 0.1, 0.5, \approx 1$ получены графики изменения кинетической энергии твердого тела, которые имеют вид кривой 1 рис. 82. Кривые полностью совпадают, отличие между значениями функций $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{t})$ имеется только в пятом знаке.

Рассмотрим твердое тело с моментами инерции $A_1 = 0.74$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.26$ при тех же значениях коэффициентов возмущающих моментов для различных начальных значений модуля эллиптических функций: $k^2 = 0.1, 0.5, \approx 1$. Результаты представлены на рис. 82 (кривые 2, 3). Видно, что кривые существенно отличаются в середине процесса, а затем сходятся к одному значению при завершении торможения тела. Кривые 2, 3 соответствуют начальным значениям модуля эллиптических функций $k^2 = 0.9999, 0.1$.

7. Исследование движения твердого тела при $k^2 \ll 1$. Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси Oz_1 . В этом случае правую часть второго уравнения системы (6.4.16) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [308].

$$\frac{dk^2}{d\tilde{t}} = - \frac{TP\tilde{G}_0^2 (A_1 - A_3)(3 + \chi) [A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}{6A_1^2A_2^2A_3^2} k^2 \tilde{G}^2. \quad (6.4.23)$$

Величина χ определяется согласно (6.4.16). В предположении $b = \text{const}$ закон изменения кинетического момента в безразмерном виде имеет вид

$$\tilde{G}(\tilde{t}) = \left(\tilde{G}_0 + \frac{b}{\tilde{G}_0 \lambda} \right) \exp(-\lambda T t) - \frac{b}{\tilde{G}_0 \lambda}. \quad (6.4.24)$$

Подставляя (6.4.24) в (6.4.23), получаем дифференциальное уравнение, которое имеет аналитическое решение

$$k^2 = k_0^2 \exp \left(\frac{TPG_0^2 (A_1 - A_3)(3 + \chi) [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}{6A_1^2 A_2^2 A_3^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(G_0^2 \lambda + b)^2}{2T \lambda^3 G_0^2} (\exp(-2T \lambda \tilde{t}) - 1) + \frac{2(G_0^2 \lambda + b)b}{T \lambda^3 G_0^2} (1 - \exp(-T \lambda \tilde{t})) - \frac{b^2 \tilde{t}}{G_0^2 \lambda^2} \right] \right). \quad (6.4.25)$$

Функция (6.4.25) является убывающей, как и в случае произвольных значений модуля эллиптических функций k^2 , при этом наблюдается незначительное убывание на величину порядка 10^{-3} .

Таким образом, аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически несимметричного квазитвердого тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрого действия (функция Беллмана), эволюции квадрата модуля эллиптических функций k^2 , безразмерных кинетической энергии и кинетического момента. Установлены качественные свойства оптимального движения.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие моменты являются внешними в задаче об активном торможении вращений симметричного гиростата с подвижной массой в вязкой среде?
2. Мономом какой степени является возмущающий момент сил, обусловленный упругостью демпфера в квазистатическом приближении?
3. Численно исследуйте характер поведения модуля вектора кинетического момента при различных выражениях функции $b = b(t)$ (6.1.19).
4. Какой вид имеет функция кинетического момента в задаче об оптимальной стабилизации вращений симметричного гиростата с внутренними степенями свободы в среде с сопротивлением при постоянном коэффициенте управляющего момента?
5. Постройте графики изменения функции $K = K(t)$ (соотношение (6.2.10), учитывая дифференциальное уравнение (6.2.8)) с помощью библиотеки ZedGraph.dll, проведите анализ полученных результатов.
6. Численно исследуйте характер поведения функции кинетического момента (6.3.7).
7. Какие величины являются медленными в задаче об оптимальном торможении вращений несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде?
8. Что является характерным масштабом времени в задачах оптимального торможения? Почему?
9. При каких значениях k^2 осуществляется вращательное движение твердого тела с траекториями вектора кинетического момента вблизи сепаратрисы?
10. Численно постройте кривые зависимости модуля эллиптических функций от времени согласно формуле (6.4.25).

Литература

1. Харламов П.В. Новые методы исследования задач динамики твердого тела//Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. – М.: Наука, 1975. – С. 317-325.
2. Харламов П.В. О значении геометрических методов в задачах динамики твердого тела//Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. – М.: Наука, 1981. – С. 265-274.
3. Демин В.Г., Степанова Л.А. О построении и исследовании точных решений уравнений динамики твердого тела//Прикл. механика. – 1976. – Т.12, № 9. – С. 3-17.
4. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наукова думка, 1978. – 294 с.
5. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегро-дифференциальное уравнение в динамике твердого тела. – Киев: Наукова думка, 1986. – 293 с.
6. Докшевич А.И. Решение в конечном виде уравнений Эйлера – Пуансона. – Киев: Наукова думка. – 1992. – 168 с.
7. Лесина М.Е., Кудряшова Л.В. Новые постановки и решения задач динамики системы тел. – Донецк: ДонГТУ, 1999. – 268 с.
8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
9. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977. – 328 с.
10. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 232 с.
11. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. – Фрунзе: Илим, 1989. – 182 с.
12. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т.3. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. – 304с.
13. Нелинейный анализ поведения механических систем/Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко – Киев: Наукова думка, 1984. – 285 с.

14. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
15. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
16. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
17. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
18. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1971. – 440 с.
19. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
20. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М. Наука, 1988. – 328 с.
21. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
22. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
23. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
24. Белецкий В.В. Эволюция вращения динамически симметричного спутника//Космич. исслед. – 1963. – Т.1, №3. – С. 339-385.
25. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
26. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов//Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27. – Вып.3. – С. 474-483.
27. Белецкий В.В. Динамика быстрых вращений//Тр. ин-та/Ин-т механики Моск. ун-та. – 1973. – №29. – С. 97 – 118.
28. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
29. Holland R.L., Sperling H.J. A first order theory for the rotational motion of a triaxial rigid body orbiting and oblate primary// The Astronomical Journal. – 1969. – V. 74, №3. – P. 490-496.
30. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. – Киев: Наукова думка, 1984. – 188 с.

31. Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. Нижний Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 1995. – 430 с.
32. Белецкий В.В. Регулярные и хаотические движения твердых тел. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 132 с.
33. Нам Тум По. Влияние аэродинамического торможения на движение сферического спутника относительно центра масс// Бюлл. ИТА. – 1965. Т.10, № 5 (118). – С. 84-91.
34. Федорова Л.И. Влияние диссипативного момента сил аэродинамического трения на ротационное движение несимметричного искусственного спутника Земли // Проблемы механики управляемого движения. – Пермь. – 1975. – Вып. 7. – С. 119-121.
35. Белецкий В.В., Грушевский А.В. Эволюция вращательных движений спутника под действием диссипативного аэродинамического момента // Прикл. математика и механика. – 1994. – Т.58. – Вып.1. – С. 13-20.
36. Морозов В.М. Устойчивость движения космических аппаратов. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, 1969. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. – С. 5-83.
37. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1978. – Т. 23. – 223 с.
38. Shrivastava S.K., Modi V.J. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques – a brief survey//J. Guid., Contr. and Dyn. – 1983. – V. 6, №6. – P. 461-471.
39. Торжевский А.П. Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме//Космич. исслед. – 1968. – Т.6. – Вып.1. – С. 58-70.
40. Hitzl D.L., Breakwell J.V. Resonant and non-resonant gravity-gradient perturbations of a tumbling triaxial satellite//Celest. Mech. – 1971. – V. 3, №3. – P. 346-383.
41. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников // Искусственные спутники Земли. – М.: АН СССР. – 1963. – Вып. 16. – С. 5-9.
42. Сарычев В.А. Исследование динамики системы гравитационной стабилизации // Искусственные спутники Земли. – М.: АН СССР. – 1963. – Вып.16. – С. 10–33.

43. Гродзовский Г.Л., Охоцимский Д.Е., Белецкий В.В., Иванов Ю.Н., Курьянов А.И., Платонов А.К., Сарычев В.А., Токарев В.В., Ярошевский В.А. Механика космического полета //Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука. – 1968. – Т.1. – С. 265-319.
44. Сарычев В.А. Д.Е. Охоцимский и его роль в создании систем пассивной ориентации спутников//Прикладная небесная механика и управление движением. К 90 – летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского/Составители: Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – С. 223-271.
45. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
46. Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г., Павлов Ю.Н., Толстоусов Г.Н. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. – М.: Наука, 1976. – 304 с.
47. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 396 с.
48. Rauschenbakh B.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna-Lawlor S. Essential Space-flight Dynamics and Magnetospherics. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 397 p.
49. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. – 141 с.
50. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. – Т. 23. – 104 с.
51. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Аким Э.Л., Сарычев В.А. Прикладная небесная механика и управление движением// Прикладная небесная механика и управление движением. К 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского/Составители: Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – С. 328-367.
52. Пупышев Ю.А. О влиянии гравитационных и аэродинамических моментов на вращательное движение около центра масс несимметричного твердого тела//Вестник Ленингр. ун-та. – 1971. – №7. – Матем., мех., астрон. – Вып.2. – С. 129-134.
53. Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэ-

- родинамического моментов//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – №2. – С.3-12.
54. Сазонов Вас.В., Сазонов В.В. Использование уточненной модели аэродинамического момента в задаче реконструкции вращательного движения спутников Фотон//Космич.исслед. – 2011. – Т.45, №2. – С. 117-127.
55. Маслова А.И., Пироженко А.В. К моделированию аэродинамического момента, действующего на спутник//Космич. исслед. – 2010. – Т.48, № 4. – С. 371-379.
56. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
57. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
58. Климов Д.М., Космодемьянская Г.Н., Черноусько Ф.Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – №2. – С. 3-8.
59. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
60. Денисов Г.Г., Урман Ю.М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – №6. – С. 5-14.
61. Урман Ю.М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах динамики твердого тела//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2007. – №6. – С. 52–68.
62. Урман Ю.М. Теория симметрии в классических системах: Учебное пособие. – Н.Новгород: НГПУ, 2009. – 107 с.
63. Денисов Г.Г., Комаров В.Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – №3. – С. 15-23.
64. Padova E. Sul moto di rotazione di un corpo rigido//Atti Accad. di Torino. – 1885 – 1886. – V. XXI. – P. 38-47.
65. Greenhill A.G. On the motion of a top and allied problems in dynamics//Quart.J. – 1877. – V. XI. – P. 176-194.
66. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. – New York: e.a. Johnson reprint corp. – 1965. – 966 s.
67. Крылов А.Н., Крутков Ю.А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – 356 с.

68. Светлов А.В. О вращении гироскопа в сопротивляющейся среде//Прикл. математика и механика. – 1938. – Т. 1. – Вып. 3. – С. 371-376.
69. Кошляков В.Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде//Прикл. математика и механика. – 1953. – Т. 17. – Вып. 2. – С. 137-148.
70. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
71. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 401 с.
72. Leimanis E. The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. В. – Heidelberg – N. Y.: Springer, 1965. – 337 p.
73. Gray A. A treatise on gyrostatics and rotational motion. Theory and applications. – N.Y.: Dover, 1959. – 530 p.
74. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. II. – М.: Наука, 1983. – 544 с.
75. Аппель П. Теоретическая механика. Т. II. – М.: Физматгиз, 1960. – 487 с.
76. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела – М.-Л.: Изд-во ин. литер., 1951. – 468 с.
77. Граммель Р. Гироскоп. Его теория и применения. Т. I. М.: Изд-во ин. литер., 1952. – 351 с.
78. Нейштадт А.И., Пивоваров М.Л. Об эволюции вращения ИСЗ под действием возмущающего момента, постоянного в связанных осях//Обработка информации, получаемой по программе «Интеркосмос». – М.: Наука, 1982. – С. 134-138.
79. Пивоваров М.Л. К вопросу об эволюции вращения ИСЗ под влиянием постоянного в связанных осях возмущающего момента//Навигационная привязка и статистическая обработка информации. – М.: Наука, 1983. – С. 22-27.
80. Нейштадт А.И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №6. – С. 30-36.
81. Пивоваров М.Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 23-27.

82. Grammel R. Der selbterregte unsymmetrische Kreisel//Ing. – Arch. – 1954. – В. 22, Н.2. – С. 73-97.
83. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
84. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
85. Белецкий В.В. Асимптотические методы в динамике твердого тела//Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наукова думка, 1977. – С. 42-46.
86. Van der Ha J.C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques//Acta. Astronaut. – 1985. – V.12, №10. – P. 861-869.
87. Kane J.R., and Levinson D. A. Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body//J. Astronaut. Sci. – 1987. – V. 35, № 4. – P. 435-446.
88. Tsiotras P., and Longuski J.M. Analytical solution of Euler's equations of motion for an asymmetric rigid body//Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – Vol. 63, № 1. – P. 149-155.
89. Ayobi M.A., and Longuski J.M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments//Trans. ASME. J.Appl.Mech. – 2008. – Vol. 75, №1. – P.011004/1-011004/8.
90. Медведев А.В. Движение быстро закрученного гироскопа под действием постоянного момента в сопротивляющейся среде//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №2. – С. 21-24.
91. Куряков В.А. Быстрое движение вокруг центра масс твердого тела с квадратичным законом сопротивления//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 2. – С. 25-31.
92. Кудин С.Ф., Мартыненко Ю. Г. Раскрутка неконтактного гироскопа в сопротивляющейся среде//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 14-22.
93. Денисов Г.Г. О вращении твердого тела в сопротивляющейся среде//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №4. – С. 37-43.
94. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 86 с.

95. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
96. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во «Экзамен», 2007. – 349 с.
97. Kane T.R. Motion of a symmetric gyrostat in a viscous medium// AIAA Journal. – 1970. – V.8, № 10. – P. 1786-1789.
98. Пузырев В.Е., Суйков А.С. О движении твердого тела вокруг центра масс при частичной диссипации энергии//Механика твердого тела. – 2009. – Вып.39. – С. 157-166.
99. Леонов Г.А., Морозов А.В. О глобальной устойчивости стационарных вращений твердого тела//Прикл. математика и механика. –1992. –Т. 56. –Вып.6. –С. 993-997.
100. McGill D.J., and Long L.S. III The effect of viscous damping on spin stability of a rigid body with a fixed point//Trans. ASME. – 1977. – V. 44, №2. – P.349-352.
101. Кривцов А.М. Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазиординат// Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – №4. – С. 23-29.
102. Иванова Е.А. Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2001. – №6. – С. 15-30.
103. Тронин К.Г. Численное исследование вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Нелинейная динамика. – 2005. – Т.1, №2. –С. 209–213.
104. Ge Z.M., and Wu M.H. The stability of motion of rigid body about a fixed point in the case of Euler with various damping torques// Trans. Can. Soc. Mech. Eng. – 1988. – V. 12, №3. –P. 165-171.
105. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твердого тела в потоке частиц//Прикл. математика и механика. 1993. – Т.57. – Вып. 2. – С. 77-81.
106. Марченко В.П., Поджио В.М. О движении тела переменной массы в сопротивляющейся среде//Прикл. механика. – 1966. – Т.2, №6. – С. 92-98.
107. Тюреходжаев А.Н., Берсугер М.А. Решение задачи о движении гироскопа с переменными моментами инерции в среде с сопротивлением//Известия Кыргыз. гос. техн. ун-та. – 2006. –№9. Ч.2.–С. 244-248.

108. Liu Yanzhu. The quasi-Euler-Poinsot motion of rigid body//Acta Mechanica Solida Sinica. – 1988. – №4. – P. 294–302.
109. Iñarraea M., and Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit//Int. J. Non-Linear Mech. – 2006. – V.44, №1. – P. 86-100.
110. Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
111. Поляхова Е.Н. Введение в теорию солнечного паруса: Космоплавание под солнечным парусом– фантастика или реальность перспектив недалекого будущего? Учеб. пособие. – С.-Пб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 54 с.
112. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
113. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1980. – 172 с.
114. Карымов А.А. Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве//Прикл. математика и механика. – 1962. – Т.26. – Вып.5. – С. 867–876.
115. Карымов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления//Прикл. математика и механика. – 1964. – Т.28. – Вып.5. – С. 923-930.
116. Белецкий В.В., Грушевский А.В., Старостин Е.Л. Управление вращением космического аппарата с помощью давления солнечного излучения//Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – №1. – С. 32–38.
117. Сидоренко В.В. О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором//Космич. исслед. – 1992. – Т.30, №6. – С. 780–790.
118. Коган А.Ю., Кирсанова Т.С. Вращение закрученного КА в световом потоке//Космич. исслед. – 1994. – Т.32, №3. – С. 74–87.
119. Комаров М.М., Сазонов В.В. Расчет сил и моментов сил светового давления, действующих на астероид произвольной формы //Астрон. вестн. – 1994. – Т.28, №1. – С. 21-30.
120. Сазонов В.В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления//Астрон. вестн. – 1994. – Т.28, №2. – С. 95-107.

121. Vokrouhlicky D., and Milani A. Direct solar radiation pressure on the orbits of small near-Earth asteroids: observable effects?//Astron. Astrophys. – 2000. – V.362. –P. 746-755.
122. Rubincam D.P. Radiative spin-up and spin-down of small asteroids //ICARUS. – 2000. – V.148.–P. 2-11.
123. Васильев Л.А. Определение давления света на космические летательные аппараты. – М.: Машиностроение, 1985. – 206 с.
124. Лихачев В.Н., Сазонов В.В., Ульяшин А.И. Эволюция орбиты искусственного спутника Земли с солнечным парусом//Космич. исслед. – 2004. – Т.42, №1. – С. 83-87.
125. Сазонов В.В., Сазонов В.В. Расчет главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на космический аппарат с солнечным парусом//Космич. исслед. – 2011. – Т.49, №1. – С. 59–67.
126. Neishtadt A.I., Sheeres D.J., Sidorenko V.V., Stooke P.J. and Vasiliev A.A. The influence of reactive torques on comet nucleus rotation//Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2003. – V. 86. – P. 249-275.
127. Sidorenko V.V., Sheeres D.J., and Byram S.M. On the rotation of comet Borelly's motion//Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2008. – V. 102. – P. 133-147.
128. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородно капельною жидкостью// Избранные сочинения. Т.1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – С.31-52.
129. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.
130. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
131. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
132. Румянцев В.В., Рубановский В.Н., Степанов С.Я. Колебания и устойчивость твердых тел с полостями, заполненными жидкостью//Вибрации в технике. Т.2. – М.: Машиностроение, 1979. – С. 280-306.
133. Анчев А., Румянцев В.В. О динамике и устойчивости гиросатов//Успехи механики. – 1979. – Т.2, №3. – С.3-45.

134. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. – 230 с.
135. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса//Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1965. – Т.5, №6. – С. 1049-1070.
136. Кобрин А.И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил//Прикл. математика и механика. – 1969. – Т.33. – Вып.3. – С. 431-440.
137. Кобрин А.И. Асимптотическое решение задачи о влиянии жидкого заполнения на движение управляемого твердого тела при малых числах Рейнольдса//Тр. Ин-та/Ин-т механики Моск. ун-та. – 1973. – №28. – С. 65-78.
138. Смирнова Е.П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т.38. – Вып. 6. – С. 980-985.
139. Осипов В.З., Суликишвили Р.С. О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите//Тр. ин-та/Тбилис. мат. ин-т АН Груз.ССР. – 1978. – Т.58. – С. 175-186.
140. Иващенко Б.П. Движение гироскопа с полостью, заполненной вязкой жидкостью//Прикл. механика. – 1978. – Т.14, №8. – С. 110-115.
141. Пивоваров М.Л. Жидкостное демпфирование колебаний спутника с большим магнитным моментом//Космич. исслед. – 1990. – Т.28, №6. – С. 865–873.
142. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция вращения спутника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью// Космич. исслед. – 1993. – Т.31, №6. – С. 22-30.
143. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. – М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 1997. Часть I. – 215 с.; Часть II. – 160 с.
144. Сидоренко В.В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром//Астрон. вестн. – 1993. – Т.27, №2. – С. 119-127.
145. Богатырев С.В. Медленные движения в задачах динамики твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью//Прикл. математика и механика. – 1994. – Т.58. – Вып.5. – С. 91-96.

146. Асланов В.С., Дорошин А.В. О двух случаях движения неуравновешенного гиростата//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 42-55.
147. Дорошин А.В. Эволюция прецессионного движения неуравновешенных гиростатов переменного состава//Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72. – Вып. 3. – С.385-398.
148. Алексеев А.В., Дорошин А.В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением//Общероссийский научно-технический журнал «Полет». – 2007. – № 9. – С. 26-33.
149. Алексеев А.В. Движение спутника–гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости//Известия Самарского научного центра РАН. – 2007. – Т. 9, № 3. – С. 671-676.
150. Судаков С.Н. Переменные Депри в задаче о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью переменной вязкости//Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т.7. – С. 181-191.
151. Литвин-Седой М.З. Механика систем связанных твердых тел//Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1982. – Т.5.– С. 3-61.
152. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата//Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1982. – Т.5. – С. 135-197.
153. Modi V.J. Attitude dynamics of satellites with flexible appendages – a brief review. – J. Spacecraft and Rockets. – 1974. – V.11, №11. – P. 743-751.
154. Roberson R.E. Two decades of spacecraft attitude control// J. Guidance, Control. –1979. –V.2, №1. –P. 3-8.
155. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных твердых тел. – М.: Наука, 1993. – 272 с.
156. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
157. Roberson R.E. Torques on a satellite vehicle from internal moving parts//J. Appl. Mech. – 1958. – V.25, №2. –P. 196-200, 287, 288.
158. Haseltine W.R. Passive damping of wobbling satellites: General Stability Theory and Example//J. Aerospace Sci. –1962. – V. 29, №5. – P. 543 – 549, 557.
159. Thomson W.T. Introduction to space dynamics. N.Y. – London: Wiley, 1961. – 317 p.

160. Colombo G. The motion of satellite 1958 Epsilon around its center of mass//The Smithsonian Contributions to Astrophysics. – 1963. – V.6. –Р. 149-163.
161. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – 598 с.
162. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с.
163. Крементуло В.В. О стабилизации положения равновесия твердого тела при помощи подвижных масс//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №2. – С. 46-50.
164. Качурина Н.М., Крементуло В.В. О стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи подвижных масс// Известия АН СССР. Механика твердого тела– 1981. – С. 96-101.
165. Кунсив Б.Г., Каплен М.Х. Оптимальная система устранения беспорядочного вращения большого пилотируемого космического корабля с помощью внутренней подвижной массы// Управление в пространстве. – М.: Наука, 1976. – Т.2. – С. 30-38.
166. Кравец В.В. Стабилизация материальной системы перемещением носимой массы//Космич. исслед. на Украине. – 1977. – Вып. 10. – С. 48-50.
167. Панкова Н.В., Рубановский В.Н. Устойчивость и бифуркация стационарных вращений свободного твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – №4. – С. 14-18.
168. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №4. – С. 33-44.
169. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами//Прикл. математика и механика. – 1978. – Т.42. – Вып.1. – С. 34-42.
170. Черноусько Ф.Л. О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №1. –С. 22–26.
171. Черноусько Ф.Л., Шамаев А.С. Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №3. – С. 33–42.

172. Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли. Под ред. С.В. Нестерова, А.С. Шамаева, С.И. Шамаева. – М.: Научный мир, 1996. – 272 с.
173. Кременгуло В.В. Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. – М.: Наука: 1977. – 263 с.
174. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
175. Гробов В.А. О совместных вращательных движениях свободного твердого тела и колебаниях связанных с ним упругих тел или упруго подвешенных точечных масс//Труды V Междунар. конф. по нелинейн. колеб. – Киев, 1970. – Т.3. –С. 235–249.
176. Kane T.R., Levinson D.A. Stability, instability and terminal attitude motion of a spinning dissipative spacecraft//AIAA Journal. – 1976. – V.14, №1. –P. 39-42.
177. Cloutier G.J. Resonances of a two–DOF system on a spin-stabilized spacecraft//AIAA Journal. – 1976. – V.14, №1. –P. 107-109.
178. Kane T.R., and Scher M.P. A method of active attitude control based on energy considerations//Journal of Spacecraft and Rockets. –1969. –V.6. –P. 633-536.
179. Beachley N.H. Inversion of spin-stabilized spacecraft by mass translation-some practical aspects//Journal of Spacecraft and Rockets. – 1971. – V.8. – P. 1078-1080.
180. Lorell K.R., and Lange B.O. An automatic mass-trim system for spinning spacecraft//AIAA Journal. –1972. –V. 10. – P. 1012-1015.
181. Cochran J.E., and Speakman N.O. Rotational motion of a free body induced by mass redistribution//Journal of Spacecraft and Rockets. – 1975. – V.12, № 2. – P. 89-95.
182. Cochran J.E. and Shu P.H. Effects of energy dissipation on dual-spin spacecraft attitude motion//J. Guid., Contr., and Dyn. –1983. –V. 6. №5. –P. 1197-1203.
183. Halmser D.M. and Mingori D.L. Nutational stability and passive-control of spinning rockets with internal mass motion//J. Guild., Contr. and Dyn. – 1995. –V.18, №5. –P. 1197-1203.
184. Райан М., Бейнам П.М. Влияние гравитационных моментов на динамику вращающегося спутника с выдвигаемыми элементами//Космич. исслед. – 1978. – Т.16, №4. – С. 497-504.

185. Ананьев В.В. Бифукационное множество в задаче о движении тяжелого твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы//Вестн. Ленингр. ун-та. – Сер. матем., механ. и астрон. – 1982, №1.– Вып.1. – С. 54-60.
186. Month L.A., Rand R.H. Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA//Trans. ASME. J.Appl.Mech. – 1985. – V. 52. –P. 686-692.
187. Салимов Г.Р. О влиянии движения космонавта на пространственное положение космического корабля//Изв. АН СССР. Механика твердого тела.– 1987. – №2. – С. 20-26.
188. Буров А.А. О движении твердого тела, несущего подвижную массу на пружине//Задачи исслед. устойчивости и стабилиз. движения. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987. – С. 3-12.
189. Лосева Н.Н. Устойчивость равномерных вращений твердого тела с подвижной точечной массой//Докл. АН УССР. – Сер.А. – 1988. – №6. – С. 18-21.
190. Christov O.V. Stability of certain solutions in a mechanical model generating the rigid body problem//J. Theor. and Appl. Mech. – 1992. – V.23, №4. – P. 9-21.
191. Christov O. On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it//Bull. Sci. Math. – 1994. – V.118. – P. 385-401.
192. Yehia H.M. New integrable problem of motion of a rigid body with a particle oscillating or bouncing in it//Mechanics Research Communications. – 1997. – V. 24, №3. – P. 243-246.
193. Coppola V.T. The method of averaging for Euler's equations of rigid body motion//Nonlinear Dynamics. – 1997. – V. 14(4). – P. 295-308.
194. Морозов В.М., Рубановский В.Н., Румянцев В.В., Самсонов В.А. О бифукации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем//Прикл. математика и механика. – 1973. – Т.37. –Вып.3. – С. 387-399.
195. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
196. Веретенников В.Г., Карпов И.И., Марков Ю.Г. Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами. Учебное пособие – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 144 с.
197. Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. – М.: Машиностроение, 1980. – 208 с.

198. Ганиев Р.Ф., Закржевский А.Е. Программные движения деформируемых управляемых конструкций. – М.: Наука, 1995. – 214 с.
199. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1991. – 168 с.
200. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 231 с.
201. Набиуллин М.К. Стационарные движения и устойчивость упругих спутников.– Новосибирск: Наука, 1990. –217с.
202. Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. Механика больших космических конструкций. – М.: Изд-во «Факториал», 1997. – 302 с.
203. Марков Ю.Г., Миняев И.С. К динамике космического аппарата с упругими колеблющимися массами//Космич. исслед. – 1991. – Т. 29, №5. – С. 684-694.
204. Мартыненко Ю.Г., Подалков В.В. О нутациях твердого тела в неконтактном подвесе//Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №2. – С.26-31.
205. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №6. – С. 43-48.
206. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №3. – С. 43-50.
207. Новиков В.В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении//Прикл. математика и механика. – 1987. – Т.51. – Вып. 5. – С. 767-774.
208. Сидоренко В.В. О движении твердого тела с гибкими стержнями, допускающими группу симметрии//Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С. 3-11.
209. Сидоренко В.В. Об эволюции движения механической системы с линейным демпфером большой жесткости//Прикл. математика и механика. – 1995. –Т.59. – Вып.4. – С. 562-568.
210. Шатина А.В. Эволюция вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями//Космич. исслед. – 2002. – Т. 40, № 2. – С. 178-92.

211. Гуляев В.И., Лизунов П.П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – Киев: Вища школа, 1989. – 199 с.
212. Смольников Б.А. Эволюционная динамика маятниковых систем//Теория механизмов и машин (СПБГТУ). – 2008. – Т.6, №1. – С.41-47.
213. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
214. Иослович И.В. Наискорейшее торможение вращения аксиально симметричного спутника//Космич. исслед. –1964. –Т.2, №4. –С. 567-569.
215. Ioslovich I. Optimal control of rigid body rotation around center of mass//Journal of Dynamical and Control Systems. –2003. –V.9, №4. –P. 549-562.
216. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. – 536 с.
217. Лавровский Э.К. К задаче стабилизации спутника//Космич. исслед. – 1973. – Т.11, № 2. – С. 329-330.
218. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1974. – 340 с.
219. Алексеев К.Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1977. – 120 с.
220. Зубов В.И., Ермолин В.С., Сергеев С.Л., Смирнов Е.Я. Управление вращательными движениями твердого тела. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 200 с.
221. Лоскутов Е.М. Оптимальное приведение несимметричного аппарата в стационарное вращение по заданному направлению // Некоторые задачи управления и навигации движущихся объектов. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – С. 58-90.
222. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
223. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
224. Akulenko L.D. Problems and Methods of Optimal Control. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1994. – 360 p.

225. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
226. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 175 с.
227. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наукова думка, 1993. – 235 с.
228. Зуев А.Л. О частичной стабилизации ориентации спутника с помощью двух управляющих моментов//Космічна наука і технологія. – 2001. – Т.7, №1. – С. 76–81.
229. Ковалев А.М., Зуев А.Л., Щербак В.Ф. Синтез стабилизирующего управления твердым телом с присоединенными упругими элементами//Проблемы управления и информатики. – 2002. – №6. – С. 5–16.
230. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Информационно-алгоритмические аспекты управления подвижными объектами. – Киев: Наукова думка, 2000. – 312 с.
231. Маланин В.В., Стрелкова Н.А. Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 204 с.
232. Стрелкова Н.А. Оптимальная переориентация сферически-симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде// Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – Пермь. – 2006. – Вып.38. – С. 167-180.
233. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal spacecraft rotational maneuvers. – Amsterdam e.a.: Elsevier, 1986. – 515 p.
234. Bai X., and Junkins J.L. New results for time-optimal three-axis re-orientation of rigid spacecraft//J. Guidance, Contr., and Dyn. –2009. – V.32, №4. – P. 1071-1076.
235. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по части переменных. – М.: Наука, 1991. – 288 с.
236. Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части фазовых координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
237. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения. – Киев: Наукова думка, 1983. – 247 с.

238. Martyniuk A.A. Qualitative Method in Nonlinear Dynamics: Novel Approaches to Liapunov Matrix Function. – New York: Marcel Dekker. 2002. – 301 p.
239. Артюхин Ю.В., Каргу Л.И., Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
240. Сиротин А.Н. О существовании гладких решений в одной задаче управления вращением осесимметричного твердого тела// Прикл. математика и механика. – 2008. – Т.72. – Вып. 3. – С. 399-409.
241. Сиротин А.Н. О некоторых геометрических свойствах экстремалей в задачах оптимальной переориентации сферически симметричного тела//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 9–17.
242. Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В., Харченко И.И. Оптимальная по быстродействию гашение угловых скоростей космического аппарата на основе метода динамического программирования// Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – Вып.34. – С.51–59.
243. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – Київ: Київський університет. – 2008. – 383с.
244. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
245. Кошляков В.Н. Параметры Родрига-Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
246. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. – М.: Физматлит, 2006. – 512 с.
247. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата//Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 6. – С. 61-69.
248. Левский М.В. Задача оптимального по быстродействию управления переориентаций космического аппарата//Прикл. математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 1. – С. 23-38.
249. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. – Київ: Наукова думка, 2006. – 299 с.

250. Byrnes C.L., and Isidori A. On the attitude stabilization of a rigid spacecraft//Automatica. –1991. –V. 27, №1. –P. 87-95.
251. Krishnan H., Reyhanoglee M., and H. Mc Clamroch. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques: a nonlinear control approach based on the spacecraft attitude dynamics// Automatica. –1994. –V. 30. – P. 1023-1027.
252. Tsiotras P., and Longuski J.M. Spin-axis stabilization of symmetric spacecraft with two control torques//Syst. Control Lett. – 1994. – V.23. – P. 395–402.
253. Tsiotras P., Corless M., and Longuski J.M. A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft//Automatica. – 1995. – V.31, №8. – P. 1099-1112.
254. Kaplan M.H., and Cenker R.J, Control of spin ambiguity during re-orientation of an energy dissipating body//J. Spacecraft and Rockets. –1973. –V.10, №12. –P. 757-760.
255. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей вязкую жидкость//Автоматика и телемеханика. – 2007. – №2. – С. 81-94.
256. Гурченков А.А., Корнеев В.В., Носов М.В. Динамика слабозмущенного движения заполненного жидкостью гироскопа и задача управления//Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72. – Вып.6. – С. 904-911.
257. Бебенин Г.Г., Скребушевский Б.С., Соколов Г.А. Системы управления полетом космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 272 с.
258. Рутковский В.Ю., Суханов В.М. Проблемы нелинейного управления ориентацией деформируемых космических аппаратов Ч.1, Ч.2//Мехатроника, автоматизация, управление. – 2006. – №9. – С. 6-14; №10. – С. 15-24.
259. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
260. Алпатов А.П. Развитие методологии системного анализа проблем космической отрасли, исследование динамики объектов ракетно-космической техники//Техн. механика. – 2008. – №2. – С. 139-154.
261. Meirovitch L., and Van Landingham H.F. Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis // Acta Astronaut. – 1977. – V.4, №9-10. –P. 985-1010.

262. Seltzer S. M. Dynamics and control of large space structures: an overview//J. Astronaut. Sci. – 1979. – V.27, №2. – P. 95-101.
263. Hughes P.C., and Skelton R.E. Controllability and observability for flexible spacecraft//J. Guidance and Contr. – 1980. – V.3, №5. – P. 452-459.
264. Горелов Ю.Н. О наискорейшей переориентации оси вращения динамически симметричного космического аппарата//Космич. исслед. – 1983. – Т.21, №1. – С. 27-33.
265. Сарычев А.В. Построение множеств достижимости при управлении кинетическим моментом вращающегося асимметричного твердого тела (особые случаи)//Космич. исслед. – 1984. – Т.22, №6. – С. 828-841.
266. Гуляев В.И., Кошкин В.Л., Шинкарь Ю.А. Оптимальный по импульсу управляющего момента пространственный разворот твердого тела//Прикл. Механика, 1988. – Т.24, №5. – С. 99-104.
267. Голубев Ю.Ф., Демидов В.Н. Оптимальный закон управления при остановке вращения//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №2. – С. 18-24.
268. Крутько П.Д. Управление движением Эйлеровых систем. Синтез алгоритмов обратных задач динамики//Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – №1. – С. 34-53.
269. Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М.: Наука, 1974. – 368 с.
270. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Проблемы управления неустойчивыми системами//Успехи механики. – 2005. – Т.5, №2. – С. 71-135.
271. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
272. Ковалева А.С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. Ч.1. Нерезонансные колебания//Известия РАН. Механика твердого тела. – 1994. – №3. – С. 44-52.
273. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Прогноз движения полюса деформируемой Земли// Астрономический журнал. – 2002. – Т.79, №10. – С. 952-960.
274. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.А. Возмущенное вращение Земли//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – №5. – С. 19-29.

275. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В. Внутрогодовые неравномерности вращения Земли//Астрономический журнал. – 2008. – Т.85, №7. – С. 657-664.
276. Лещенко Д.Д. О движении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде//Прикл. механика. – 1975. – Т.11, №3. – С. 89-94.
277. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде//Известия АН СССР. Механика твердого тела.– 1982. – №3. – С. 5-13.
278. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №2. – С. 13-26.
279. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде// Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 58-63.
280. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №1. – С. 14-21.
281. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений спутника, близкого к динамически – сферическому, под действием моментов сил светового давления//Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – №2. – С. 3-12.
282. Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления//Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – №6. – С. 17-26.
283. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А. Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных и световых моментов//Механика твердого тела. – 2004. – Вып.34 – С. 95-105.
284. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически сферическому, под действием гравитационных и световых моментов//Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №4. – С.97-107.
285. Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления

- в сопротивляющейся среде//Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т.12, вип.7. Матем. і механ. – С. 85-98.
286. Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Быстрые вращения спутника в среде с сопротивлением под действием гравитационного и светового моментов//Механика твердого тела. – 2009. – Вып.39. – С.137-150.
287. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде// Прикл. механика. – 1982. – Т.18, №7. – С. 102-107.
288. Лещенко Д.Д., Суксова С.Г. О движении несимметричного гиростата в среде с сопротивлением//Международ. МФНА-АНН журнал. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2003. – Т.9, №2(18). – С. 83-89.
289. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью// Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 126-139.
290. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления//Механика твердого тела. – 2008. – Вып.38. – С. 95-110.
291. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Рачинская А.Л., Лещенко Д.Д. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов// Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2008. – Т.18, вип.17. – С. 117-131.
292. Лещенко Д.Д. О движении твердого тела с подвижной точечной массой//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С. 37-40.
293. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой//Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – №5. – С. 29-34.
294. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы//Прикл. механика. – 1992. – Т.28, №8. – С. 81-86.
295. Кушпиль Т.А., Лещенко Д.Д., Тимошенко И.А. Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов//Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С.119-125.

296. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., and Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moment//Multibody System Dynamics. – 2001. – V.6, №1. – P. 3-6.
297. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы//Механика гироскопических систем. – 1983. – Вып.2. – С. 90-97.
298. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы//Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – №2. – С. 115-122.
299. Лещенко Д.Д. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы//Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – №1. – С. 80-85.
300. Акуленко Л.Д., Рачинская А.Л., Зинкевич, Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений симметричного твердого тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением//Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т. 14, вип.20. – С. 135-144.
301. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде//Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – №2. – С. 69-73.
302. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с внутренними степенями свободы в сопротивляющейся среде//Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех.– 2010. – Т.15, вип.18. – С. 136-145.
303. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде//Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №1. – С. 16-21.
304. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с подвижной массой в сопротивляющейся среде//Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №2. – С. 20-26.

305. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
306. Lamy P., and Burns J. Geometrical approach to torque free motion of a rigid body having internal energy dissipation // American Journal of Physics. – 1972. – V. 40. – №3. – P. 441-445.
307. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1941. – 235 с.
308. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
309. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами//Прикл. математика и механика. – 2002. – Т. 66. – Вып. 2. – С. 165-176.
310. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой//Прикл. математика и механика. – 1984. – Т.48. – Вып.2 – С. 197-204.
311. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в теории нелинейных колебаний//Прикл. математика и механика. – 2001. – Т.65. – Вып.5. – С. 845-855.
312. Акуленко Л.Д. Периодические движения автономных систем в окрестности устойчивого интегрального многообразия// Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №3. – С. 26-35.
313. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром//Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39. – Вып.4. – С. 621-632.
314. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М: Наука, 1987. – 256 с.
315. Бойчук О.П. Стійкість руху осесиметричного твердого тіла (гіроскопа) на сферичній опорі//Доп. АН УРСР. – 1963. – №1. – С. 31-34.
316. Мартыненко Ю.Г., Панкратьева Г.В. Быстрые вращения проводящего эллипсоида в однородном магнитном поле//Научн. труды Моск. энергетического института. Проблемы механики управляемых систем, машин и механизмов. – 1985. – № 77. – С. 3–10.
317. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
318. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

319. Нейштадт А.И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче//Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 221, №2. – С. 301–304.
320. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
321. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. – 408 с.
322. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.:Наука, 1972. – 576 с.
323. Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Рачинская А.Л., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений симметричного гиростата с подвижной массой в среде с сопротивлением//Механика твердого тела. – 2010. – Вып.40. – С. 152-161.
324. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления//Космич. исслед. – 2011. – Т.49, № 5. – С. 453-463.
325. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное по быстрдействию торможение вращений несимметричного квазитвердого тела в среде с сопротивлением//Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 198-208.
326. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде//Известия РАН. Теория и системы управления. – 2012. – №1. – С. 40-49.
327. Тимофеев А.Ф. Интегрирование функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

Научное издание

Леонид Денисович Акуленко, Дмитрий Давидович Лещенко,
Алла Леонидовна Рачинская, Янина Сергеевна Зинкевич

**Возмущенные и управляемые
вращения твердого тела**

Підписано до друку 14.08.2013. Папір офсетний.
Друк цифровий. Гарнітура TimesNewRoman. Формат 60x84/16.
Ум. друк. арк. 18. Зам. № 707. Наклад 200 прим.

Видавництво
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова
Свідоцтво ДК №4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлисаветинська, 12.
Тел. (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua