

УДК 62.50

©2010. Я.С.Зинкевич, Т.А.Козаченко, А.Л.Рачинская, Д.Д.Лещенко

## ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, моделируемый подвижной точечной массой, соединенной демпфером с корпусом. На твердое тело также действует малый тормозящий момент линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а точечная масса лежит на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

**Ключевые слова:** оптимальное торможение, вращение, твердое тело.

**Введение.** Анализ гибридных систем, т.е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих “квазитвердые” тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движения близки движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.) Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного тела.

Аналізу пассивних рухів твердого тіла з порожтінню, заповненою в'язкою рідиною, або що містить в'язкоупругий елемент, моделюваний точечною масою, з'єднаною демпфером з корпусом, а також в опротивляючій середі уделювалось значительне увагу [1–4]. Проблемі управління обертаннями “квазитвердих” тіл за допомогою зосереджених моментів сил, маючої значення для прикладних, уделювалось недостаточне увагу. Удалось виділити клас систем, приводящих до гладким управляючим впливам і даючих можливість застосування методів сингулярних возмущень без накоплення погрешностей типу “часових погранслоев” [5–8].

Нижче досліджується задача оптимального по быстродействию гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з сферичною порожтінню, заповненою рідиною великої в'язкості (при малих числах Рейнольдса). Крім того, тіло містить в'язкоупругий елемент, який моделюється точечною масою, прикріпленою демпфером до точки на осі симетрії. На тверде тіло діє малий гальмуючий момент сил лінійного опротивлення середі. Управління обертаннями виробляється з допомогою

момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные ранее в работах [5–8].

**1. Постановка задачи оптимального управления.** На основе подхода [1, 2, 6] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [1, 2, 4, 6]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= M_p + Lpr^2 + FG^2qr + Dr^4p - \lambda Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= M_q + Lqr^2 - FG^2pr + Dr^4q - \lambda Aq, \\ C\dot{r} &= M_r + H(p^2 + q^2)r - AC^{-1}Dr^3(p^2 + q^2) - \lambda Cr. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  на связанные оси;  $J = \text{diag}(A, A, C)$  – тензор инерции невозмущенного тела;  $M_{p,q,r}$  – проекции вектора управляющего момента сил  $\mathbf{M}^u$ ;  $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$  – кинетический момент твердого тела.

Для упрощения задачи в систему (1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил внешнего сопротивления среды пропорционален тензору момента сил инерции, т.е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

$$\mathbf{M}^r = -\lambda J\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами  $\lambda Ap, \lambda Aq, \lambda Cr$  [4]. Такое предположение не является противоречивым.

Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил ограничены сферой [6]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (3)$$

где  $b$  – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов  $t, \mathbf{G}$  согласно условиям (3). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для  $\mathbf{G}, \mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$ .

Введенные в (1) обозначения  $F, D, L, H$  выражаются через параметры системы следующим образом

$$\begin{aligned} F &= m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, & D &= m\rho^2\chi\Omega^{-4}C^3A^{-4}(A - C), \\ L &= \beta P\nu^{-1}A^{-2}C(A - C), & H &= \beta P\nu^{-1}A^{-1}(C - A). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты  $F$  и  $D$  в (4) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента,  $m$  – масса подвижной точки,  $\rho$  – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления, которая находится, по предположению, на оси динамической симметрии

этого тела. Постоянные  $\Omega^2 = \frac{c}{m}$ ,  $\chi = \frac{\delta}{m}$  определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно;  $c$  – жесткость (коэффициент упругости),  $\delta$  – коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в смысле [2]:

$$\Omega^2 \gg \chi\omega \gg \omega^2. \quad (5)$$

Сильные неравенства (5) позволяют ввести малый параметр в (4) и считать указанные возмущающие моменты малыми. Кроме того, условия (5) позволяют пренебречь погранслойными участками свободных колебательных движений массы, обусловленных начальными отклонениями вследствие их быстрого затухания, и учесть вынужденные квазистационарные движения, вызванные вращением тела. Заметим, что величина точечной массы  $m$  может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Коэффициенты  $L$ ,  $H$  в (4) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости,  $\beta$  – объемная плотность,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $P$  – коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса  $a_0$  он равен  $P = \frac{8\pi a_0^7}{525}$  [1].

Основное допущение – предположение о малости числа Рейнольдса  $Re$ :

$$Re = \ell V \nu^{-1} \sim a_0^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \sim a_0^2 \omega \nu^{-1} \ll 1. \quad (6)$$

Здесь  $\ell$  – характерный линейный размер полости ( $\ell \sim a_0$ );  $V$  – характерная скорость;  $T_*$  – некоторый временной масштаб ( $T_* \sim \omega^{-1}$ ). Если взять за единицу длины и времени  $\ell$  и  $T_*$  соответственно, то, согласно (6), кинематический коэффициент вязкости является большим параметром [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и вязкостью демпфера, а также момент со стороны вязкой жидкости в полости определяются мономами компонент вектора третьей, четвертой и пятой степеней соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(t_0) = \omega^0, \quad \omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_u, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (7)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза  $u = u(t, \omega)$ , соответствующую ему траекторию  $\omega(t, t_0, \omega^0)$  и время быстродействия  $T = T(t_0, \omega^0)$ , а также функцию Беллмана задачи  $W = T(t, \omega)$ .

**2. Решение задачи оптимального торможения.** Отметим, что моменты сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости, а также движением вязкоупругого элемента, являются внутренними для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды – внешним.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [6]

$$M_p = -b \frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b \frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b \frac{Cr}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (8)$$

Здесь  $b = b(t)$ ,  $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$ .

Умножим первое уравнение (1) на  $Ap$ , второе – на  $Aq$ , третье – на  $Cr$  и сложим. Получим скалярное уравнение, подлежащее интегрированию, и уравнение для  $T$

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -b(t, G) - \lambda G, & G(t_0) &= G^0, & G(T, t_0, G^0) &= 0, \\ T &= T(t_0, G^0), & W(t, G) &= T(t, G). \end{aligned}$$

В предположении  $b = b(t)$  получим решение и условие для  $T$

$$\begin{aligned} G(t) &= G^0 e^{-\lambda(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \\ G^0 &= e^{-\lambda t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau, \quad T = T(t_0, G^0). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $t$  – текущее время процесса торможения,  $T$  – время быстродействия.

При  $b = \text{const}$  решение уравнения и краевой задачи (9) записывается следующим образом

$$G = \frac{1}{\lambda} [(b + \lambda G^0) \exp(-\lambda t) - b], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left( G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (10)$$

Далее детально анализируется случай (10).

**3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела.** Подстановка известного выражения для  $G$  из (10) в третье уравнение (1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно  $r$

$$\dot{r} = -r [bG^{-1} + \lambda - C^{-1}A^{-1}(G^2 - C^2r^2)(HA^{-1} - DC^{-1}r^2)]. \quad (11)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости  $r = GR$ , где  $R$  – неизвестная функция, уравнение (11) приводится к виду, допускающему разделение переменных и интегрирование

$$\dot{R} = A^{-1}C^{-1}RG^2(1 - C^2R^2) [HA^{-1} - DC^{-1}G^2R^2]. \quad (12)$$

Вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению  $Cr = G \cos \theta$ , где  $\theta$  – сферический угол. В результате для неизвестной  $R$  получается соотношение  $CR = \cos \theta$ . Уравнение (12) после перехода к неизвестной  $\theta$  может быть представлено в виде

$$\dot{\theta} = A^{-1}C^{-1}\lambda^{-2} \sin \theta \cos \theta [(G^0\lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \times \\ \times \left\{ -A^{-1}H + C^{-3}D\lambda^{-2} \cos \theta [(G^0\lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \right\}, \quad \theta(0) = \theta^0. \quad (13)$$

Без нарушения общности можно принять, что начальное значение  $\theta(0) = \theta^0$  принадлежит первой четверти  $(0 \leq \theta^0 < \frac{\pi}{2})$ . Если  $\theta^0$  принимает значения из указанного промежутка, то угол  $\theta$  в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку  $\theta^0 = 0, \frac{\pi}{2}$  – стационарные точки уравнения (13) независимо от изменения  $G$ .

Исследуем поведение сферического угла в малой окрестности стационарной точки  $\theta^0 = 0$  уравнения (13):  $\theta = \delta\theta > 0$ .

Уравнение (13) примет вид

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A^{-1}C^{-1}\lambda^{-2} [(G^0\lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \times \\ \times \left\{ -A^{-1}H + C^{-3}D\lambda^{-2} [(G^0\lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \right\} \delta\theta, \quad (14)$$

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(K(t)), \quad (15)$$

$$K(t) = A^{-1}C^{-1}\lambda^{-3} \left[ \frac{1}{4}C^{-3}D(G^0\lambda + b)^4 (1 - \exp(-4\lambda t)) - \right. \\ \left. - \frac{4}{3}bC^{-3}D(G^0\lambda + b)^3 (1 - \exp(-3\lambda t)) + \right. \\ \left. + \left( 3b^2C^{-3}D - \frac{1}{2}A^{-1}H \right) (G^0\lambda + b)^2 (1 - \exp(-2\lambda t)) - \right. \\ \left. - 2(2b^2C^{-3}D - A^{-1}H)b(G^0\lambda + b)(1 - \exp(-\lambda t)) + \right. \\ \left. + (b^2C^{-3}D\lambda^{-1} - A^{-1}H\lambda)b^2t \right].$$

Из (15) следует, что при  $C > A$  (сплюснутое тело) вариация  $\delta\theta$  монотонно убывает (так как  $-H < 0, D < 0$ ), а при  $C < A$  (вытянутое тело) – монотонно возрастает (так как  $-H > 0, D > 0$ ).

Рассмотрим второй случай:  $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta\theta, \delta\theta < 0$  ( $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ ). Аналогично (15) имеем

$$\frac{d(\delta\theta)}{dt} = A^{-2}C^{-1}H\lambda^{-2} [(G^0\lambda + b) \exp(-\lambda t) - b]^2 \delta\theta. \quad (16)$$

$$|\delta\theta(t)| = |\delta\theta^0| \exp \left\{ A^{-2} C^{-1} H \lambda^{-2} \times [-0,5 (G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-2\lambda t) - 1) + 2b (G^0 \lambda + b) \lambda^{-1} (\exp(-\lambda t) - 1) + b^2 t] \right\}.$$

Из (16) следует, что при  $A > C$  величина  $\delta\theta$  монотонно убывает, а при  $A < C$  монотонно возрастает.

Отметим, что в уравнение (16) не входят слагаемые, обусловленные влиянием подвижной массы.

При  $A \approx C$ , а также  $|\delta\theta^0|$  в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для  $\theta$ :

$$\theta(t) = \theta^0 + S(t), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} S(t) = & (AC)^{-1} \lambda^{-3} \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[ \frac{1}{4} C^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0 (G^0 \lambda + b)^4 (1 - \exp(-4\lambda t)) - \right. \\ & - \frac{4}{3} b C^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0 (G^0 \lambda + b)^3 (1 - \exp(-3\lambda t)) + \\ & + \left. \left( 3b^2 C^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0 - \frac{1}{2} A^{-1} H \right) \times \right. \\ & \times (G^0 \lambda + b)^2 (1 - \exp(-2\lambda t)) - 2b (2b^2 C^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0 - A^{-1} H) \times \\ & \times \left. (G^0 \lambda + b) (1 - \exp(-\lambda t)) - \lambda (-A^{-1} H + b^2 C^{-3} D \lambda^{-2} \cos^2 \theta^0) b^2 t \right]. \end{aligned}$$

**4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости.** Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных  $p, q$ , согласно первым двум уравнениям (1) с учетом (8) и известных выражений  $G(t), r(t) = C^{-1} G(t) \cos \theta(t)$ ; коэффициент  $b$  будет также известной функцией  $t: b = b(t, G(t))$ . Зависимость от параметров системы не указывается ради сокращения записи. Введем переменную  $N = A(p^2 + q^2)^{1/2}$ , имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения.

Умножая первое уравнение (1) на  $ApN^{-1}$ , а второе – на  $AqN^{-1}$  и складывая, получим

$$\dot{N} = -\mu(t) N, \quad \mu(t) = \frac{b(t)}{G(t)} - A^{-1} r^2(t) [Dr^2(t) + L] + \lambda, \quad \mu(t) > 0. \quad (18)$$

После интегрирования имеем

$$N(t) = N^0 \exp \left[ - \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right], \quad N^0 \equiv A \left( (p^0)^2 + (q^0)^2 \right)^{1/2}. \quad (19)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде  $G^2 = N^2 + C^2 r^2$ . Отсюда легко получить выражение для  $N$ :  $N = (G^2 - C^2 r^2)^{1/2}$  или, учитывая соотношение  $Cr = G \cos \theta$ ,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (20)$$

При  $b = \text{const}$  с учетом (10) имеем

$$N = \frac{1}{\lambda} [(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b] |\sin \theta|. \quad (21)$$

Численный анализ изменения угла  $\theta$  приведен в п. 5.

Используя известные выражения  $G(t)$  и  $r(t)$ , приведем первые два уравнения системы (1) к виду линейных уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержит только “гироскопические” и “диссипативные” члены с коэффициентами  $g(t)$  и  $\mu(t)$  соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -\mu(t) \mathbf{N} + g(t) I \mathbf{N}, & \mathbf{N} &= (A p, A q)^T, \\ g(t) &= A^{-1} r(t) (A - C + F G^2(t)). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $I$  – симплектическая матрица, а коэффициент  $d(t)$  определен в (18). Гироскопический коэффициент  $g(t)$  совпадает с аналогичной величиной, определенной при движении тела со сферической полостью, заполненной несжимаемой жидкостью большой вязкости, и с вязкоупругим элементом [7].

Уравнение (20) для  $\mathbf{N}$  интегрируется в явном виде. Полагая  $\mathbf{N} = N \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$  – орт вектора  $\mathbf{N}$ , получим для неизвестной  $\mathbf{n}$  уравнение  $\dot{\mathbf{n}} = g(t) I \mathbf{n}$ . Начальное значение  $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^0$ ,  $|\mathbf{n}^0| = 1$  определяется условием  $\mathbf{N}^0 = N^0 \mathbf{n}^0$ . Отметим, что  $|\mathbf{n}(t)| \equiv 1$  для всех  $t \in [0, T_0]$ . Введем аргумент  $\sigma$  так, чтобы  $\mathbf{n}' = I \mathbf{n}$ ; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\sigma) \mathbf{n}^0, \quad \sigma = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где  $\Pi(\sigma)$  – матрица поворота (начального вектора  $\mathbf{n}^0$ ) на угол  $\sigma$ .

Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены уравнениями (19), (23).

**5. Численный анализ и выводы.** Обратимся вновь при  $b = \text{const}$  к задаче определения сферического угла  $\theta(t)$  из уравнения (13). Запишем уравнение (13) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\Gamma_1 \sin \theta \cos \theta f^2(\tau) + \Gamma_2 \sin \theta \cos^3 \theta f^4(\tau), \quad (24)$$

где  $f(\tau) = (1 + k^*) \exp(-\tau) - k^*$ ,  $k^* = \frac{b}{\lambda G^0}$ ,  $\tau = \lambda t$ .

Коэффициенты  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равны

$$\Gamma_1 = A^{-2} C^{-1} H \lambda^{-1}, \quad \Gamma_2 = A^{-1} C^{-4} D \lambda^{-1}.$$

Уравнение (24) было численно проинтегрировано для произвольных различных значений  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $k^*$  и начального угла  $\theta^0 = \frac{\pi}{4}$  рад. Графики изменения угла  $\theta$  представлены на рис. 1–4.

Рис. 1 соответствует значениям безразмерных коэффициентов  $\Gamma_1 = 1$  и  $\Gamma_2 = 1$ . Кривые 1, 2 и 3 численно построены при различных значениях величины  $k^* = 1, 0.5, 0.1$  соответственно. Во всех расчетных случаях сферический угол  $\theta$  убывает до некоторого предельного значения. Видно, что характер изменения функции существенно зависит от значения величины  $k^*$ . Необходимо отметить, что наибольшее убывание угла  $\theta$  наблюдается при значении безразмерного коэффициента  $k^* = 0.8$ . Это позволяет сделать вывод, что отношение момента управляющих сил к величине кинетического момента в начальный момент времени имеет некоторое критическое значение, которое определяет переход от одного характера убывания функции  $\theta(\tau)$  к другому.

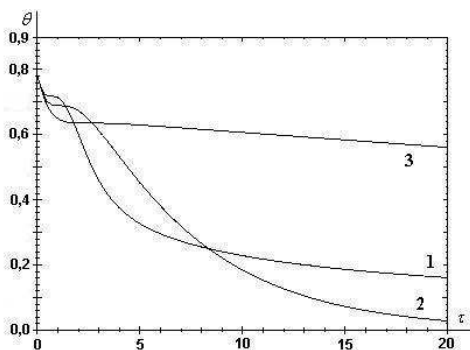


Рис. 1

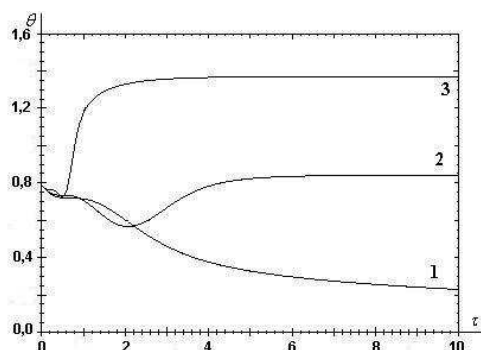


Рис. 2

Кроме того, характер поведения функции  $\theta(\tau)$  определяется порядком величины  $k^*$ . Если рассмотреть значения больше 1, что соответствует существенному влиянию момента управления при небольшой величине кинетического момента в начальный момент времени, то сферический угол будет увеличиваться, достигая своего предельного значения, которое зависит от значения величины  $k^*$ . На рис. 2 представлены кривые для значений коэффициента  $k^* = 1, 0.5, 5$ . Согласно численному расчету, тело сначала поворачивается в сторону уменьшения угла  $\theta$ , а затем вращение меняет свое направление, и сферический угол достигает своего предельного значения.

Однако во всех приведенных случаях за расчетный промежуток времени тело успевает затормозиться.

Численное исследование влияния сил вязкой жидкости в полости и момента сил, обусловленного наличием вязкоупругого элемента, показало, что характер поведения функции  $\theta(\tau)$  зависит от соотношения величин безразмерных коэффициентов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . При существенном влиянии момента сил вязкой жидкости происходит торможение твердого тела с предельным значением угла  $\theta$  – нуль (рис. 3).



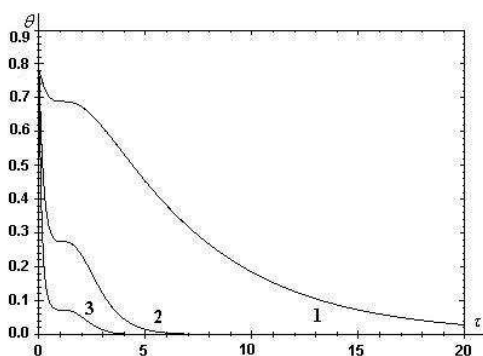


Рис. 3

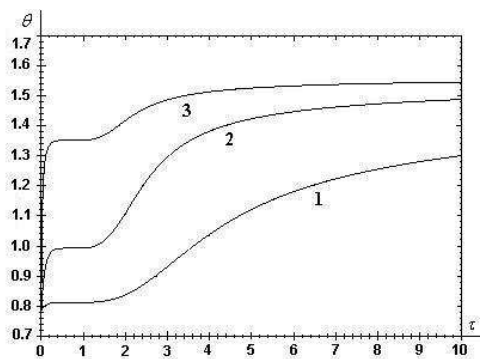


Рис. 4

На рис. 3 представлены три кривые при значениях безразмерного коэффициента  $\Gamma_1 = 1, 5, 10$  соответственно. Расчет проводился при начальном значении сферического угла  $\theta^0 = \frac{\pi}{4}$  рад, при значении коэффициента  $\Gamma_2 = 1$  и для величины  $k^* = 0.5$ . Видно, что характер изменения угла  $\theta$  для разных значений  $\Gamma_1 = 1, 5, 10$  одинаков, только само торможение тела происходит за разные промежутки времени.

Влияние момента сил, обусловленного наличием вязкоупругого элемента, приводит к росту угла  $\theta$  до предельного значения, которое определяется самими безразмерными коэффициентами. При существенном влиянии момента сил, зависящего от вязкоупругого элемента, тело тормозит, отклоняясь на угол  $\theta^0 = \frac{\pi}{2}$ .

На рис. 4 представлены кривые 1, 2, 3 при значениях безразмерного коэффициента  $\Gamma_2 = 1, 10, 100$  соответственно. Расчет проводился при начальном значении сферического угла  $\theta^0 = \frac{\pi}{4}$  рад, при значении коэффициента  $\Gamma_1 = 0.001$  и для величины  $k^* = 1$ . Согласно полученным результатам видно, что угол  $\theta$  увеличивается со временем до предельного значения, при этом происходит торможение самого тела.

**Заключение.** Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного “квазитвердого” тела в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия (функция Беллмана) и сферический угол  $\theta$ , установлены качественные свойства оптимального движения.

Авторы благодарят Л.Д. Акуленко за ценные советы и полезные обсуждения.

1. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – 5, вып. 6. – С. 1049–1070.

2. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 33–44.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Там же. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
4. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 5. – С. 29–34.
6. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 115–122.
8. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Там же. – 2010. – № 2. – С. 56–60.

**Ya.S. Zinkevich, T.A. Kozachenko, A.L. Rachinskaya, D.D. Leshchenko**

### **Optimal deceleration of rotation of a symmetric gyostat with a moving mass in a resistive medium**

The problem of time-optimal deceleration of rotation of a free solid body is studied. It is assumed that the body contains a spherical cavity filled with highly viscous liquid. Solid body carries a moving point mass connected to the body by an elastic coupling with viscous friction. Low decelerating moment of linear friction forces acts on the solid body. It is assumed that the body is dynamically symmetric. The optimal control law for deceleration of rotation of the carrier solid body in the form of synthesis, the operation time, and the phase trajectories are determined.

**Keywords:** *optimal deceleration, rotation, solid body.*

**Я.С. Зінкевич, Т.А. Козаченко, А.Л. Рачинська, Д.Д. Лещенко**

### **Оптимальне гальмування обертань симетричного гіростата з рухомою масою у середовищі з опором**

Досліджено задачу про оптимальне за швидкодією гальмування обертань вільного твердого тіла. Передбачається, що тіло містить сферичну порожнину, заповнену рідиною великої в'язкості. Крім того тіло містить в'язкопружний елемент, модельований рухомою точковою масою, з'єднаною демпфером з корпусом. На тверде тіло також діє малий гальмуючий момент лінійного опору середовища. Вважається, що в недеформованому стані тіло динамічно симетричне, а маса лежить на осі симетрії. Визначено оптимальний закон керування для гальмування обертань несучого твердого тіла у формі синтезу, час швидкодії і фазові траєкторії.

**Ключові слова:** *оптимальне гальмування, обертання, тверде тіло.*

Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса;  
Национальный ун-т им. И.И. Мечникова, Одесса

Получено 01.08.10

yaninaz@mail.ru, leshchenko\_d@ukr.net, rachinskaya@onu.edu.ua