

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/280131454>

The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case

Article · January 1998

CITATIONS

0

READS

9

1 author:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

214 PUBLICATIONS 221 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)



АКАДЕМИЯ НАУК АВИАЦИИ И ВОЗДУХОПЛАВАНИЯ
ACADEMY OF AVIATION AND AERONAUTICS SCIENCES

АКАДЕМИЯ КОСМОНАВТИКИ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО
ASTRONAUTICS ACADEMY OF K.E.TSIOLKOVSKY'S NAME

ISBN 5-89-866-008-9

RUSSIAN-AMERICAN SCIENTIFIC JOURNAL

РОССИЙСКО-АМЕРИКАНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
АВИАЦИОННЫХ И АЭРОКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**
процессы, модели, эксперимент

2(6) 1998

**ACTUAL PROBLEMS
OF AVIATION AND AEROSPACE SYSTEMS**
processes, models, experiment



Казань



EMBRY-RIDDLE
AERONAUTICAL UNIVERSITY

Daytona Beach

Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа

Лещенко Д.Д.

Одесская государственная академия холода
Украина, 270026, Одесса-26, ул.Дворянская, 1/3
e-mail: admin@osar.odessa.ua

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии, технологии и др.

В теоретическом аспекте задачи привлекают внимание специалистов в области теоретической механики. Они могут быть достаточно строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является опорным. Уточнение исследуемых моделей проводится путем учета возмущающих факторов различной физической природы, как внутренних, так и внешних, а также соответствующих предположений относительно порождающего решения. При этом хорошие результаты дает метод усреднения [1,2].

Результаты исследования движения вокруг центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с гиперзвуковой скоростью [3] (Кузмак Г.Е.), показывают, что эта задача может быть приведена к задаче, близкой к случаю Лагранжа. В этой книге используется методика эталонных уравнений. Ряд работ развивают исследования [3]. В монографии В.А.Ярошевского [4] рассматривается движение неуправляемого тела около центра масс при полете в атмосфере с помощью метода усреднения. В статье В.А.Грובה, А.В.Коцюбы [5] метод усреднения применяется для специального вида порождающегося решения. В работе [6] (Гольдштейн Ю.М., Пеня В.М.) предлагается проводить процедуру численного усреднения. В статьях В.С.Асланова, В.М.Серова, С.В.Мясникова [7,8] с помощью метода усреднения рассматривается вращательное движение осесимметричного твердого тела под действием восстанавливающего момента и малых возмущающих диссипативных силовых факторов. В нелинейной постановке исследуется неуправляемое движение относительно центра масс асимметричного КА при спуске в атмосфере планеты. В работе Ю.М.Заболотнова [9] рассматриваются вопросы устойчивости резонансных режимов движения КА с малой асимметрией в атмосфере.

Задача о движении гироскопа под действием опрокидывающего момента в предположении, что этот момент медленно изменяется со временем, возникла в середине XIX века в связи с появлением нарезной артиллерии. Нарезы на внутренней поверхности ствола придают снаряду вращательное движение вокруг оси симметрии. Кривизна траектории снаряда обычно мала, а изменение угловой скорости вращения за счет трения о воздух незначительна. Вот почему для объяснения различных особенностей движения артиллерийского снаряда можно использовать случай Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой. Первая теория движения артиллерийского снаряда, использующая такую концепцию, была создана в 1865 году Н.В.Майевским [10]. Последующие исследователи иными, также приближенными методами подтвердили необходимые условия устойчивости Майевского для

настильных траекторий и развили их дальше для криволинейных траекторий, с чем можно ознакомиться по работе А.Н.Крылова [11].

В статьях Н.Г.Четаева [12,13] решен вопрос о достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда, найдены точные решения задачи об устойчивости вращательных движений снаряда с полостью, заполненной идеальной жидкостью. В книге Б.Н.Окунева [14] исследовано влияние на движение гироскопа экваториального и аксиального тушащего моментов, играющих весьма существенную роль при изучении вращательного движения артиллерийских снарядов. В монографии Н.Н.Моисеева [15] рассматривается задача Лагранжа о движении осесимметричного волчка под действием опрокидывающего момента, направленного перпендикулярно плоскости, проходящей через его ось симметрии. В статье А.Я.Савченко, Т.И.Погосяна [16] исследуется влияние на возникновение и устойчивость стационарных движений гироскопа Лагранжа переменной по направлению силы, приложенной к точке его оси симметрии.

В работе А.М.Ковалева [17] движение тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа, изучается с помощью теоремы А.Н.Колмогорова-В.И.Арнольда о сохранении движений. В статьях [18,19] (Елфимов В.С., Сергеев В.С.) рассматриваются задачи о существовании периодических решений уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Переменные действие-угол для случая Лагранжа использовались в [17,19] и рассмотрены в статье И.М.Аксененковой [20], где приведены также разложения в ряды Фурье направляющих косинусов вертикали. В книге В.Г.Демина, Л.И.Конкиной [21] описывается применение методов усреднения типа Гаусса или введенных в небесной механике методов Фату, Н.Д.Моисеева, Ш.Делоне и Г.Хилла в динамике твердого тела. Исследуются периодические движения волчка Лагранжа при малом смещении его центра тяжести или при малом нарушении его осевой динамической симметрии.

В статьях [22,23] рассмотрена аналогия между возмущенной задачей о волчке Лагранжа в случае потенциальных возмущений и задачей о вращении спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, с учетом влияния магнитного поля Земли, моделируемого полем диполя с осью, совпадающей с осью вращения Земли. Получены первые приближения к условно-периодическим решениям задачи о возмущенном движении спутника в магнитном поле, при этом невозмущенное движение спутника совпадает с движением Лагранжа.

Работа Б.П.Иващенко [24] посвящена исследованию движения симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в поле сил тяжести, когда ось его отклонена от вертикали. В статье А.П.Шило [25] изучается гироскоп Лагранжа, вдоль оси динамической симметрии которого перемещается точечная масса под воздействием силы тяжести и упругой силы. В работе А.Я.Савченко, В.С.Безрученко [26] построены уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой под действием момента диссипативных сил и дебаланса тяги, найдены области выполнения условий устойчивости равномерных вращений. Ранее движение симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при наличии сил сопротивления среды и момента двигателя относительно оси симметрии, заданного как функция времени, рассматривалось в статье В.М.Матросова [27].

В работах [28-31] с помощью метода теории возмущений Хори исследуется движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, распределение масс в котором мало отличается от случая Лагранжа, а центр тяжести расположен достаточно близко к закрепленной точке. В переменных действие - угол изучается движение тяжелого гироската, состоящего из волчка Лагранжа с учетом нарушения динамической симметрии и ротора, угловая скорость которого постоянна.

В статье В.Ф.Журавлёва [32] рассматривается задача о поведении волчка Лагранжа в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости. Применение уравнений в невырождающихся переменных отличных от локальных координат типа углов Эйлера, позволяет осуществить полное исследование системы. В работе В.Н.Кошлякова [34] рассматривается задача стабилизации с помощью вертикальной вибрации движения тяжелого симметричного тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде.

В статье Л.М.Мархашова [36] исследуется эволюция регулярных прецессий твердого тела, близкого к волчку Лагранжа. В [37] (Simpson H.C., Gunzburger M.D.) рассматривается движение симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием сил трения, обусловленных окружающей диссипативной средой. Обсуждается модель момента сил трения.

В статье Ge Z.M., Wu M.H. [38] получены достаточные условия устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа при наличии демпфирующего момента, проекции которого на главные оси инерции относительно неподвижной точки являются нелинейными функциями соответствующих составляющих угловой скорости волчка. В работе В.Е.Пузырёва [39] исследуется устойчивость неравномерных вращений гироскопа Лагранжа вокруг главной оси при наличии сил сопротивления среды. В статье И.А.Бойцовой, В.П.Марченко [40] исследуется усреднённая по быстрой переменной задача об оптимальной стабилизации вращательного движения управляемого динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки на конечном промежутке времени.

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследуются в статье Л.Д.Акуленко, Д.Д.Лещенко, Ф.Л.Черноусько [41]. В ней приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. В работах Л.Д.Акуленко, Д.Д.Лещенко, Ф.Л.Черноусько, А.С.Шамаева [42,43] в отличие от [41] рассматриваются возмущенные быстрые вращения твердого тела, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения удаётся получить явные аналитические решения. Уравнения возмущенного движения рассматриваются при различных наборах и предположениях относительно порядков малости величин возмущающих моментов. В [42] получена усредненная система уравнений движения в первом приближении под действием: 1) линейного внешнего диссипативного момента; 2) момента, постоянного в связанных осях; 3) момента сил, обусловленного динамической несимметрией. В [43] нерезонансное решение первого приближения дает тривиальный результат, оно затем уточняется путем расчетов второго приближения. Рассмотрены первые два примера возмущений, исследованных в [42], и движение тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. В статьях Д.Д.Лещенко, С.Н.Саллама [44-46] аналогично [42,43] рассматривается эволюция вращений в более общем случае, когда величина восстанавливающего момента сил зависит от угла нутации. Рассмотрена механическая модель такого момента сил, в первом и втором приближениях исследуются примеры, отвечающие постоянному и вязкому моментам сил.

В работах В.В.Сазонова, В.В.Сидоренко [47,48] изучается асимптотическое поведение движений гироскопа Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента. Получена усредненная система уравнений движения в специальных эволюционных переменных. Для случаев действия малого постоянного момента и наличия полости, заполненной жидкостью большой вязкости, получена

качественная картина движений. Исследовано влияние на движение гироскопа Лагранжа малых возмущений, обусловленных нарушением динамической симметрии и наличием линейного диссипативного момента. Рассматриваются возможные резонансные эффекты.

Отмечу некоторые задачи, решение которых начато, но, на мой взгляд, может быть продолжено.

1. Проведение процедуры усреднения по углу нутации и исследование усреднённой системы уравнений движения твердого тела в случае Лагранжа с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.
2. Исследование возмущенных вращательных движений твёрдого тела, близких к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Одной из характерных практических задач, приводящих к такому случаю, является задача о неуправляемом пространственном движении твердого тела в атмосфере. В качестве возмущений можно рассматривать, например, момент диссипативных сил и дебаланс тяги.
3. Изучение возмущенных вращательных движений твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа под действием возмущений различной физической природы.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503с.
2. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971, 507с.
3. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970, 348с.
4. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978, 168с.
5. Гробов В.А., Коцюба А.В. Нестационарное пространственное движение летательного аппарата, входящего в атмосферу с гиперзвуковой скоростью. Прикл. механика. 1972, Т.8, No.8, с.71-79.
6. Гольдштейн Ю.М., Пеня В.М. К исследованию движения асимметричного твердого тела при произвольных углах нутации с использованием метода усреднения. Динамика и управление движением. Киев, Наук.думка, 1978, с.43-48.
7. Асланов В.С., Серов В.М. Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента. Изв. РАН, МТТ. 1995, No.3, с.19-25.
8. Асланов В.С., Мясников С.В. Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере. Космич. исслед. 1996, Т.34, No.6, с.626-632.
9. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. Космич. исслед. 1994, Т.32, No.4-5, с.112-125.
10. Майевский Н.В.О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе. Артиллерийский журнал. 1865, No.3.

11. Крылов А.Н. О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета. Собрание трудов академика А.М.Крылова. Т.IV, Баллистика. М.,Л., Изд-во АН СССР, 1937, с.1-301.
12. Четаев Н.Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда. ПММ, 1943, Т.7, No.2, с.81-96.
13. Четаев Н.Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью ПММ, 1957, Т.21, No.2, с.157-168.
14. Окунев Б.М. Свободное движение гироскопа. М., Л., Гостехиздат, 1951, 379с.
15. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1981, 400с.
16. Погосян Т.И., Савченко А.Я. О движении гироскопа Лагранжа в переменном по направлению поле сил. Механика тверд. тела. Киев, Наук.думка, 1980, Вып.12, с.85-90.
17. Ковалёв А.М. О движении, тела мало отличающегося от гироскопа Лагранжа. Механика твердого тела. Киев, Наук.думка, 1971, вып.3, с.25-27.
18. Елфимов В.С. Существование периодических решений движения твердого тела, близкого к гироскопу Лагранжа. ПММ, 1978, Т.42, No.2, с.251-258.
19. Сергеев В.С. Периодические движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, близкого к динамически симметричному. ПММ, 1983, Т.47, No.1, с.163-166.
20. Аксененкова И.М. Канонические переменные угол-действие в задаче о волчке Лагранжа. Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Матем., Механ., 1981, No.1, с.86-90.
21. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе, Илим, 1989, 182с.
22. Аксененкова И.М.О влиянии геомагнитного поля на периодические движения спутника относительно центра масс. Космич. исслед., 1991, Т.29, No.1, с.145-148.
23. Конкина Л.И. Условно-периодические решения в задаче о вращении намагниченного спутника в магнитном поле. Космич. исслед., 1996, Т.34, No.4, с.442-444.
24. Иващенко Б.П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Докл.АН УССР, Сер.А, 1976, No.9, с. 794-797.
25. Шило А.П. Устойчивость стационарных движений гироскопа Лагранжа с подвижной точечной массой. Механика твердого тела. Киев, Наук.думка, 1981, вып.13, с.97-101.
26. Савченко А.Я., Безрученко В.С. Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги. Механика твердого тела. Киев, Наук.думка, 1993, вып.25, с.75-80.
27. Матросов В.М. Об устойчивости движения. ПММ, 1962, Т.26, No.5, с.885-895.
28. Моторина Н.Н. Применение метода Хори к исследованию возмущенного волчка Лагранжа. Изв.АН СССР, МТТ, 1988, No.1, с.102-104.
29. Жилисбаева К.С. Применение метода Хори-Депри при исследовании возмущенного движения волчка Лагранжа. Изв.АН Каз.ССР, Сер.физ.-мат., 1989, No.5, с.73-76.
30. Темирбаева М.К. Существование периодических движений вблизи резонанса для тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой. Докл.АН Тадж.ССР, 1983, Т.26, No.6, с.350-354.
31. Тулегенова К.Б. Построение переменных действие-угол в задаче о движении симметричного гиростата. Динам. тверд. тела перем. массы. Алма-Ата, 1988, с.71-76.
32. Журавлев В.Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного тела. Изв.АН СССР, МТТ, 1986, No.3, с.5-11.
33. Марков Ю.Г. О движении упругого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса Изв.АН СССР, МТТ, 1991, No.6, с.16-23.

34. Кошляков А.С. Об устойчивости движения симметричного тела, установленного на вибрирующем основании. Укр.мат.журн., 1995, Т.47, No.12, с.1661-1666.
35. Ковалёва А.С. Многочастотные системы при стационарном случайном возмущении. Ч.1. Нерезонансные колебания. Изв.РАН, МТТ, 1994, No.3, с.44-52.
36. Мархашов Л.М. Об эволюции регулярных прецессий твердого тела, близкого к волчку Лагранжа. Изв.АН СССР, МТТ, 1980, N3, с.8-12.
37. Simpson H.C., Gunzburger M.D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. J.Appl.Math.and Phys., 1986, V.37, No.6, pp.867-894.
38. Ge Z.M., Wu M.H. The stability of a sleeping top with damping torque. Int.J.Eng.Sci., 1989, V.27, No.3, pp.285-288.
39. Пузырёв В.Е. К устойчивости неравномерных вращений гироскопа Лагранжа вокруг главной оси при наличии сил сопротивления среды. Механика твердого тела, Киев, Наук.думка, 1985, вып.17, с.66-70.
40. Бойцова И.А., Марченко В.П. Приближенное исследование одной усредненной краевой задачи оптимальной стабилизации. Изв.АН СССР, МТТ, 1987, No.1, с.42-47.
41. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. ПММ, 1979, Т.43, No.5, с.771-778.
42. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. Изв.АН СССР, МТТ, 1986, No.5, с.3-10.
43. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Изв.АН СССР, МТТ, 1987, No.6, с.8-17.
44. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. ПММ, 1990, Т.54, No.2, с.224-232.
45. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки. Изв.АН СССР, МТТ, 1990, No.5, с.16-23.
46. Leshchenko D.D. Perturbed rotational motions of a rigid body. The Lyapunov functions method and applications. J.Baltzer AG, Scientific publishing Co. IMACS, 1990, pp.227-232.
47. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. ПММ, 1990, Т.54, No.6, с.951-957.
48. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. J.Nonlinear Sci., 1994, V.4, pp.35-57.

Лещенко Дмитрий Давидович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики. Область научных интересов: исследование эволюции возмущенных вращательных движений твердого тела под действием моментов сил различной природы. Сферы приложения: движение летательных аппаратов при входе в атмосферу, движение искусственного спутника относительно центра масс, вращение снаряда, теория гироскопов.

The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case

Leshchenko D.D.

At present in dynamics of a rigid body with fixed point there is vast bibliography on the theoretical researches of the perturbed motions, that are close to Lagrange case, and on the applications to dynamics of space vehicle and flying machines, of gyrosystems and other engineering objects. Here the brief survey is given, that is devoted to the investigations results for indicated problems. Only the papers are mentioned here, that are the most close to the results of author and his colleagues.