

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/278242377>

Оптимальное торможение вращений твёрдого тела с внутренними степенями свободы

Article · January 1995

CITATIONS

0

READS

14

2 authors:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering a...

214 PUBLICATIONS 221 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[Leonid D Akulenko](#)

Russian Academy of Sciences

532 PUBLICATIONS 1,120 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Numerical solution of eigenproblems [View project](#)



Homogenization in optimal control problems [View project](#)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 534:62—50

© 1995 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. Д. ЛЕЩЕНКО

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ*

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела, несущего элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную несжимаемой жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса), и вязкоупругий элемент, моделируемый подвижной точечной массой, соединенной сильным демпфером с корпусом. В недеформированном состоянии тело обладает осевой динамической симметрией, а точечная масса лежит на этой оси. Асимптотическими методами нелинейной механики построена математическая модель управляемых движений гибридной системы в квазистатическом приближении. Определен оптимальный синтез управления торможением вращений тела. Установлено, что модуль кинетического момента системы убывает до нуля за конечное время. Численным интегрированием уравнения для угла нутации показано, что вектор кинетического момента в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

Введение. Анализ гибридных систем, т. е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих «квазитвердые тела». Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко (при некоторых необременительных условиях) движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях углового движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Исследованию динамики свободных твердых тел с внутренними степенями свободы посвящен ряд работ [1—4] и др.

Проблеме управления вращениями «квазитвердых тел» посредством сосредоточенных (приложенных к корпусу) моментов сил, имеющей существенное значение для приложений, уделялось недостаточное внимание. Это объясняется большими математическими трудностями. Авторам удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения методов сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа «погранслоев», неизбежно возникающих в случае разрывных, в частности, релейных управлений [3, 5, 6]. Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, целиком заполненной сильно вязкой жидкостью (при

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16286, 94-01-01368).

малых числа Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной сильным демпфером к точке на оси симметрии. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю; он может быть реализован посредством верньерных реактивных двигателей [6]. Рассматриваемая ниже модель обобщает работы авторов [3, 5, 6].

1. Постановка задачи оптимального управления. На основе подхода [1, 2] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера), могут быть представлены в виде [3, 5, 6]

$$A\dot{p} + (C - A)qr = M_p + FG^2qr + Dr^4p + Lpr^2, \quad (1.1)$$

$$A\dot{q} + (A - C)pr = M_q - FG^2pr + Dr^4q + Lqr^2,$$

$$C\dot{r} = M_r - AC^{-1}Dr^3(p^2 + q^2) + H(p^2 + q^2)r,$$

где p, q, r — проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $J = \text{diag}(A, A, C)$ — тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ — проекции вектора управляющего момента сил M ; кинетический момент тела $G = J\omega$, его модуль $G = |G| = [A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2]^{1/2}$.

Предполагается, что допустимые значения M ограничены сферой [6]

$$M = bu, \quad |u| \leq 1; \quad b = b(t, \omega), \quad 0 < b_* \leq b \leq b^* < \infty, \quad (1.2)$$

где b — скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов согласно (1.2). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для ω , $\omega(t_0) = \omega^0$.

Далее, введенные в (1.1) коэффициенты D, F, L, H выражаются через параметры системы следующим образом:

$$D = m\rho^2\lambda\Omega^{-4}A^{-4}C^3(A - C), \quad F = m\rho^2\Omega^{-2}A^{-3}C, \quad L = \beta P\nu^{-1}A^{-2}C(A - C), \quad (1.3)$$

$$H = \beta P\nu^{-1}A^{-1}(C - A).$$

Коэффициенты D, F в (1.3) характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием вязкоупругого элемента, m — масса подвижной точки, ρ — расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления, которая находится, по предположению, на оси динамической симметрии этого тела. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c — жесткость (коэффициент упругости), δ — коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, когда коэффициенты связи велики в следующем смысле [2]:

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg \omega^2. \quad (1.4)$$

Сильные неравенства (1.4) позволяют ввести малый параметр в (1.3) и считать указанные возмущающие моменты малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Кроме того, условия (1.4) позволяют пренебречь пограничными участками свободных колебательных движений массы, обусловленных начальными отклонениями, вследствие их быстрого затухания и учесть вынужденные квазистационарные движения, вызванные вращением тела. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Коэффициенты L, H в (1.3) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости в полости, β — объемная плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, P — коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\lambda a_0^2/525$ [1]. Основное допущение — предположение о малости числа Рейнольдса Re

$$Re = h\nu^{-1} \sim \rho T_*^{-1}\nu^{-1} \sim \rho\omega\nu^{-1} \ll 1. \quad (1.5)$$

Здесь l — характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$), v — характерная скорость, а T_* — некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$). Если взять за единицу длины и времени l и T_* соответственно, то, согласно (1.5), кинематическая вязкость ν является большим параметром, $\nu \gg 1$ [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Итак, в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и вязкостью демпфера, — мономы вектора $\omega = (p, q, r)^T$ четвертой и пятой степеней соответственно. Момент со стороны вязкой жидкости определяется мономами третьей степени от ω . Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1.1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min, \quad |\omega| \leq 1. \quad (1.6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что моменты сил, обусловленные движениями вязкоупругого элемента и вязкой жидкости в полости, являются внутренними для фиктивного тела. Это означает, что модуль $G = |G|$ вектора кинетического момента $G = J\omega$ постоянен во времени: $G(t) = G^0 = \text{const}$ при $M \equiv 0$, где G^0 — значение G в начальный момент времени $t = t_0$. Доказательство следует непосредственно; оно проводится на основе неуправляемой системы (1.1) скалярным умножением векторного уравнения на $G = (Ap, Aq, Cr)^T$ [6, 7]. Таким образом, к рассматриваемой системе применима методика управления системами с инвариантной нормой посредством ограниченного по модулю управляющего воздействия [6]. Решение задачи синтеза закона оптимального по быстродействию торможения вращений может быть построено на основе функционального неравенства Шварца [6, 7] для $G(t)$

$$-b = -bG^{-1}(u, G)_{\max} \leq \dot{G} \leq bG^{-1}(u, G)_{\max} = b. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что синтез оптимального закона торможения имеет вид

$$M_0 = b(t, \omega) u_0, \quad u_0 = -GG^{-1}. \quad (2.2)$$

Итак, орт оптимального по быстродействию тормозящего момента сил M_0 направлен против кинетического момента. Модуль кинетического момента $G(t)$ убывает до нуля за конечное время $T_0 - t_0$, которое определяется в результате интегрирования системы (1.1) при $M = M_0(t, \omega)$. Оптимальный момент времени $T_0 = T_0(t_0, \omega^0)$ может быть оценен согласно (2.1), (2.2), (1.2)

$$t_0 + G^0/b^* = T^* \leq T_0 \leq T_* = t_0 + G^0/b_*, \quad (2.3)$$

$$b^* = \max_{t, \omega} b(t, \omega), \quad b_* = \min_{t, \omega} b(t, \omega), \quad |J\omega| \leq G^0, \quad t_0 \leq t \leq T^0 < \infty.$$

Оптимальное время быстродействия $T_0(t_0, \omega^0)$ определяется в результате интегрирования системы (1.1), (2.2) из следующего условия: $G(T_0, t_0, G^0) = 0$ или $\omega(T_0, t_0, \omega^0) = 0$, что то же самое. Проблема определения величины T_0 упрощается

и сводится к интегрированию одного уравнения для G , если $b = b(t, G)$; тогда для нахождения T_0 имеем

$$\dot{G} = -b(t, G), \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T_0, t_0, G^0) = 0. \quad (2.4)$$

В частности, если функция $b = b(G)$ не зависит от t явно, то

$$T_0(t_0, G^0) = t_0 + \int_0^{G^0} \frac{dG}{b(G)}. \quad (2.5)$$

В другом частном случае $b = b(t)$ время быстрогодействия T_0 — единственный корень уравнения

$$G^0 = \int_{t_0}^{T_0} b(t) dt, \quad T_0 = T_0(t_0, G^0). \quad (2.6)$$

Наконец, при $b = \text{const}$ имеем $T_0 = t_0 + G^0/b$.

При помощи достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [8] можно также установить, что функция $M_0(t, \omega)$ (2.2) — оптимальный синтез в задаче быстрогодействия (1.1), (1.6), а соответствующая траектория $\omega = \omega_0(t, t_0, \omega^0)$ будет оптимальной. Время T_0 минимально, а функция $V(t, \omega) = T_0(t, \omega) - t$ — функция Беллмана задачи оптимального быстрогодействия. Для ее определения необходимо интегрировать систему уравнений (1.1), (2.2) в текущий момент времени t при заданном (измеренном) значении вектора ω до момента времени T_0 , для которого $\omega_0(T_0, t, \omega) = 0$. В частных случаях (2.4) — (2.6) функция Беллмана находится достаточно просто. Далее для определенности будем рассматривать указанные более простые выражения функции $b = b(t, G)$ и считать, что величина $T_0(t_0, G^0)$ и зависимость $G = G_0(t, t_0, G^0)$ известны.

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1.1) приводит к нелинейному уравнению относительно r

$$\dot{r} = -r [bG^{-1} + C^{-1}(G^2 - C^2r^2)(A^{-1}C^{-1}Dr^2 - A^{-2}H)]. \quad (3.1)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R — неизвестная функция, уравнение (3.1) приводится к более удобному виду ($z = R^2$)

$$\dot{z} = -2A^{-1}C^{-2}G^2z(1 - C^2z)(DG^2z + L). \quad (3.2)$$

Вектор кинетического момента G при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G \cos \theta$, где θ — угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos \theta$. Уравнение (3.2) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде, удобном для дальнейшего изучения

$$\dot{\theta} = (A - C)G^2 \cos \theta \sin \theta (\alpha G^2 \cos^2 \theta + \eta), \quad (3.3)$$

$$\alpha = m\rho^2\lambda\Omega^{-4}A^{-5}C^{-1}, \quad \eta = \beta P\nu^{-1}A^{-3}C^{-1}, \quad \theta(t_0) = \theta^0, \quad 0 \leq \theta, \quad \theta^0 < \pi,$$

где α, η — положительные постоянные, а переменная $G = G(t, t_0, G^0)$ считается известной в соответствии с принятым выше в конце разд. 2 предположением ($\dot{G} = -b$). Переменная θ и уравнение (3.3) обладают привлекательной геометрической наглядностью. Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит первой четверти ($0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений

также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ — стационарные точки уравнения (3.3) независимо от изменения G .

Исследуем поведение угла нутации в малой окрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) имеем

$$\delta\dot{\theta} = (A - C) G^2 (\alpha G^2 + \eta) \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 > 0;$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(A - C) \int_{t_0}^t G^2(\tau) (\alpha G^2(\tau) + \eta) d\tau \right]. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что с ростом t при $C > A$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает, а при $C < A$ (вытянутое тело) — монотонно возрастает. Если торможение достаточно медленное (коэффициент b мал), то $\delta\theta$ достаточно близко подходит к значению $\delta\theta = 0$ или экспоненциально возрастает соответственно при $C \gtrless A$. Таким образом, движение тела стремится к вращению вокруг оси с максимальным моментом инерции. Чтобы это установить, рассмотрим второй случай ($\theta^* = \pi/2$); для $\delta\theta < 0$ аналогично (3.4) имеем

$$\delta\dot{\theta} = (C - A) \eta G^2 \delta\theta, \quad \delta\theta(t_0) = \delta\theta^0 < 0;$$

$$\delta\theta(t) = \delta\theta^0 \exp \left[(C - A) \eta \int_{t_0}^t G^2(\tau) d\tau \right]. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при $A > C$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A < C$ — монотонно убывает. Если убывание $G(t)$ достаточно медленное, то при $A > C$ величина $\delta\theta(t) \rightarrow -0$, т. е. $\theta \rightarrow \pi/2 - 0$, а при $A < C$ величина $\delta\theta \rightarrow -\infty$. Заметим, что изменения $\delta\theta$ в окрестности $\theta^* = \pi/2$ несколько более медленные, чем при $\theta^* = 0$, поскольку обнуляется член, содержащий $\cos^2 \theta^*$ (3.3). Характер поведения θ для всех $0 \leq \theta \leq \pi/2$ непосредственно следует из уравнения (3.3), поскольку знак правой части определяется константой $(A - C)$. Количественные характеристики поведения угла нутации $\theta(t, t_0, \theta^0, [G])$ получаются в результате численного интегрирования уравнений (3.3) и (2.4) (или (2.5), (2.6)).

Отметим, что случай $\eta = 0$ в (3.3), рассмотренный авторами [3, 6], означает отсутствие полости (или жидкость «заморожена»). При этом уравнение (3.3) допускает разделение переменных θ, t и аналитическое интегрирование в квадратурах. Другой случай $\alpha = 0$ в (3.3) означает, что вязкоупругий элемент отсутствует или является абсолютно твердым. Наличие только полости с сильно вязкой жидкостью также допускает разделение переменных и интегрирование в квадратурах; эта задача изучена авторами [5, 6]. Если параметр η или α относительно мал или оба малы, то к уравнению (3.3) можно применить методы регулярных возмущений на рассматриваемом промежутке времени $t \in [t_0, T_0]$. Однако только случай малых обоих коэффициентов η и α приводит к рациональным обзорным конструкциям приближенного решения. Они могут быть реализованы в виде разложений по степеням η, α или последовательными приближениями по схеме Пикара (см. разд. 5).

Если в (3.3) формально положить $G = G^0 = \text{const}$, то это уравнение совпадает с полученным для неуправляемого движения ($b = 0$). Тогда правая часть — тригонометрическая функция θ , а уравнение допускает разделение переменных и полное интегрирование в элементарных функциях. Анализ неуправляемого движения на асимптотически большом интервале времени [4] отвечает изложенному выше качественному выводу о финальном значении $\theta(t, \theta^0, G^0)$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1.1) с учетом

(2.2) и известных выражений $G(t)$, $r(t) = C^{-1}G(t) \cos \theta(t)$; коэффициент b будет также известной функцией t : $b = b(t, G(t))$. Зависимость от параметров системы и начальных данных не указывается ради сокращения записи. Введем переменную $N = A(p^2 + q^2)^{1/2}$, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1.1) на $A p N^{-1}$, а второе — на $A q N^{-1}$ и складывая, получим для N линейное однородное уравнение, интегрируя которое находим

$$N(t) = N^0 \exp \left[- \int_{t_0}^t d(\tau) d\tau \right], \quad N^0 = A(p^0^2 + q^0^2)^{1/2}, \quad (4.1)$$

$$d(t) \equiv b(t)/G(t) - A^{-1} D r^A(t) - A^{-1} L r^2(t).$$

Из (4.1) следует, что $N(T_0) = 0$, так как $G(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow T_0 + 0$. Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p, q (1.1) к виду линейных с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только «гироскопические» и «диссипативные» члены с коэффициентами $g(t)$ и $d(t)$ соответственно

$$\dot{N} = -d(t)N + g(t)IN, \quad N = (Ap, Aq)^T, \quad (4.2)$$

$$g(t) \equiv A^{-1}(A - C)r(t) + FG^2(t)r(t).$$

Здесь I — симплектическая единица, а «коэффициент диссипации» $d(t)$ определен выше в (4.1). Оба коэффициента d и g известным образом зависят от времени t .

Уравнение (4.2) для N интегрируется в явном виде [6]. Действительно, полагая $N = Np$, где $p = p(t)$ — орт вектора N , получим для неизвестной p уравнение $\dot{p} = gIp$. Начальное значение $p(t_0) = p^0$, $|p^0| = 1$ определяется условием $N^0 = N^0 p^0$. Отметим, что $|p(t)| \equiv |p(t_0)| = |p^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T_0]$. Введем аргумент θ так, чтобы $p' = Ip$; имеем

$$p(t) = \Pi(\theta) p^0, \quad \theta = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

где $\Pi(\theta)$ — матрица поворота (начального вектора p^0) на угол θ . Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (4.1), (4.3). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в разд. 2, 3.

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к проблеме определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$. На основе разд. 2, 3 получим для θ и G представления

$$\theta' = \gamma (1 - \tau)^2 \sin \theta \cos \theta [k(1 - \tau)^2 \cos^2 \theta + h], \quad (5.1)$$

$$G(\tau) = G^0 (1 - \tau), \quad \tau = t/T_0 \in [0, 1], \quad T_0 = G^0/b,$$

$$k = G^0 |A - C| \alpha/b, \quad h = G^0 |A - C| \eta/b, \quad 0 \leq k, h < \infty,$$

$$\gamma = \text{sign}(A - C) = \pm 1.$$

Здесь штрих означает производную по аргументу τ . Заметим, что в автономном случае $b = b(G)$ (в частности, $b = \text{const}$) без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$. При малых k и h , а также $|\delta\theta^0|$ в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае

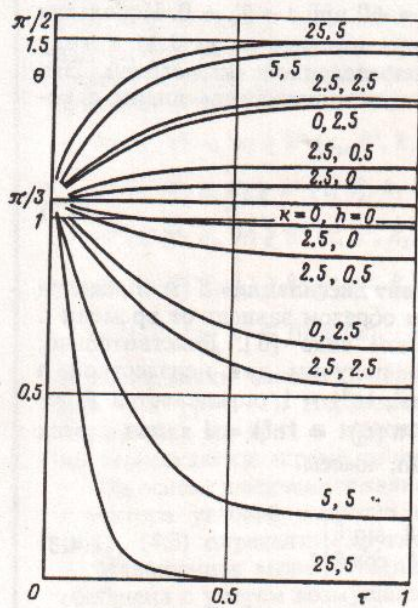


Рис. 1

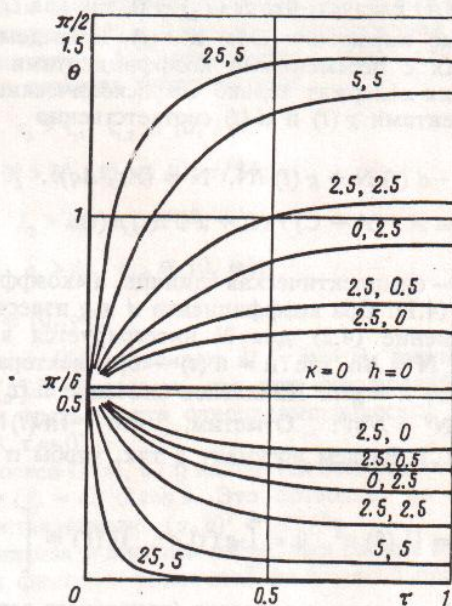


Рис. 2

приводят к элементарным выражениям: полиномам по τ и экспонентам от полиномов и квадратурам от их произведений. Например, после первой итерации в первом приближении по k, h и во втором по $\delta\theta^0$ имеем выражения для $\theta(\tau)$

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= \theta^0 + \gamma \sin \theta^0 \cos \theta^0 [(k/5) \cos^2 \theta^0 (1 - (1 - \tau)^5) + \\ &+ (h/3)(1 - (1 - \tau)^3)] + O(k^2 + h^2); \\ \theta(\tau) = \delta\theta(\tau) &= \delta\theta^0 \exp \gamma [(k/5)(1 - (1 - \tau)^5) + \\ &+ (h/3)(1 - (1 - \tau)^3)] + O(\delta\theta^0)^3, \quad \theta^* = 0, \quad \delta\theta^0 > 0; \\ \theta(\tau) = \pi/2 + \delta\theta(\tau) &= \pi/2 + \delta\theta^0 \exp [-\gamma(h/3)(1 - (1 - \tau)^3)] + O(|\delta\theta^0|^3), \\ \theta^* &= \pi/2, \quad \delta\theta^0 < 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для произвольных различных значений k, h и θ^0 решение уравнения (5.1) проводилось на ЭЦВМ. Заметим, что семейства графиков $\theta = \theta^\gamma(\tau, \theta^0, k, h)$ являются трехпараметрическими; кроме того, два значения принимает параметр $\gamma = \pm 1$.

На рис. 1, 2 представлены расчетные графические зависимости θ^* при начальных условиях $\theta^0 = \pi/3, \pi/6$ соответственно и различных значениях параметров k, h , которые приведены на соответствующих кривых. Значениям $k = h = 0$ отвечают горизонтальные прямые $\theta^\gamma(\tau) = \theta^0$. Если параметр $\gamma = +1$, то при $k, h > 0$ кривые $\theta^+(\tau)$ идут монотонно вверх к $\theta^* = \pi/2$ выше этих прямых; если $\gamma = -1$, то, наоборот, кривые θ^- идут монотонно вниз к $\theta^* = 0$ ниже этих прямых. При $h = 0$ (полость отсутствует или жидкость «заморожена») семейства кривых по k совпадают с построенными ранее [3, 6]; аналогично при $k = 0$ (вязкоупругий элемент отсутствует или является «абсолютно жестким») семейства по h отвечают изученным в [5, 6]. Основной качественный вывод, следующий из графиков рис. 1.2 и других многочисленных расчетов, состоит в следующем.

Оба фактора (вязкоупругий элемент и вязкая жидкость) способствуют стремлению $\theta^\gamma(\tau) \rightarrow \theta^* = 0, \pi/2$ при $\gamma = \mp 1$. Для фиксированных значений k возрастание h приводит к более крутому стремлению $\theta^\gamma(\tau)$ к 0 или $\pi/2$; аналогичная ситуация имеет место при фиксированных значениях h и возрастании k . Итак, для семейств графиков имеют место следующие свойства монотонности:

$$\begin{aligned} \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h) &\geq \theta^\pm(\tau_2, \theta^0, k, h), \quad \tau_2 > \tau, \quad \tau_{1,2} \in [0, 1]; && \Leftarrow \\ \theta^\pm(\tau, \theta_1^0, k, h) &\geq \theta^\pm(\tau, \theta_2^0, k, h), \quad \theta_2^0 > \theta_1^0, \quad \theta_{1,2}^0 \in [0, \pi/2]; && // - // \\ \theta^\pm(\tau, \theta^0, k_1, h) &\geq \theta^\pm(\tau, \theta^0, k_2, h), \quad k_2 > k_1, \quad k_{1,2} \in [0, \infty); && // - // \\ \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_1) &\geq \theta^\pm(\tau, \theta^0, k, h_2), \quad h_2 > h_1, \quad h_{1,2} \in [0, \infty); && // - // \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\tau \in (0, 1), \quad \theta^0 \in (0, \pi/2), \quad k, h \in (0, \infty).$$

Верхние знаки (меньше) неравенств (5.3) отвечают θ^+ ($\gamma = +1$), нижние (больше) — θ^- ($\gamma = -1$). Неравенства (5.3) означают, что при фиксированных двух параметрах из трех и изменении третьего эти однопараметрические семейства не пересекаются (кроме точки $\theta^0, \tau = 0$).

На основе имеющихся зависимостей $G(\tau), \theta(\tau)$ находится осевая составляющая r вектора угловой скорости $\omega: r(\tau) = C^{-1}G \cos \theta$. Это позволяет по формулам (4.1), (4.3) определить другие составляющие: $(p, q)^T = A^{-1}Np$.

Изложенная выше методика синтеза и анализа гибридных систем может быть обобщена с учетом возмущающих факторов различной физической природы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6.
2. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4.
3. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5.
4. Лещенко Д. Д., Саллам С. Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 8.
5. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы // Механика гироскопических систем. 1983. Вып. 2.
6. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
7. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
8. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.

Москва,
Институт проблем механики РАН

Поступила в редакцию
4.IV.1994