Об эволюции вращений твердого тела

Article *in* International Applied Mechanics · January 1999

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

УДК 531383

Д.Д.Лещенко

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и возмущающие моменты малы по сравнению с моментом силы тяжести. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Определена эволюция угла прецессии во втором приближении.

§1. Постановка задачи. Рассмотрим движение несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием одной только силы тяжести $\boldsymbol{G}$. Уравнения движения имеют вид [3]

$$Ap^{\cdot} + (C - B)qr = mg(Z_c \sin\theta\cos\varphi - y_c\cos\theta);$$

$$Bq^{\cdot} + (A - C)pr = mg(x_c\cos\theta - Z_c\sin\theta\sin\varphi);$$

$$Cr^{\cdot} + (B - A)qp = mg(y_c\sin\theta\sin\varphi - x_c\sin\theta\cos\varphi); \tag{1.1}$$

$$\psi^{\cdot} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \theta^{\cdot} = p\cos\varphi - q\sin\varphi;$$

$$\varphi^{\cdot} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.$$

Рассмотрим случай тяжелого твердого тела, у которого эллипсоид инерции относительно точки O близок к эллипсоиду вращения, так что его главные моменты инерции имеют вид

$$A = A^0(1 + \varepsilon\delta_1), \quad B = A^0(1 + \varepsilon\delta_2), \quad C \neq A^0. \tag{1.2}$$

Здесь δ_1, δ_2 — безразмерные постоянные порядка единицы, A^0 — характерная величина моментов инерции, $\varepsilon << 1$ — малый параметр.

Предположим, что координаты центра тяжести C относительно неподвижной точки удовлетворяют соотношению

$$0 < (x_c^2 + y_c^2)^{\frac{1}{2}} << z_c. \tag{1.3}$$

Таким образом, нарушение динамической симметрии заключается в смещении центра тяжести тела с оси O_c и для координат центра тяжести в рассматриваемом случае можем записать

$$x_c = \varepsilon x_1 l, \quad y_c = \varepsilon y_1 L, \quad Z_c = l, \tag{1.4}$$

где x_1, y_1 — безразмерные величины, которые считаются конечными по сравнению с малым параметром ε; l — характерный размер тела.

Приведем систему уравнений (1.1) к системе динамических уравнений Эйлера (1.5), относя к возмущениям гироскопические моменты и моменты от смещения центра тяжести тела с оси динамической симметрии [7]

$$Ap^{\cdot} + (C - A)qr = k\sin\theta\cos\varphi + M_1; \tag{1.5}$$

$$Aq^{\cdot} + (A - C)pr = -k\sin\theta\cos\varphi + M_2;$$

$$Cr^{\cdot} = M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Последние три кинематические уравнения (1.1) при этом не изменяются. Здесь M_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции, проходящие через точку O; $k = mgl$.

В данной работе, как и в [5], делаются следующие предположения:

$$p^2 + q^2 << r^2, \quad Cr^2 >> k, \quad |M_i| << k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.6}$$

Предположения (1.6) означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной моментом силы тяжести; возмущающие моменты малы по сравнению с моментом силы тяжести. Неравенства (1.6) позволяют ввести малый параметр и положить

$$p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \quad \varepsilon << 1;$$

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.7}$$

В ряде работ, например, [1, 2, 5, 6] исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Совокупность упрощающих предположений (1.6) или (1.7), как показано в [5], позволяет получить в общем случае сравнительно простую схему усреднения.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.5), если выполнены условия (1.2), (1.4), (1.6), (1.7). Будем пользоваться методом усреднения [4] на интервале времени порядка ε^{-1}.

§ 2. Процедура усреднения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных и параметров (1.2), (1.4), (1.7). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, после ряда преобразований получим систему, в которой в первых двух уравнениях вместо A записывается A^0, а проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции, проходящие через точку O, следуя (1.5) — (1.7), имеют вид

$$M_1^* = -K\delta_1 \sin\theta\cos\varphi - Ky_1\cos\theta + Qr[\delta_1(C - A^0) + \delta_2 A^0];$$

$$M_2^* = -K\delta_2 \sin\theta\sin\varphi + Kx_1\cos\theta + Pr[\delta_2(A^0 - C) - \delta_1 A^0]; \tag{2.1}$$

$$M_3^* = K\sin\theta\,(y_1\sin\varphi - x_1 xos\varphi).$$

Процедура усреднения для системы вида (1.5) изложена в [5]. Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно сократив обе части первых двух уравнений (1.1) после замены переменных и параметров (1.2), (1.4), (1.7) на ε) и положим $\varepsilon = 0$.

Тогда из полученных последних четырех уравнений имеем

$$r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0. \tag{2.2}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t = 0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения системы (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.7) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему двух линейных уравнений для P, Q. Решение представим в виде

$$P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(r_0 t + \varphi_0); \tag{2.3}$$

$$Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0 t + \varphi_0);$$

$$a = P_0 - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \quad b = -Q_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0;$$

$$\gamma_0 = n_0 t, \quad n_0 = (C - A^0)(A^0)^{-1}r_0 \neq 0, \; |n_0/r_0| < 1.$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения новых переменных P, Q, введенных согласно (1.7), а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.7) существенно нелинейна, поэтому далее вводится дополнительная переменная γ, определяемая уравнением

$$\gamma^{\cdot} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A^0)(A^0)^{-1} r. \tag{2.4}$$

Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.7), (2.4) при $\varepsilon = 0$. Первые два соотношения (2.3) можно с учетом (2.2) переписать в эквивалентном виде

$$P = a\cos\gamma + b\sin\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi; \tag{2.5}$$

$$Q = a\sin\gamma - b\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi.$$

Эти равенства нетрудно разрешить относительно a, b.

Введем новую переменную ρ следующим образом:

$$r = r_0 + \varepsilon\rho. \tag{2.6}$$

Пользуясь формулами (2.5), (2.6), перейдем в системе (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.7), (2.4) при $\varepsilon \neq 0$ от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \gamma$ к новым переменным $a, b, \rho, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где

$$\alpha = \gamma + \varphi. \tag{2.7}$$

После преобразований получим более удобную для дальнейших исследований систему семи уравнений

$$\begin{aligned}
a^{\cdot} &= \varepsilon(A^0)^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) - \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \\
&+ \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2}\rho\cos\theta(b - 2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha; \\
b^{\cdot} &= \varepsilon(A^0)^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) - \\
&- \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2}\rho\cos\theta(a + 2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) - \varepsilon^2 KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha; \\
\rho^{\cdot} &= \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad \theta^{\cdot} = \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha); \\
\psi^{\cdot} &= \varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\theta(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1} - \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2}\rho; \\
\alpha^{\cdot} &= C(A^0)^{-1}r_0 + \varepsilon C(A^0)^{-1}\rho - \varepsilon\,\mathrm{ctg}\,\theta(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \\
&- \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta + \varepsilon^2 KC^{-1}r_0^{-2}\rho\cos\theta; \\
\gamma^{\cdot} &= n_0 + \varepsilon(C - A^0)(A^0)^{-1}\rho.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь через M_i^0 обозначены функции, полученные из M_i^* (см. (1.7)) в результате сделанной подстановки (2.5) — (2.7)

$$M_i^0(a, b, \rho, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.9}$$

Рассматриваемая нами система уравнений (2.8) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}
x^{\cdot} &= \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y), \quad x(0) = x_0; \\
y^{1\cdot} &= \omega_1 + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), \quad y^1(0) = y^{10}, \\
y^{2\cdot} &= \omega_2 + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y), \quad y^2(0) = y^{20},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где вектор-функция $x=(x^1,\ldots,x^5)$ составлена из медленных переменных a,b,ρ,ψ,θ; через y^1 и y^2 обозначены быстрые переменные α,γ; ω_1,ω_2 — постоянные фазы, равные $C(A^0)^{-1}r_0$ и $(C-A^0)(A^0)^{-1}r_0$ соответственно. Вектор-функции F_i, g_i, h_i $(i=1,2)$ определяются правыми частями уравнений (2.8).

Двумерный вектор (g_1,h_1) обозначим через Z_1. Так как возмущающие моменты $M_i^*(i=1,2,3)$ периодичны по φ с периодом 2π, то согласно замене (2.5) — (2.7) функции M_i^0 из (2.9) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π.

Согласно известной процедуре построения асимптотики системы (2.10) [4] будем искать замену переменных

$$x=x^*+\varepsilon u_1(x^*,y^*)+\varepsilon^2 u_2(x^*,y^*)+\ldots;$$

$$y=y^*+\varepsilon v_1(x^*,y^*)+\varepsilon^2 v_2(x^*,y^*)+\ldots;$$

$$y=(y^1,y^2),\quad x^*=(x^{*1},\ldots,x^{*5}),\quad y^*=(y^{*1},y^{*2})$$

такую,что система (2.10) в новых переменных приняла бы вид

$$x^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x^*)+\varepsilon^2 A_2(x^*)+\ldots;$$

$$y^{*\cdot}=\omega+\varepsilon B_1(x^*)+\varepsilon B_2(x^*)+\ldots,\quad \omega=(\omega_1,\omega_2). \tag{2.11}$$

Известно [4], что уравнения для вектор-функций u_1, v_1 имеют вид

$$\omega\,\partial u_1/\partial y^*=F_1(x^*,y^*)-A_1(x^*);$$

$$\omega\,\partial v_1/\partial y^*=Z_1(x^*,y^*)-B_1(x^*), \tag{2.12}$$

где $(\partial f/\partial x)$ — матрица частных производных $\|\partial f_i/\partial x^j\|$ $(i,j=1,\ldots,5)$. Функции $A_1(x^*)$, $B_1(x^*)$ определяются по формулам

$$A_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_1(x^*,y^*)\,dy^{*1}dy^{*2};$$

$$B_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_1(x^*,y^*)\,dy^{*1}dy^{*2}. \tag{2.13}$$

Функция $u_2(x^*,y^*)$ должна быть решением уравнения

$$\partial u_2/\partial y^*\omega=G(x^*,y^*)-A_2(x^*);$$

$$G(x^*,y^*)=F_2(x^*,y^*)+\partial F_1/\partial{}^*u_1+\partial F_1/\partial y^*v_1- \tag{2.14}$$

$$-\partial u_1/\partial x^*A_1(x^*)-\partial u_1/\partial y^*B_1(x^*).$$

Функция $A_2(x^*)$ определяется по формуле

$$A_2(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G(x^*,y^*)\,dy^{*1}dy^{*2}. \tag{2.15}$$

Определим усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$x_1^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x_1^*),\quad x_1^*(0)=x_{10}, \tag{2.16}$$

а также систему второго приближения для медленных переменных

$$x_2^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x_2^*)+\varepsilon^2 A_2(x_2^*),\quad x_2^*(0)=x_{20} \tag{2.17}$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$y_2^{*\boldsymbol{\cdot}} = \omega + \varepsilon B_1(x_1^*(t)),\quad y_2^*(0) = y^0,\quad y^0 = (y^{10}, y^{20}), \tag{2.18}$$

которая сразу интегрируется

$$y_2^*(t) = y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x_1^*(s))\,ds. \tag{2.19}$$

Определим вектор-функции

$$\begin{gathered} x_\varepsilon^\vee(t) = x^{(1)}(\varepsilon t) + \varepsilon x^{(2)}(\varepsilon t) + \\ + \varepsilon u_1\Big(x^{(1)}(\varepsilon t), y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds\Big); \\ y_\varepsilon^\vee(t) = y^0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Таким образом, построение приближенных решений $x_\varepsilon^\vee(t)$, $y_\varepsilon^\vee(t)$ сводится к следующей процедуре: решаем с помощью рядов Фурье уравнения (2.12), (2.14), затем по формуле (2.15) строим вектор-функцию $A_2(x^*)$, далее определяем решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ согласно [5] и, наконец, по формуле (2.20) получаем искомые приближения.

§ 3. Случай тела, близкого к динамически симметричному. В качестве примера применения предложенной методики исследуем движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при выполнении соотношений (1.2) для главных моментов инерции и (1.4) для координат центра тяжести C относительно неподвижной точки.

В этом случае первые три уравнения (2.8) в переменных $a, b, \rho, \psi, \theta, \alpha, \gamma$ записываются с учетом (2.1), остальные уравнения системы (2.8) остаются неизменными. Компоненты вектор-функций A_1 и B_1 после вычислений по формулам (2.13) имеют вид

$$\begin{gathered} A_1^{(1)} = -b[1/2\,C(A^0)^{-1}r_0(\delta_1 + \delta_2) + KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta]; \\ A_1^{(2)} = a[1/2\,C(A^0)^{-1}r_0(\delta_1 + \delta_2) + KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta]; \\ A_1^{(3)} = 0,\quad A_1^{(4)} = KC^{-1}r_0^{-1},\quad A_1^{(5)} = 0; \\ B_1^{(1)} = C(A^0)^{-1}\rho - KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta,\quad B_1^{(2)} = (C - A^0)(A^0)^{-1}\rho. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1 = \{u_1^{(i)}\}$ $(i = 1, \ldots, 5)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered} u_1^{(4)} = -C^{-1}A^0 r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha); \\ u_1^{(5)} = C^{-1}A^0 r_0^{-1}(a\sin\alpha - b\cos\alpha). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Определим функцию $A_2(x^*)$ по формуле (2.15)

$$\begin{gathered} A_2^{(1)} = KC^{-1}r_0^{-2}b\cos\theta[\rho - 1/2\,KC^{-2}r_0^{-2}A^0(1 + \cos\theta)] + \\ + 1/4\,KC^{-1}r_0^{-1}b(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta; \\ A_2^{(2)} = -KC^{-1}r_0^{-2}a\cos\theta[\rho - 1/2\,KC^{-2}r_0^{-2}A^0(1 + \cos\theta)] - \\ - 1/4\,KC^{-1}r_0^{-1}a(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta; \\ A_2^{(3)} = 0,\quad A_2^{(4)} = -KC^{-1}r_0^{-2}\rho + A^0K^2C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta - \\ - 1/2\,KC^{-1}r_0^{-1}(\delta_1 + \delta_2),\quad A_2^{(5)} = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Находим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) с учетом (3.2) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)} = a^0 \cos \eta t - b^0 \sin \eta t, \quad b^{(1)} = b^0 \cos \eta t + a^0 \sin \eta t;$$

$$\rho^{(1)} = 0, \quad \psi^{(1)} = \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + \psi_0, \quad \theta^{(1)} = \theta_0; \tag{3.5}$$

$$\alpha^{(1)} = C(A^0)^{-1} r_0 t - \varepsilon t K C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta_0 + \varphi_0, \quad \gamma^{(1)} = n_0 t,$$

где

$$\eta = \varepsilon [1/2 C (A^0)^{-1} r_0 (\delta_1 + \delta_2) + K C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta_0]; \quad a^0, b^0, n_0$$

определяются согласно формуле (2.3).

На основании приведенных формул можно, следуя (2.20), построить компоненты функции $x_\varepsilon^{v}(t)$, отвечающие переменным ψ и θ

$$\psi_\varepsilon^{v}(t) = \psi_0 + \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + V^{(1)};$$

$$V^{(1)} = \varepsilon^2 t A^0 K^2 C^{-3} r_0^{-3} - 1/2 \varepsilon^2 t K C^{-1} r_0^{-1} (\delta_1 + \delta_2) -$$

$$- \varepsilon C^{-1} A^0 r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0 (a^{02} + b^{02})^{1/2} \sin (\alpha^{(1)} + \beta); \tag{3.6}$$

$$\sin \beta = a^{(1)} (a^{02} + b^{02})^{-1/2}, \quad \theta_\varepsilon^{v}(t) = \theta_0.$$

Здесь в выражении для ψ_ε^{v} ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные. Характер медленного изменения фазы малых колебаний виден из формул (3.5) для $a^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

Полученное выражение $V^{(1)}$ уточняет для данной задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p = K C^{-1} r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов [3].

Отметим, что формуле (3.6) для $V^{(1)}$ нет зависимости от отклонения центра тяжести от оси Oz_c, задаваемой выражениями (1.4). Безразмерные величины x_1, y_1 выпадают при усреднении. Кроме того, действие этих возмущений не приводит к изменению угла нутации даже во втором приближении.

Р Е З Ю М Е . З допомогою методу усереднення розглядаються обертання осесиметричного твердого тіла з нерухомою точкою, які близькі до регулярної прецесії. Досліджується еволюція обертань твердого тіла під дією інерційних збурюючих моментів сил, обумовлених динамічних несиметрією. Розв'язання першого наближення дає тривіальний результат, воно далі уточнюється шляхом розрахунку другого наближення.

S U M M A R Y . The rotations of axisymmetric rigid body around a fixed point close to regular precession are considered with the help of the averaging method. The evolution of rotations of a rigid body under the action of the inertial pertubed moments of forces caused by dynamical asymmetry is investigated. The solution of the first approximation gives a trivial result, it is revised then by the calculation of the second approximation.

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикл. математика и механика. — 1979. — 43, № 5. — С. 771 — 778.
2. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 5. — С. 3 — 10.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч.2. — М.: Наука, 1969. — 332 с.
4. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 507 с.
5. *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 6. — С. 8 — 17.
6. *Сазонов В.В., Сидоренко В.В.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа // Прикл. математика и механика. — 1990. — 54, № 6. — С. 951 — 957.
7. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

Одес. академия холода(Украина)

Поступила 15.07.97