

Д.Д. Лещенко

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯ-
ЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

§ I. Рассмотрим движение несимметричного твердого тела вокруг центра масс в слабо сопротивляющейся среде. Движение указанного тела описывается следующей системой динамических уравнений типа Эйлера:

$$\begin{aligned} A\ddot{\rho} + (C-B)\dot{\rho}\tau &= -\Sigma(\bar{I}_{11}\dot{\rho} + \bar{I}_{12}\dot{\varphi} + \bar{I}_{13}\dot{\tau}) \\ B\ddot{\varphi} + (A-C)\dot{\tau}\rho &= -\Sigma(\bar{I}_{21}\dot{\rho} + \bar{I}_{22}\dot{\varphi} + \bar{I}_{23}\dot{\tau}) \\ C\ddot{\tau} + (B-A)\dot{\rho}\varphi &= -\Sigma(\bar{I}_{31}\dot{\rho} + \bar{I}_{32}\dot{\varphi} + \bar{I}_{33}\dot{\tau}) \end{aligned} \quad (I.1)$$

где \bar{I}_{ij} - аэродинамические моменты сопротивления вращению тела /1/, Σ - малый параметр, A, B, C - моменты инерции тела относительно осей O_x, O_y, O_z системы координат, связанных с телом. ρ, φ, τ - проекции вектора угловой скорости тела на эти оси.

Для решения задачи применяется метод усреднения /2/. Первые интегралы невозмущенной системы (при $\Sigma = 0$) будут в нашей задаче медленными переменными.

Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка Σ на интервале времени, за который

твёрдое тело совершил $\sim \frac{1}{8}$ оборотов.

Не нарушая общности, положим $A > B > C$ и рассмотрим движение при условии $2TA > G^2 > 2TB$, которое соответствует траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось связанный системы координат O_x

$$T = \frac{1}{2}(A\rho^2 + B\varphi^2 + C\tau^2) \quad (I.2)$$

кинетическая энергия тела,

$$G^2 = A^2\rho^2 + B^2\varphi^2 + C^2\tau^2 \quad (I.3)$$

квадрат величины кинетического момента.

Введем функцию

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA-G^2)}{(A-B)(G^2-2TC)} \quad (0 \leq k \leq 1) \quad (I.4)$$

При помощи (I.4), (I.1) можно выразить производную $\frac{dk^2}{dt}$ через $\rho, \varphi, \tau, G, T$. Функции ρ, φ, τ затем выражаются через G, T, φ с помощью (I.2), (I.3), после чего T в формуле (I.4) записывается через k^2 и G . В результате получим:

$$\frac{dk^2}{dt} = -\Sigma f(G, k^2, \varphi) \quad (I.5)$$

где функция f есть некоторый многочлен второй степени относительно φ . Функция k^2 так же, как G^2 и T , является медленно меняющейся переменной. Поэтому в первом приближении в (I.5) можно подставить из невозмущенного движения Эйлера-Пуансо /3/:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2TA-G^2}{B(A-B)}} \sin \left[\frac{t-t_0}{\tau} \cdot 4K(k, k) \right] \quad (I.6)$$

и усреднить правую часть (I.5) по периоду невозмущенного движения.

Здесь \tilde{t} - период движения, t_0 - произвольная постоянная. При усреднении медленные переменные считаются постоянными. Используя формулы для интегралов от эллиптических функций /4/, получим усредненное уравнение в виде:

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1-x)(1-k^2) - \left[(1-x)+(1+x)k^2 \right] \frac{E(k)}{K(k)} \quad (I.7)$$

$$x = \frac{2I_{22}AC - I_{11}BC - I_{33}AB}{(I_{33}A - I_{11}C)B}$$

$$\xi = \frac{t - t_*}{N}; \quad N = \frac{AC}{E(I_{33}A - I_{11}C)}$$

$K(k), E(k)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Постоянная t_* выбрана так, чтобы момент $t = t_*$ соответствовал $k=1$.

Интересным является то, что (I.7) - уравнение вида (7.11) (см. /5/), которое получено для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Нетрудно проверить, что x можно записать в виде:

$$x = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\text{где } x_1 = C(I_{22}A - I_{11}B) \\ x_2 = A(I_{33}B - I_{22}C)$$

В зависимости от динамических характеристик x в данном случае может изменяться в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Это расширяет смысл уравнений (I.7) по сравнению с соответствующим уравнением в /5/. В частности, когда $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и, следовательно, $|x| \leq 1$ можно использовать результаты численного интегрирования /5/ при начальном условии $k^2(0) = 1$. В этом случае k^2 монотонно убывает от 1 до 0 при росте ξ от 0 до ∞ .

При малых k правую часть (I.7) можно упростить, используя разложение полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 (см. /4/). Получающееся при этом уравнение интегрируется и асимптотическое решение, соответствующее большим ξ , записывается в виде:

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+x)\xi}{2}\right] = C_1 \exp\left[-\xi \frac{c(I_{22}A - I_{11}B) + B(I_{33}A - I_{11}C)}{ABC} t\right]$$

$$c_1 > 0 \quad (\xi \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty) \quad (I.8)$$

Функцией (I.8) и формулами (I.4), (I.7) движение описывается при $t \geq t_*$.

Случай, когда $2HB \geq G^2 \geq 2HC$, т.е. когда тректория вектора кинетического момента охватывает ось Oz , рассматривается аналогично и приводит к результатам, сходящимся к рассмотренным, изменением обозначений моментов инерции A и C . Получаемые при этом решения будут иметь место при $t \leq t_*$.

Процедура, аналогичная получению (I.7), может быть проведена для G . В результате получается усредненное уравнение следующего вида:

$$\frac{dG^2}{dt} = \frac{2EG^2}{[A(B-C) + C(A-B)k^2]} \left\{ T_{33}(A-B)(k^2 - 1) + T_{22}(A-C) + \right. \\ \left. + [T_{11}(B-C) - T_{22}(A-C) + T_{33}(A-B)] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \quad (I.9)$$

Интегрирование этого уравнения для малых k приводит к следующему результату:

$$G^2 = C_1 k^{2x} \left[\frac{BC}{2A(B-C)} \left\{ -1 + \frac{A[(I_{22}A - I_{11}B) + (I_{33}A - I_{11}C)]}{[C(I_{22}A - I_{11}B) + B(I_{33}A - I_{11}C)]} \right\} k^2 \right] \quad (I.10)$$

где

$$\omega = \frac{2\bar{I}_{11}B\dot{\theta}}{C(I_{12}A - I_{11}B) + B(I_{23}A - I_{11}C)}$$

Ограничиваются членами порядка ϵ^2 в (I.10) и учитывая (I.8), получим:

$$G = G_0 \exp\left(-\epsilon \frac{\bar{I}_{11}}{A} t\right) \quad (I.II)$$

Из (I.4) при (I.8), (I.II) с сохранением членов порядка ϵ^2 следует

$$T = T_0 \exp\left(-2\epsilon \frac{\bar{I}_{11}}{A} t\right) \quad (I.II)$$

Таким образом, в пределах сделанных ограничений для величины кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону с декрементом затухания соответственно $\epsilon \frac{\bar{I}_{11}}{A}$ и $2\epsilon \frac{\bar{I}_{11}}{A}$.

Затем, что при проведенных вычислениях рассматривалась случай, когда траектории вектора кинетического момента охватывали ось Ox .

§ 2. В данном параграфе исследуется движение вокруг неподвижной точки тяжелого симметричного гироскопа в слабо сопротивляющейся среде. При больших скоростях собственного вращения можно считать, что сопротивление среды возрастает пропорционально квадрату скорости /6/.

В соответствии с этим уравнения движения записываются в следующем виде:

$$A\ddot{\theta} + (C-A)\dot{\varphi}\dot{r} = mg\ell \sin \theta \cos \varphi - \epsilon \bar{I}_1 P$$

$$A\ddot{\varphi} + (A-C)\dot{r}\dot{\varphi} = -mg\ell \sin \theta \sin \varphi - \epsilon \bar{I}_1 \dot{\theta}$$

— $\epsilon \bar{I}_1 r^2$

$$\psi = \frac{P \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}$$

$$\dot{\theta} = P \cos \varphi - q \sin \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \tau - \frac{P \sin \varphi \cos \theta + q \cos \varphi \cos \theta}{\sin \theta}$$

(2.1)

где mg — сила тяжести, ℓ — расстояние от неподвижной точки до центра тяжести.

Для решения задачи также применяется метод усреднения /2/. В литературе известны задачи динамики твердого тела, в которых проводилось усреднение по движению Эйлера (см. /5/, /7/). В первом параграфе также проводилось усреднение по движению Эйлера.

Усреднение по движению Лагранжа, которое учитывает влияние гравитационного поля на движение, проводится, поскольку известно, впервые.

Третье уравнение системы (2.1) интегрируется и дает

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{1 + \epsilon n_3 r_0 t}, \quad n_3 = \frac{\bar{I}_3}{C} \quad (2.2)$$

При помощи известных выражений первых интегралов незамкнутой системы

$$G_x = A(P \sin \theta \sin \varphi + q \sin \theta \cos \varphi) + C r \cos \theta$$

$$H = \frac{1}{2} [A(P^2 + q^2) + C r^2] + mg\ell \cos \theta \quad (2.3)$$

и системы (I.1) производные \dot{G}_x , \dot{H} можно выразить через θ , φ , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ и $\cos \theta$.

$$\begin{aligned}\dot{G}_z &= -\varepsilon \left[\frac{I_1}{A} G_z + \left(I_3 \tau - I_1 \frac{C}{A} \right) \tau \cos \theta \right] \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left[2 \frac{I_1}{A} H + \left(I_3 \tau - I_1 \frac{C}{A} \right) \tau^2 - 2 \frac{I_1}{A} m g l \cos \theta \right]\end{aligned}\quad (2.4)$$

Функции G_z, H являются медленно меняющимися переменными. Поэтому при усреднении в первом приближении следует подставить в (2.4) функцию $u = \cos \theta$ из невозмущенного движения Лагранг-Пуассона /8/:

$$u = u_1 - (u_1 - u_2) \sin^2(\omega t + \beta) \quad (2.5)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{m g l (u_2 - u_1)}{A}}$, β – произвольная постоянная.

u_1, u_2, u_3 – вещественные корни многочлена

$$Q(u) = \frac{1}{A^2} \left[(-2mgl + 2H - C\tau^2)(1-u^2)A - (G_z - C\tau u)^2 \right]$$

Корни расположены в таких интервалах:

$$-1 < u_1 \leq u_2 \leq +1 < u_3 < +\infty$$

Кроме того,

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leq k^2 < 1) \quad (2.6)$$

При усреднении по периоду невозмущенного движения медленные переменные G_z, τ, H в (2.4) считаются постоянными. Опуская промежуточные выкладки, получим систему усредненных уравнений в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dG_z}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{I_1}{A} G_z + \left(\frac{I_3 \tau_0}{1 + \varepsilon n_3 \tau_0 t} - I_1 \frac{C}{A} \right) \frac{\tau_0}{1 + \varepsilon n_3 \tau_0 t} \cdot [u_3 - \right. \\ &\quad \left. -(u_2 - u_1) \frac{E(k)}{K(k)}] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\varepsilon \left\{ 2 \frac{I_1}{A} H + \left(I_3 \tau - \frac{C}{1 + \varepsilon n_3 \tau_0 t} - I_1 \frac{C}{A} \right) \frac{\tau_0^2}{(1 + \varepsilon n_3 \tau_0 t)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2I_1}{A} m g l \left[u_3 - (u_2 - u_1) \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} \quad (2.7)\end{aligned}$$

К уравнениям (2.7) необходимо присоединить (2.6) и известные соотношения /8/:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{m g l} - \frac{C \tau^2}{2 m g l} + \frac{C^2 \tau^2}{2 A m g l}$$

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \frac{C G_z \tau}{A m g l} - 1$$

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{H}{m g l} + \frac{C \tau^2}{2 m g l} + \frac{C^2 \tau^2}{2 A m g l} \quad (2.8)$$

Полное интегрирование системы (2.6), (2.7), (2.8) может быть проведено в ряде интересных частных случаях. Так, например, при $G_z = 0$, $\tau = 0$ движение сводится к колебанию физического маятника в слабо сопротивляющейся среде. При этом второе уравнение (2.7) принимает вид:

$$\frac{dH}{dt} = -2\varepsilon \frac{I_1}{A} \left\{ H - m g l \left[u_3 - (u_2 - u_1) \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} \quad (2.9)$$

Из (2.8): $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = \frac{H}{m g l}$

С учетом (2.6), получим

$$\frac{dk^2}{dt} = 2\varepsilon \frac{I_1}{A} k^2 \frac{E(k)}{K(k)} \quad (2.10)$$

Используя разложение полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 при малых k можно упростить правую часть уравнения (2.10), после чего оно интегрируется и дает:

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{2}{1 + C_1 \exp(-2\varepsilon n_1 t)}; \quad n_1 = \frac{L}{A}, \quad C_1 = \frac{2 - k^2}{k_0^2}$$

(2.II)

Откуда

$$H = H_0 mg \ell \exp(-2\varepsilon n_1 t) \quad (2.II)$$

Таким образом, в этом случае получена эволюция полной энергии, которая описывается формулой (2.II).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., Изд-во "Наука", 1965.
2. Волосов В.И., Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, УМН, 1962, т.17, в.6, 3-126.
3. Лавдэу Л.Д., Либниц Е.М., Теоретическая физика, т. I, М., Изд-во "Наука", 1973.
4. Градтейн И.С., Рыжик И.М., Таблица интегралов, сумм, рядов и производствений, М., Изд-во "Наука", 1971.
5. Черноуско Ф.Л., Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Вейнольда, Ж. "Вычислите. матем. и матем. физ.", 1965, т.5, № 6, 1049-1070.
6. Кошляков В.Н., О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде, ПММ, 1953, т.17, вып.2, 137-148.

7. Черноуско Ф.Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов ПММ, 1963, т.27, вып.3, 474-483.
8. Суслов Г.К., Теоретическая механика, М., -Л., Гостехиздат, 1946.