

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/225100830>

Rapid Rotations of a Satellite with a Cavity Filled with Viscous Fluid under the Action of Moments of Gravity and Light Pressure Forces

Article in *Cosmic Research* · May 2011

DOI: 10.1134/S0010952511050017

CITATIONS

5

READS

44

4 authors, including:



Leonid D Akulenko

Russian Academy of Sciences

535 PUBLICATIONS 1,134 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

217 PUBLICATIONS 224 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Alla Leonidovna

Odessa National University

19 PUBLICATIONS 33 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Numerical solution of eigenproblems [View project](#)



Homogenization in optimal control problems [View project](#)

БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТОВ СИЛ ГРАВИТАЦИИ И СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

© 2011 г. Л. Д. Акуленко¹, Я. С. Зинкевич², Д. Д. Лещенко², А. Л. Рачинская³

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

²Одесская государственная академия строительства и архитектуры

³Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

Поступила в редакцию 28.12.2009 г.

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, под действием гравитационного и светового моментов. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом считаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведен численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в гравитационном поле. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца [1]. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близким к приведенному ниже, посвящены работы [1–15].

Введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2, 3]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} . Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит

в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы y_1, y_2, y_3 образуют правую тройку [2–4]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [2]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ , как показано в [2–4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \\ &\quad + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$+ \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) -$$

$$- \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику – кинетическую энергию T , производная которой имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) \times \right.$$

$$\times (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) +$$

$$\left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \quad (1.2)$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и частотой обращения ω_0 . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{l_0^3}}. \quad (1.3)$$

Здесь l_0 – фокальный параметр орбиты, ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты, μ – гравитационная постоянная.

Проекция L_i момента приложенных сил складываются из момента сил светового давления L_i^c , момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p и из гравитационного момента L_i^g .

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен вдоль оси Oz_3 . Как показано в [2, 5], в этом случае

для момента сил светового давления, действующего на спутник, имеет место формула

$$\mathbf{L}^c = (a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k},$$

$$a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z_0'(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2}{c}. \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{e}_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s – угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} так, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку; Z_0' – расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c – скорость света; E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Здесь приведена проекция на ось Oy_1 гравитационного момента, на другие оси проекции имеют аналогичный вид и получают ротацией индексов (сдвигом)

$$L_1^g = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}),$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta,$$

$$\beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.$$

Проекция момента сил сильно вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \times$$

$$\times \left\{ \boldsymbol{\omega} \mathbf{B} + \left(a_c(\cos \varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} \mathbf{C} + \frac{3\mu}{R^3} (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \right) \boldsymbol{\alpha} \right\} (i = 1, 2, 3), \quad (1.6)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_3 [A_2 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\gamma_{31} \alpha_{33} - \alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2) + \alpha_{32} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) - r \gamma_{31} (A_1 + A_3)] \\ A_3 [A_1 \alpha^* (p_{\alpha 1} (\alpha_{11} \beta_2 - \alpha_{33} \gamma_{32} - \alpha_{21} \beta_1) + \alpha_{31} \gamma_{33} p_{\alpha 2}) + r \gamma_{32} (A_2 + A_3)] \\ q \gamma_{32} A_2 (A_1 - A_2 - A_3) + p \gamma_{31} A_1 (A_1 - A_2 + A_3) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) \{-\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2})\} \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \{-\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2})\} \\ (A_2 - A_1) \{(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2})\} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \gamma_{31}\gamma_{33}\alpha_{33} + \beta_{\alpha 1}\gamma_{33} + \beta_{\alpha 2}\gamma_{32} \\ \gamma_{32}\gamma_{33}\alpha_{33} + \beta_{\alpha 3}\gamma_{33} + \beta_{\alpha 2}\gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2)\alpha_{33} + \beta_{\alpha 3}\gamma_{32} + \beta_{\alpha 1}\gamma_{31} \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2\alpha_{32} + \gamma_{32}\gamma_{33}\alpha_{33} - \gamma_{32}\beta_3 \\ \gamma_{33}^2\alpha_{31} + \gamma_{31}\gamma_{33}\alpha_{33} - \gamma_{31}\beta_3 \\ \gamma_{33}[\gamma_{32}\alpha_{31} + \gamma_{31}\alpha_{32}] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} \left[\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2) \right] \\ \gamma_{32} \left[\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2) \right] \\ \gamma_{33} \left[\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2) \right] \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2i} + \beta_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$p_{\alpha 1} = p\alpha_{31} + q\alpha_{32}, \quad p_{\alpha 2} = p\alpha_{32} - q\alpha_{31},$$

$$\beta_{\alpha 1} = -\alpha_{22}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \quad \beta_{\alpha 2} = -\alpha_{23}\beta_1 + \alpha_{13}\beta_2,$$

$$\beta_{\alpha 3} = -\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{11}\beta_2,$$

$$B_1 = \left[\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1},$$

B_2, B_3 имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).

Здесь α_{ij} – направляющие косинусы между системами координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$), p, q, r – проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) вектора абсолютной угловой скорости ω спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Величина \tilde{P} – тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил, обусловленный вязкой жидкостью, в квазистатическом приближении [1]. Для простоты в уравнениях (1.6) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$; компоненты которого имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символы Кронекера (такой вид тензор \tilde{P} имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$), форма полости сферическая, тогда [1]

$$\tilde{P} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = 8\pi\rho b_0^7/525\vartheta. \quad (1.7)$$

Здесь ρ, ϑ – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, b_0 – радиус полости.

Полагаем [2], что в силу симметрии соответствующая функция имеет вид $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$. Рассмотрим второй член разложения, когда $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon$.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c(\cos \varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (1.6) имеет порядок ε^3 . Гравитационная постоянная μ пропорциональна квадрату угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\mu \sim \varepsilon^2$. Значит с точностью до величин второго порядка малости ($P \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left\{ p \left[q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) \right] \alpha_{i1} + q \left[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) \right] \alpha_{i2} + r \left[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2) \times (A_2 - A_1 + A_3) \right] \alpha_{i3} \right\} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.8)$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПРОЦЕДУРА МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Для рассматриваемой задачи решения системы (1.1)–(1.3) при малом ε на промежутке времени

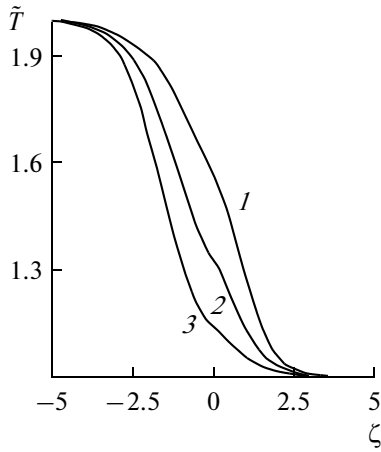


Рис. 1

$t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения [3, 16, 17]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$ а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (2.1)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений движения (1.1), (1.2) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [3] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} \times \\ \times H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) - \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} \times \\ \times H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*, \quad (2.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4PT^2 (A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 S^2(k)} \times \\ \times \left\{ A_2 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2 V(k) - W(k)] + \right. \\ \left. + A_1 (A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \right. \\ \left. + A_3 (A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\},$$

$$S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \quad V(k) = 1 + \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$H = \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при } 2TA_2 - G^2 > 0,$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\} \quad \text{при } 2TA_2 - G^2 < 0,$$

$$a^2 = \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3 A_1 - A_2}{A_1 A_2 - A_3}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3},$$

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 +$$

$$+ 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [18]. Согласно первому уравнению (2.2) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 . Дифференцируя выражение для k^2 (2.1) и используя уравнения для кинетической энергии (2.2), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [1, 11]

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\ \chi = \frac{3A_2 [(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}, \quad (2.3)$$

$$\xi = (t - t_*)/N,$$

$$N = \frac{3A_1^2 A_2^2 A_3^2}{PG_0^2 (A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]} \sim \varepsilon^{-2}.$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе

для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (2.3) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере постоянного радиуса G_0 .

3. АНАЛИЗ УСРЕДНЕННОГО СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА

Из уравнений движения (2.2) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси A_3 (неустойчивое движение) до вращения вокруг оси A_1 (устойчивое движение). Изменения углов λ, δ зависят как от действия внешних моментов сил светового давле-

ния и гравитационных сил, так и от действия внутреннего момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (2.2) для T , положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (2.2) и уравнения (2.3). Проведем обезразмеривание в уравнении изменения кинетической энергии, считая характерными величинами задачи N (2.3) и момент инерции A_1 . Имеем

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = - \frac{2(\tilde{T})^2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1 [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3] [A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \left\{ A_2 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2 V(k) - W(k)] + \right. \tag{3.1}$$

$$\left. + A_1 (A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + A_3 (A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\},$$

где $\tilde{T} = \frac{2A_1 T}{G_0^2}$, ξ определяется согласно (2.3). Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т.е. для случая $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8, A_2 = 5, 6, 7, A_3 = 4; k^2(0) = 0.99999, G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T = \frac{G_0^2}{2} \frac{A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0)}{A_1 (A_2 - A_3) + A_3 (A_1 - A_2)k^2(0)}. \tag{3.2}$$

В безразмерном виде имеем

$$\tilde{T} = \frac{A_1 (A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1 (A_2 - A_3) + A_3 (A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

Рассмотрен также случай $\xi < 0$, что соответствует случаю $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Уравнение (2.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = \frac{2(\tilde{T})^2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1)}{A_3 [A_2 (A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3] S^2(k)} \times$$

$$\times \left\{ A_2 (A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) [k^2 V(k) - W(k)] + \right.$$

$$+ A_1 (A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] +$$

$$\left. + A_3 (A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\}$$

с начальным условием

$$\tilde{T} = \frac{A_3 (A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1 (A_2 - A_3) + A_3 (A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений моментов инерции $A_1 = 4, A_2 = 5, 6, 7, A_3 = 8$. Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 1.

Такой вид имеют графики изменения кинетической энергии в случае вращения спутника с полостью под действием только гравитационного момента [14] или только под действием светового давления [15], так как на эволюцию величины T оказывает влияние только момент сил вязкой жидкости, целиком заполняющей полость.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$. Значение $\tilde{T} = 2$ соответствует вращению около оси A_3 (неустойчивое движение), $\tilde{T} = 1$ – вращению около оси A_1 (устойчивое движение). При $\xi = 0$ (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба). Аналогичные графики изменения кинетической энергии могут быть получены пересчетом из формулы (2.1) для безразмерной кинетической энергии

$$\tilde{T} = \frac{A_1 S(k)}{A_1 (A_2 - A_3) + k^2 A_3 (A_1 - A_2)}.$$

Отсюда видно, что при $k^2 \rightarrow 0$ имеем $\tilde{T} \rightarrow 1$. Аналогично, для случая вращения около оси A_3 можно показать, что $\tilde{T} \rightarrow 2$.

4. ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (2.2). Как известно $R = l_0/(1 + e \cos v)$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \mu^{1/3} (1 - e^2) \omega_0^{-2/3}$. Тогда первые два уравнения (2.2) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{\omega_0^{4/3} (1 + e \cos v)^2}{2G(1 - e^2)^2} \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \sin \delta \sin 2(\lambda - v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(1 + e \cos v) \omega_0^{2/3}}{1 - e^2} \beta_2 \beta_3 N^* \right], \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\omega_0^{4/3} (1 + e \cos v)^2}{G(1 - e^2)^2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{a_1 R_0^2}{\mu^{2/3}} H \cos \delta \cos^2(\lambda - v) - \frac{\omega_0^{2/3} (1 + e \cos v)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^* \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (2.2), уравнений для истинной аномалии (1.3) и k^2 (2.3), уравнений системы (4.1). Характерными параметрами задачи являются G_0 — кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 — величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = G/G_0$, $\tilde{A}_i = A_i \Omega_0 / G_0$, $\tilde{L}_i = L_i / (G_0 \Omega_0)$, $\tilde{T} = T / (G_0 \Omega_0)$, $\varepsilon^2 \tilde{P} = P \Omega_0^2 / G_0$.

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \quad (4.2)$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания имеем систему уравнений движения вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos v)^2}{2\tilde{G}(1 - e^2)^2} \times \\ &\quad \times \left(\Gamma \tilde{H} \sin \delta \sin 2(\lambda - v) + \frac{3(1 + e \cos v)}{2(1 - e^2)} \beta_2 \beta_3 \tilde{N}^* \right), \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos v)^2}{\tilde{G}(1 - e^2)^2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{3(1 + e \cos v)}{2(1 - e^2) \sin \delta} \beta_1 \beta_3 \tilde{N}^* - \Gamma \tilde{H} \cos \delta \cos^2(\lambda - v) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{N}} \times \\ &\quad \times \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \\ \tilde{N} &= \frac{3\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2}{\tilde{P}(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)[\tilde{A}_2(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) + 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_3]}, \\ \tilde{H} &= \frac{1}{2} \left[3\tilde{a}^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0, \\ \tilde{H} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{a}^2}{k^2} [k^2 - W(k)] - 1 \right\} \quad \text{при } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0, \\ \tilde{a}^2 &= \frac{\tilde{\sigma} + \tilde{h}}{1 + \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}, \quad \tilde{h} = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2 \tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}, \\ \tilde{N}^* &= \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + \\ &\quad + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1 \tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right], \\ \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{4\tilde{P}\tilde{T}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}{3\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2 [\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2]^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \tilde{A}_2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) [k^2 V(k) - W(k)] + \right. \\ &\quad + \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_3 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) [(k^2 - 2)W(k) + k^2] + \\ &\quad \left. + \tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) [(1 - 2k^2)W(k) + k^2] \right\}. \end{aligned}$$

Первые три уравнения для λ , δ и v системы (4.3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(v, \delta, \lambda), \\ \frac{dv}{d\tilde{t}} &= \varepsilon \frac{(1 + e \cos v)^2}{h(e)}, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь Δ , Λ — коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (4.3), δ , λ — медленные переменные, а v — полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [17]

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, v)}{(1 + e \cos v)^2} dv, \\ \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, v)}{(1 + e \cos v)^2} dv. \end{aligned}$$

После усреднения получим

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \left(\frac{3\tilde{N}^*}{h(e)} - \frac{2\Gamma\tilde{H}}{(1-e^2)^{1/2}} \right) \frac{\cos\delta}{4\tilde{G}}.$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад. Рассматривались орбиты с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита. Для безразмерного времени τ имеем следующую картину изменения угла ориентации вектора кинетического момента, представленную на рис. 2. Кривая 1 соответствует круговой орбите, а кривая 2 – сильно эллиптической.

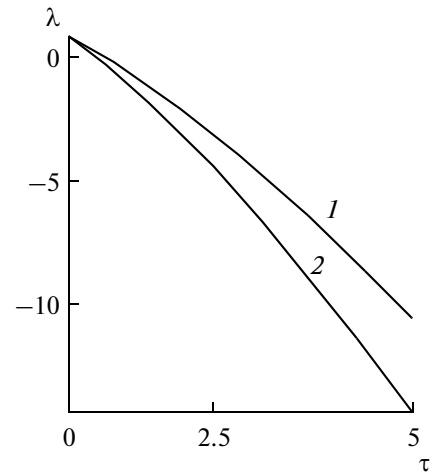


Рис. 2

На рис. 3 представлены графики изменения этого же угла при различных значениях моментов инерции спутника. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 3 видно, что характер изменения угла λ при близких значениях моментов инерции \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 носит почти линейный характер. С уменьшением значения момента инерции \tilde{A}_2 кривизна функции увеличивается, при этом функция перестает быть монотонной.

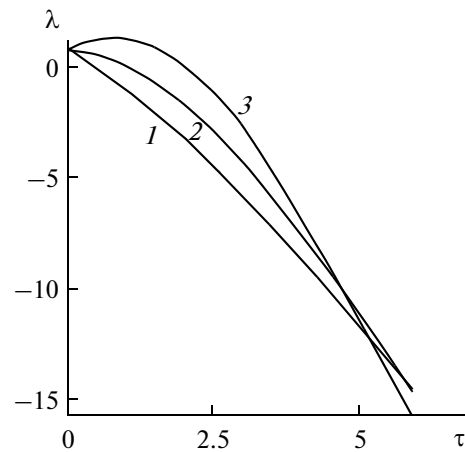


Рис. 3

Характер изменения угла λ имеет такой же вид, как и в задаче о движении спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью в гравитационном поле [14].

В случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления [15] характер изменения угла λ носит почти линейный характер и с увеличением значения безразмерного момента инерции \tilde{A}_2 функция увеличивается быстрее.

Можно также провести анализ изменения характера функции $\lambda(\tau)$ при различных значениях безразмерной величины \tilde{P} . Кривые 1, 2, 3 на рис. 4 соответствуют различным значениям $\tilde{P}(0) = 10, 100, 1000$. Видно, что характер изменения угла имеет почти линейный вид.

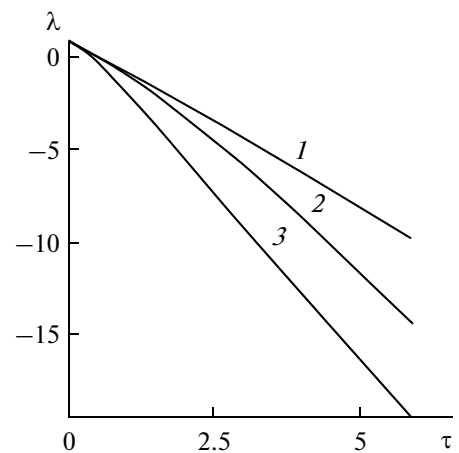


Рис. 4

Согласно численному расчету показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил светового давления в гравитационном поле вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до безразмерного значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси A_1 . Такое же направление движения конца вектора

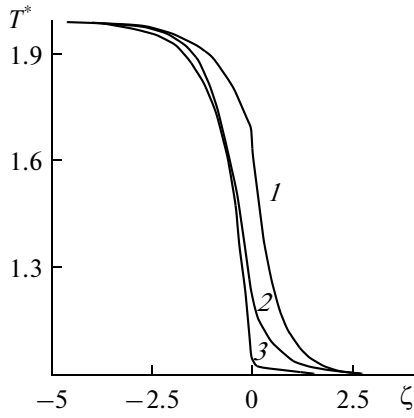


Рис. 5

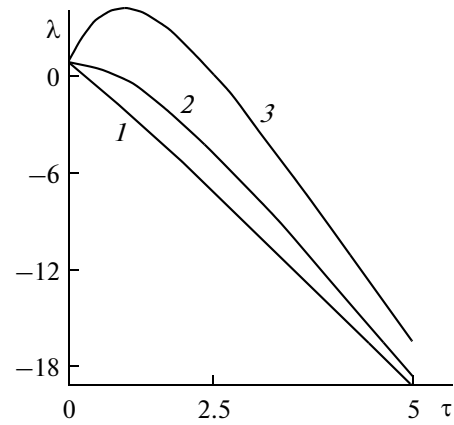


Рис. 6

кинетического момента характерно для задач о движении спутника с полостью под действием момента сил гравитационного притяжения [14] и момента сил светового давления [15].

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКОГО К ОСЕВОМУ

Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1 . В этом случае правую часть уравнения (2.2) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [18]. Тогда уравнение (2.2) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$\begin{aligned} k^2 &= C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi > 0, \\ k^2 &= C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi < 0, \\ C_1 &= \text{const}, \quad 0 \leq C_1 \leq 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Изменение кинетической энергии можно качественно грубо получить, следуя работе [1], простым пересчетом из соотношения (2.1), используя найденное решение для малых k^2 (5.1). Имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{2A_1^2(A_2 - A_3)} \times \\ &\times C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \text{ при } \xi > 0, \\ T &= \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{2A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \\ &\text{при } \xi < 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (5.2) примут вид

$$\begin{aligned} T^* &= 1 + \frac{(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \\ &\text{при } \xi > 0, \\ T^* &= \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \\ &\text{при } \xi < 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Постоянная интегрирования C_1 находится грубо из условия равенства кинетической энергии по формулам (5.3) при $\xi = 0$. Имеем

$$C_1 = \frac{A_1 A_3 (A_2 - A_3) (A_1 - A_2)}{A_3^2 (A_1 - A_2)^2 + A_1^2 (A_2 - A_3)^2}. \quad (5.4)$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии T^* в случае малых k^2 имеют вид, представленный на рис. 5. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$, при постоянных значениях $A_1 = 8, A_3 = 4$ для $\xi > 0$ и $A_1 = 4, A_3 = 8$ для $\xi < 0$. Как видно из рисунка, характер функции $T^* = T^*(\xi)$ тот же, что и для $0 \leq k^2 \leq 1$, а также асимптотические значения T^* на положительных и отрицательных безразмерных временах сохраняют свои величины.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции по безразмерному времени τ

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2 \exp[-\rho\tau], \\ \rho &= \frac{\tilde{P}}{\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_2^2 \tilde{A}_3^2} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) + \tilde{A}_1 \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_2 \tilde{A}_3]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение изменения угла τ (4.4) в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (5.5). В правую часть уравнения входит непостоянная величина \tilde{H} . При $2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0$

функция $\tilde{H}(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\tilde{A}_3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-\rho\tau] - 1 \right\}.$$

Видно, что при $\tau \rightarrow \infty$ величина $\tilde{H} \rightarrow -0.5$.

Асимптотическое выражение кинетической энергии можно представить в виде функции по безразмерному времени τ

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{G}^2}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{G}^2(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)}{2\tilde{A}_1^2(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)} k_0^2 \exp[-\rho\tau].$$

Подставляем полученное выражение \tilde{H} и \tilde{T} в уравнение изменения угла λ , интегрируем и находим

$$\lambda = \frac{\cos \delta}{4\tilde{G}_0(1-e^2)^{1/2}} \left\{ \frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k_0^2}{\tilde{A}_1(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)\rho} \times \left(\Gamma\tilde{A}_3 - \frac{3(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3)(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{(1-e^2)} \right) (\exp[-\rho\tau] - 1) + \left(\frac{3}{(1-e^2)}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1) + \Gamma \right) \tau \right\} + \lambda_0,$$

где константы λ_0, k_0^2 определяются из начальных условий. График данной функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $k^2 \ll 1$ имеет вид, представленный на рис. 6.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 7, 6, 5$, при постоянных значениях $\tilde{A}_1 = 8, \tilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785$ рад. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda = \lambda(\tau)$ при произвольных k_2 .

Изменение угла λ при малых k_2 имеет приблизительно тот же вид, что и в случае движения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в гравитационном поле [14]. При этом в нашей задаче убывание угла ориентации происходит несколько быстрее.

При движении спутника с вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления [15] угол λ возрастает, как и в случае движения спутника под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [8].

6. ДВИЖЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$), моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству

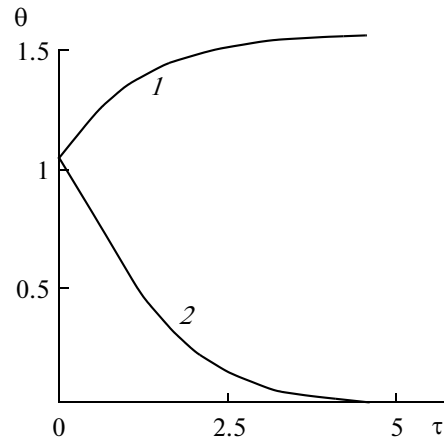


Рис. 7

$A_1 > A_3$. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \quad (6.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

Проекции момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) при $A_1 = A_2$ имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2} (A_1 - A_3) \times \left\{ pr^2 A_3 \alpha_{i1} + qr^2 A_3 \alpha_{i2} - r A_1 [p^2 + q^2] \alpha_{i3} \right\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для решения задачи будем применять метод усреднения [15]. В случае невозмущенного движения Эйлера–Пуансо, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ, ψ являются линейными функциями, а угол θ — величина постоянная [19]. Для возмущенного движения углы φ, ψ являются быстрыми переменными, а угол θ — медленной. Проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных $G, \delta, \lambda, \theta$ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ .

После усреднения по быстрым переменным φ, ψ имеем уравнения в безразмерных величинах

$$\frac{dG^*}{dt^*} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt^*} = \varepsilon^2 \Gamma_1 (A_1^* - A_3^*) \sin \theta \cos \theta, \quad (6.3)$$

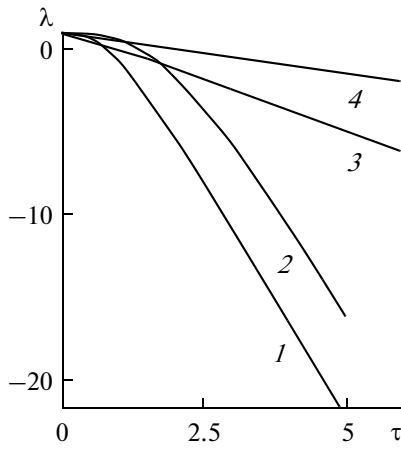


Рис. 8

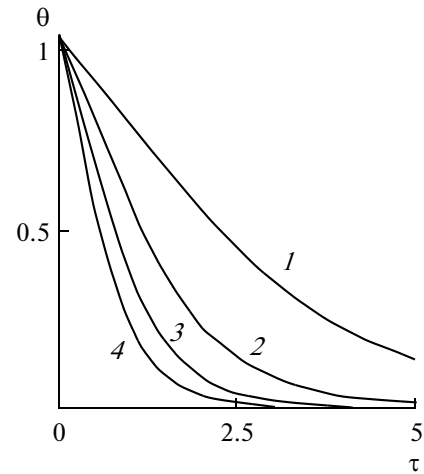


Рис. 9

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt^*} &= -\varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos v)^2}{2(1 - e^2)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \times \\ &\times \sin \delta \sin 2(\lambda - v) \left\{ \Gamma - \frac{3(1 + e \cos v)}{G^*(1 - e^2)} (A_1^* - A_3^*) \right\}, \\ \frac{d\lambda}{dt^*} &= \varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \times \\ &\times \cos \delta \cos^2(\lambda - v) \left\{ \frac{3(1 + e \cos v)}{G^*(1 - e^2)} (A_1^* - A_3^*) - \Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Здесь безразмерные величины определяются равенствами $t^* = \Omega_0 t$, $A_i^* = A_i \Omega_0 / G_0$, $\varepsilon^2 v^* = v / \Omega_0 a^2$, где Ω_0 – угловая скорость движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени.

Введены обозначения Γ согласно (4.1) и $\Gamma_1 = \frac{8\pi a^5 \rho G_0^3}{525 v^* A_1^3 A_3 \Omega_0^3}$, где μ – гравитационная постоянная. Назовем величину Γ_1 приведенным коэффициентом момента сил вязкой жидкости в полости.

Исследуем решение системы (6.3) при малом ε на промежутке времени $\tau = \varepsilon^2 t^*$. Из первого уравнения системы (6.3) видно, что кинетический момент есть величина постоянная. Интегрируя второе уравнение системы (6.3) для угла нутации, получим

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \exp \left[\Gamma_1 (A_1^* - A_3^*) \tau \right]. \quad (6.4)$$

График функции $\theta = \theta(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 7. Расчет проводился при начальном условии $\theta(0) = \pi/3$ рад. Кривая 1 соответствует случаю $A_1^* > A_3^*$ (спутник “сплюснутый” по оси инер-

ции A_3), а кривая 2 – $A_1^* < A_3^*$ (спутник “вытянутый” по оси инерции A_3).

Последние два уравнения (6.3) и уравнение для истинной аномалии (1.3) в безразмерном времени t могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt^*} &= \varepsilon^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt^*} = \varepsilon^2 \Lambda(v, \delta, \lambda), \\ \frac{dv}{dt^*} &= \frac{\varepsilon}{h(e)} (1 + e \cos v)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где Δ, Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (6.3). Из системы (6.4) видно, что δ, λ – медленные переменные, а v – полумедленная.

Применяя модифицированный метод усреднения [17], получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\cos \delta}{2(1 - e^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \left\{ \frac{3(A_1^* - A_3^*)}{G^*(1 - e^2)} - \Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника.

С учетом (6.4) находим аналитически закон изменения угла λ от времени t :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \alpha \tau - \frac{3\alpha}{2\beta} \ln \left| \frac{1 + \gamma \exp(\beta \tau)}{1 + \gamma} \right|, \\ \alpha &= \frac{\cos \delta}{2(1 - e^2)^{1/2}} \left\{ \frac{3(A_1^* - A_3^*)}{G^*(1 - e^2)} - \Gamma \right\}, \quad \beta = 2\Gamma_1 (A_1^* - A_3^*), \\ \gamma &= \operatorname{tg}^2 \theta_0. \end{aligned}$$

График изменения функции $\lambda = \lambda(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 8 для начального значения угла нутации $\theta(0) = \pi/3$ рад и при начальном значении угла $\lambda = \pi/4$ рад. Кривые построены при различных значениях параметра $\beta = -2, -1, 1, 2$. Из рисунка видно, что при отрицательных значениях параметра β на малых временах функция $\lambda = \lambda(\tau)$ сначала возрастает, а затем убывает. При положительных значениях параметра β функция $\lambda = \lambda(\tau)$ является убывающей. При временах $\tau > 2.5$ графики всех функций почти линейны.

В нашей задаче характер убывания λ совпадает с полученным в [14, 15] при исследовании движения спутника с вязкой жидкостью в полости под действием гравитационного или светового моментов. При этом угол ориентации вектора кинетического момента \mathbf{G} в рассматриваемом нами случае убывает быстрее.

Для значений параметра $\beta = -0.5, -1, -1.5, -2$ построены графики изменения угла нутации $\theta = \theta(\tau)$ (рис. 9). Видно, что чем меньше параметр β , тем быстрее угол $\theta \rightarrow 0$, т.е. чем более “вытянутое” тело по оси A_3 , тем быстрее спутник стремится к положению устойчивого вращения вокруг этой оси.

Характер изменения угла нутации θ в рассматриваемом случае, близок к изученному при вращении спутника с вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления [15].

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления вектор кинетического момента \mathbf{G} остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. Направление движения конца вектора \mathbf{G} зависит от формы спутника. В случае спутника “сплюснутого” по оси инерции A_3 конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 против хода часовой стрелки. При этом угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2$ рад. Для динамически “вытянутого” по этой же оси спутника конец вектора \mathbf{G} движется по сфере радиуса G_0 , сначала по ходу часовой стрелки, а затем против хода часовой стрелки, а угол нутации стремится к нулю.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-01-00180; 08-01-00234) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4513.2008.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
3. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып.3. С. 474 – 483.
4. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975.
5. Карьмов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.
6. Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука, 1986.
7. Сазонов В.В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. 1994. Т. 28. № 2. С. 95–107.
8. Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде // Вісник одеськ. нац. ун-ту. 2007. Т. 12. Вып. 7. Матем. і мех. С. 85–98.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращения спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 13–26.
10. Осипов В.З., Суликашвили Р.С. О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. Ин-та. Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. 1978. Т. 58. С. 175–186.
11. Смирнова Е.П. Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 33. Вып. 6. С. 980–985.
12. Сидоренко В.В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрон. вестник. 1993. Т. 27. № 2. С. 119 – 127.
13. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Космич. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 6. С. 22–30. (Cosmic Research. P. 605).
14. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 126–139.
15. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления // Механика твердого тела. 2008. Вып. 38. С. 95–110.
16. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
17. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 165–176.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука. 1973.