

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/288829964>

## Некоторые задачи эволюции вращений волчка Лагранжа под действием возмущающих моментов сил различной природы

Conference Paper · January 2013

CITATIONS

0

READS

6

4 authors, including:



**Dmytro Leshchenko**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**217** PUBLICATIONS **224** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**Leonid D Akulenko**

Russian Academy of Sciences

**535** PUBLICATIONS **1,130** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)



Homogenization in optimal control problems [View project](#)

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В. Н. КАРАЗИНА

*Механико-математический факультет*



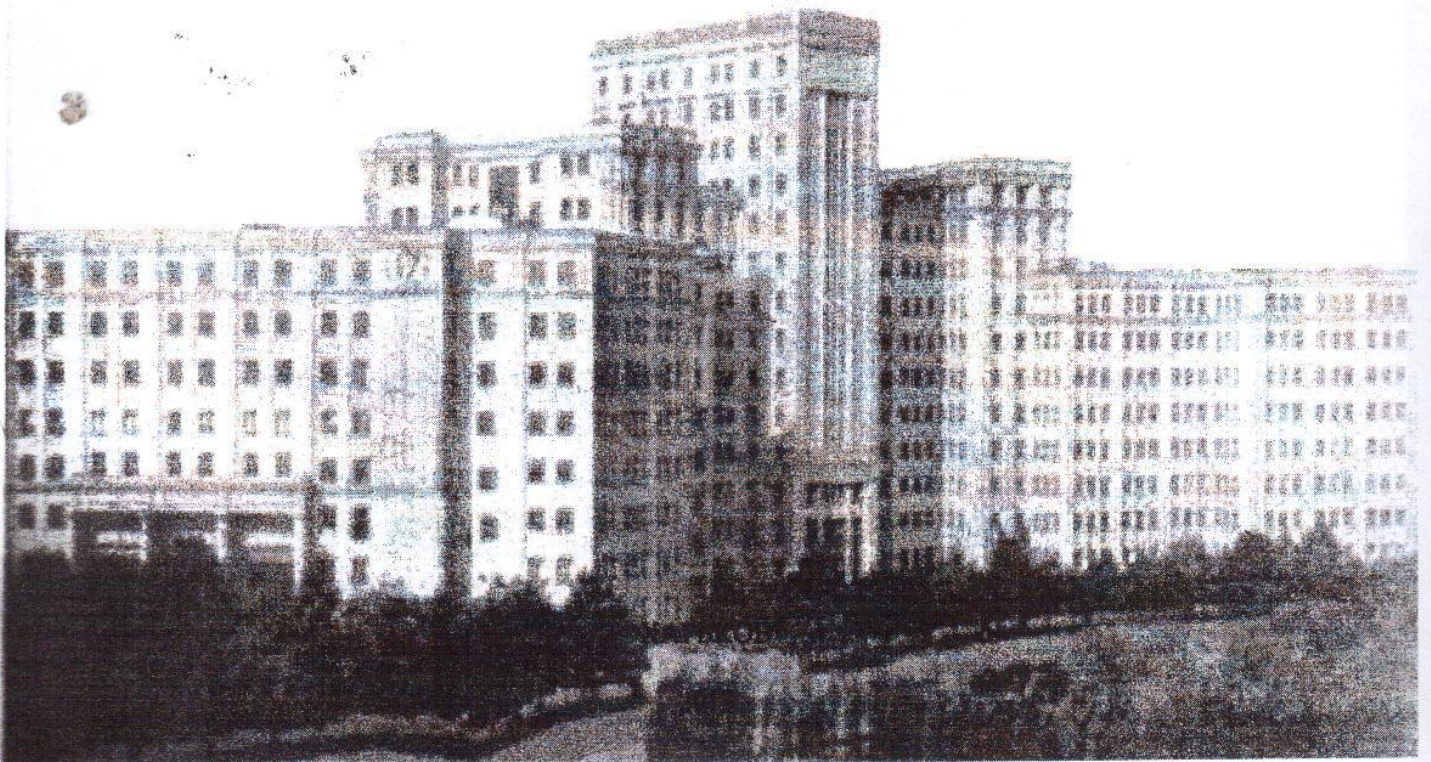
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ

*Современные проблемы математики,  
механики и информатики*

**«Тараповские чтения – 2013»**

посвященной 150-летию кафедры теоретической и прикладной механики

*(29 сентября – 4 октября 2013 г.)*



$$\begin{aligned} \eta_{0,t} - \varphi_{2,z} &= -\varphi_{2,x} \eta_{0,x} \text{ при } z = \eta_0(x, t), \quad (1) \\ -\rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + 0.5 \alpha [(\nabla \varphi_1)^2 - \rho (\nabla \varphi_2)^2] - \\ -T(1 + \alpha^2 \eta_{x,x}^2)^{-3/2} \eta_{xx} &= 0 \text{ при } z = \eta(x, t), \\ \varphi_{2,z} + \eta_0 + 0.5 \alpha (\nabla \varphi_2)^2 - T_0 (1 + \alpha^2 \eta_{0,x}^2)^{-3/2} \eta_{0,xx} &= 0, \\ \text{при } z = h_2 \\ \varphi_{1,z} &= 0 \text{ при } z = -h_1. \end{aligned}$$

Для розв'язання задачі (1) використовувався метод багатомасштабних розвинень до третього наближення, були знайдені та проаналізовані розв'язки першого та другого наближень, отримані та проаналізовані еволюційні рівняння обвідних на вільній поверхні та на вільній поверхні [1-3].

Енергію, яку переносять внутрішня та поверхнева хвилі в першому наближенні, досліджено згідно [4]. Енергія, яку переносять за період  $\tau$  двовимірні прогресивні хвилі через площину  $x = \text{const}$  на поверхні контакту та на вільній поверхні, визначається так

$$E_{\text{вн}} = -\frac{\rho}{\tau} \int_1^{1+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz,$$

$$E_{\text{пов}} = -\frac{1}{\tau} \int_1^{1+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz,$$

де  $E_{\text{вн}}$  – енергія, яку переносить внутрішня хвиля,  $E_{\text{пов}}$  – енергія, яку переносить поверхнева хвиля. На рис. 1 представлено залежність енергії, яку переносить внутрішня хвиля від товщини нижнього шару при різних хвильових числах

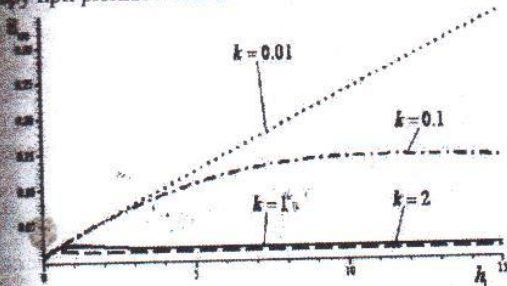


Рис. 1. Залежність  $E_{\text{вн}}$  від  $h_1$ .

Виявлено, що внесок другого наближення в основну енергію системи складає 3% від загальної енергії хвильового руху, що можна пояснити тим, що розв'язки другого наближення входять в загальні розвинення для потенціалів та відхилень поверхні контакту та вільної поверхні [1, 3] з коефіцієнтом нелінійності  $\alpha$ , який є достатньо малим.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Avramenko O.V., Naradovyy V.V., Selezov I.T. Multyscale modelling of the wave interaction in two-layer fluid with free surface // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – в. 7, N2. – Р. 2-9.
2. Avramenko O., Naradovyy V. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom // Contemporary problems of mathematics,

mechanics and computing sciences. – Kharkiv, 2012. – V. 1.

3. Selezov I.T., Avramenko O.V., Gurtovyy Yu.V., Naradovyy V.V. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface // J. Math. Sci. – 2010. – v.168, N4. – P. 590 – 602.

4. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч.3: Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.

### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩЕНИЙ ВОЛТЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ СИЛ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Акуленко<sup>1</sup> Л. Д., Козаченко<sup>2</sup> Т. А., Лещенко<sup>2</sup> Д. Д.,  
Рачинская<sup>3</sup> А. Л.

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

<sup>3</sup>Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Украина

Вращения твердого тела относительно неподвижной точки могут быть достаточно строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является опорным. Исследование моделей проводится путем учета определенных возмущающих факторов [1-5]. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, гироскопии, технологии.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела близкое к случаю Лагранжа под действием возмущающего момента сил. Уравнения движения имеют вид:

$$A\dot{p} + (C - A)qr = mgl \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1,$$

$$\dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta,$$

$$A\dot{q} + (A - C)pr = -mgl \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2,$$

$$C\dot{r} = \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, 3), \quad \tau = \varepsilon t$$

$$\dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины  $M_i (i = 1, 2, 3)$  – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $t$  – время);  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера;  $A$  – экваториальный,  $C$  – осевой момент инерции тела относительно точки  $O$ ;  $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $l$  – расстояние от неподвижной точки  $O$  до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом  $\varepsilon$

на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$ , с помощью метода усреднения.

Для решения поставленной задачи применяется методика, разработанная Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько [1]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени  $\tau$  и допускающих усреднение по углу нутации  $\theta$ . Усредненная система уравнений примет вид:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  — вещественные корни кубического многочлена [6]

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2],$$

$$-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty,$$

$G_z$  — проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  — полная энергия тела.

Рассмотрим возмущенное движение близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r^2, \quad (3)$$

$$a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t$$

где  $a(\tau), b(\tau)$  — интегрируемые функции, зависящие от свойств среды.

Рассмотрим случаи, когда  $a(\tau), b(\tau)$  имеют вид:

$$a) \quad a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \quad (4)$$

$$a_0, a_1, b_0, b_1 - \text{const};$$

$$б) \quad a(\tau) = a_0 + \Delta a_1 e^{-\sigma\tau}, \quad b(\tau) = b_0 + \Delta b_1 e^{-\sigma\tau}, \quad (5)$$

$$a_0, \Delta a_1, b_0, \Delta b_1, \sigma - \text{const}.$$

Усредненная система (2) с учетом условий (3–5) проинтегрирована численно и построены графики решения при разных начальных условиях и параметрах задачи.

При сравнении полученных результатов можно отметить, что при определенных начальных условиях в случае (4) проекция вектора кинетического момента  $G_z$  и  $r$  быстрее убывают к нулю, чем в случае (5). Полная энергия тела монотонно убывает. Величины  $u_1$  и  $u_2$  стремятся к значению  $-1$ , переменная  $u_3$  стремится к единице. Под действием возмущающего момента (3) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [1,5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. // Прикл. матем. мех. — 1979. — т.43, №5. — С. 771–778.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие

к регулярной. // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1986. — №5. — С.3–10.

3. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1987. — №6. — С.8–17.

4. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. // Прикл. матем. мех. — 1990. — т.54, №6. — С.951–957.

5. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.А., Рачинская А.Л. Вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов. // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2011. — т. 16, Вип. 16., Фіз. - мат. науки. — С. 152–157.

6. Суслев Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946 — 655с.

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ НА СТРУННОМ ПОДВЕСЕ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ДВУХСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

\*Антоньева Н.В., Кононов Ю.Н.

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

Задача о движении подвешенного на струне твердого тела с полостями, содержащими жидкость, является дальнейшим обобщением задачи с движением твердого тела с жидкостью вокруг неподвижной точки и представляет большой теоретический и практический интерес.

Струнный подвес используется на практике при конструировании различного рода устройств быстрого вращения телами, в том числе заполненными жидкостью.

Рассмотрена задача об устойчивости равномерного вращения на струне волчка Лагранжа с цилиндрической полостью, заполненной двумя идеальными несмешивающимися жидкостями разной плотности. В предположении, что внутренняя поверхность двухслойной жидкости достаточно большой величине угловой скорости вращения близка к цилиндрической, выведено частотное уравнение колебаний на струне волчка Лагранжа с двухслойной идеальной жидкостью. Получены и исследованы необходимые условия устойчивости равномерного вращения для массивного твердого тела и малого количества жидкости. На основании проведенных исследований показано принципиально различное поведение эволюции устойчивости тривиального вращения волчка и тела с жидкостью на струне, в зависимости от соотношения моментов инерции, угловой скорости и плотностей жидкости. Данная работа обобщает рассмотренную в [1–3] задачу на струнный подвес.