УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

***Я.С. Зинкевич*[1], *Д.Д. Лещенко*[1], *А.Л. Рачинская*[2]**

[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры (Украина)
[2]Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова (Украина)

leshchenko_d@ukr.net

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется подвижной точечной массой, соединенной демпфером с корпусом. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а его масса лежит на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Ключевые слова: оптимальное торможение вращений, твердое тело, подвижная масса, сопротивляющаяся среда.

На основе подхода [1, 2] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [1–3]:

$$A_1\dot{p}+(A_3-A_1)qr=M_p+FG^2qr+Dr^4p-\chi A_1p,$$
$$A_1\dot{q}+(A_1-A_3)pr=M_q-FG^2pr+Dr^4q-\chi A_1q,$$
$$A_3\dot{r}=M_r-A_1A_3^{-1}Dr^3(p^2+q^2)-\chi A_3r. \qquad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J=\operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, M_p, M_q, M_r – проекции вектора управляющего момента сил $\mathbf{M}$; $\mathbf{G}=J\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент тела. Считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту $\mathbf{M}^r=-\chi J\boldsymbol{\omega}$, где χ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил $\mathbf{M}$ ограничены сферой [2]

$$\mathbf{M}^u=b\mathbf{u},\quad |\mathbf{u}|\le 1;\quad b=b(t,\mathbf{G}),$$
$$0<b_*\le b<b^*<\infty, \qquad (2)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, $\mathbf{G}$ согласно условиям (2).

Введенные в (1) обозначения F, D выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F=m\rho^2\Omega^{-2}A_3A_1^{-3},$$
$$D=m\rho^2\lambda\Omega^{-4}A_3^3(A_1-A_3)A_1^{-4}, \qquad (3)$$

где m – масса подвижной точки, ρ – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления. Постоянные $\Omega^2=c/m$, $\lambda=\delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость (коэффициент упругости), δ – коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, следуя работе [1], $\Omega^2\gg\lambda\omega\gg\omega^2$.

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(T_0)=\boldsymbol{\omega}^0,\quad \boldsymbol{\omega}(T_0)=0,\quad T\to\min_{\mathbf{u}},\quad |\mathbf{u}|\le 1. \qquad (4)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u=u(t,\boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t,t_0,\boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстродействия $T=T(t_0,\boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W=T(t,\boldsymbol{\omega})-t$.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [2]:

$$M_p=-b\frac{A_1p}{G},\quad M_q=-b\frac{A_1q}{G},\quad M_r=-b\frac{A_3r}{G},$$
$$b=b(t,G),\ 0<b_1\le b\le b_2<\infty. \qquad (5)$$

Домножим первое уравнение (1) на A_1p, второе – на A_1q, третье – на A_3r и сложим. Получим скалярное уравнение вида

$$\dot{G}=-b(t,G)-\chi G,\quad G(t_0)=G^0,\quad G(t,t_0,G^0)=0,$$
$$T=T(t_0,G^0),\quad W(t,G)=T(t,G)-t. \qquad (6)$$

При $b=\text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (6) записывается следующим образом:

$$G(t) = \frac{1}{\chi}[(G^0\chi + b)\exp(-\chi t) - b],$$

$$T = \frac{1}{\chi}\ln\left(G^0\frac{\chi}{b} + 1\right),\ t_0 = 0. \qquad (7)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r:

$$\dot{r} = -r[bG^{-1} + \chi + A_1^{-1}A_3^{-2}Dr^2(G^2 - A_3^2r^2)]. \qquad (8)$$

Вектор кинетического момента **G** при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G\cos\theta$, где θ – сферический угол. Уравнение (8) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = A_1^{-1}A_3^{-4}D\chi^{-4}[(G^0\chi + b)\exp(-\chi t) - b]^4 \times$$

$$\times\cos^3\theta\sin\theta,\quad \theta(0) = \theta^0. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) записывается следующим образом:

$$|\mathrm{tg}\,\theta|\exp(tg^2\theta) = |tg\theta^{\circ}|\exp(\mathrm{tg}^2\theta^0)\exp(2K(t)),$$

$$K(t) = A_1^{-1}A_3^{-4}D\chi^{-4}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}f(4t) - \frac{4}{3}f(3t) + 3f(2t) - 4f(t) + b^4t\right],$$

$$f(\beta t) = \chi^{-1}b^{4-\beta}(G^0\chi + b)^{\beta}\times$$

$$\times\left[1 - \exp(-\beta\chi t)\right],\ \beta = 1,2,3,4.$$

Проведен анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Численный расчет показал, что характер поведения обезразмеренной функции $\theta(\tau), \tau = \chi t$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения сферического угла для твердого тела с подвижными внутренними массами [1].

Основные результаты работы получены вместе с Л.Д. Акуленко.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. №4. С. 33–44.

2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368с.

3. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.

4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №2. С. 56–60.

5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. №2. С. 115–122.

OPTIMAL ROTATION DECELERATION OF A SYMMETRIC BODY WITH MOVABLE MASS IN A RESISTANT MEDIUM

Ya.S. Zinkevich, D.D. Leshchenko, A.L. Rachinskaya

A minimum-time problem on deceleration of rotation of a rigid body is studied. The body is assumed to contain a viscous-elastic element, which is modeled as a movable point mass attached to the body via a damper. In addition, the body is subjected to a retarding torque generated by linear medium resistance forces. In an unformed state, the body is assumed to be dynamically symmetric, with the mass being located on the symmetry axis. An optimal control law for deceleration of rotation of the body is synthesized, and the corresponding time and phase trajectories are determined.

Keywords: optimal rotation deceleration, rigid body, movable mass, resistant medium.