Эволюция возмущенных вращений несимметричного гиростат

Conference Paper · August 2015

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

КАЗАНЬ • 2015

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики

СБОРНИК ДОКЛАДОВ

Казань

20 – 24 августа 2015 г.

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. С. 2311–2312.

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА

Д.Д. Лещенко[1], А.Л. Рачинская[2], Ю.С. Щетинина[2]

1 – Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина

2 – Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, г. Одесса, Украина

leshchenko_d@ukr.net

Аннотация. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведены аналитическое исследование и численный анализ. Во втором приближении метода усреднения угол отклонения вектора кинетического момента от вертикали остается постоянным. Величины кинетического момента и кинетической энергии тела монотонно убывают. Влияние момента сил вязкой жидкости в полости тела сравнительно мало по сравнению с действием моментов сил гравитации и притяжения.

Рассмотрим движение динамически несимметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления внешней среды. Тело содержит полость, целиком заполненную жидкостью большой вязкости.

Уравнения движения тела относительно центра масс записываются в форме [1]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3,\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G},\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta},\ \frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\operatorname{ctg}\delta.$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей $Oy_i\ (i = 1,2,3)$ системы координат, связанной с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$; A_i $(i = 1,2,3)$ – главные центральные моменты инерции относительно связанных осей Oz_i. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно центра масс в орбитальной системе координат Ox_i определяется углами λ и δ [1]; φ, ψ, θ – углы Эйлера.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого удовлетворяют неравенствам $A_1 > A_2 > A_3$. Предполагается, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т. е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1\omega_0 / G << 1$. Здесь G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Зависимость диссипативного момента $\mathbf{L}^r$ сил сопротивления от вектора угловой скорости вращения тела $\boldsymbol{\omega}$ принимается линейной $\mathbf{L}^r = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, где тензор $\mathbf{I}$ имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе координат Oz_i, связанной с телом [2, 3]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2: $\|\mathbf{I}\| / G_0 \sim \varepsilon^2 << 1$, где $\|\mathbf{I}\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления.

Орбита спутника предполагается круговой, поэтому плотность атмосферы можно считать постоянной во время движения. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\nu = \omega_0 t, \qquad \omega_0 = 2\pi / Q, \tag{2}$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, Q – период обращения.

Проекции гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_1^r на оси Oy_1 записываются в виде, принятом в [1–3]. Проекции момента сил L_i^p вязкой жидкости в сферической полости

тела с учетом внешних силовых факторов на оси Oy_i определяются согласно [4]. В дальнейшем при исследовании усредненной системы удобно использовать в качестве дополнительной переменной кинетическую энергию T. Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи применяется метод усреднения.

Рассмотрим вращение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции A_1. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \tag{3}$$

Проведем усреднение уравнений движения по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [1]. Получим уравнения для G, δ, λ вида

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{G}{R(k)}\left\{I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)\left[k^2 - W(k)\right] + I_{11}(A_2 - A_3)\left[1 - W(k)\right]\right\}, \tag{4}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2}{2G}\beta_2\beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2}{2G\sin\delta}\beta_1\beta_3 N^*.$$

Здесь введены обозначения:

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right], \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$R(k) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \ \beta_1 = \cos(\nu - \lambda)\cos\delta, \ \beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \ \beta_3 = \cos(\nu - \lambda)\sin\delta, \tag{5}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как кинетического момента G, так и кинетической энергии тела T. На изменение кинетической энергии тела T также оказывает влияние момент сил вязкой жидкости в полости. Эволюция углов λ, δ зависит от всех сил, действующих на тело.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (4), (5) и соотношения (2) для ν. Это система специального вида, в которой λ, δ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Для ее решения применяется модифицированный метод усреднения [5]. После усреднения получим $\dot{\lambda} = 3\omega_0^2 N^* \cos\delta / (4G)$ $\dot{\delta} = 0$. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение вектора **G** от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Численно и аналитически показано, что кинетическая энергия тела T и величина кинетического момента G монотонно убывают. Также убывает величина k^2. Изменение угла ориентации вектора кинетического момента λ зависит как от действия моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости тела.

Скорость убывания угла λ пропорциональна выражению T / G^3, которое с течением времени стремится к бесконечности. Поэтому на большем промежутке времени λ убывает более стремительно. Показано, что с уменьшением значения момента инерции A_2 кривизна функции $\lambda(t)$ увеличивается. Такое поведение отмечается также при увеличении коэффициентов сопротивления.

Основные результаты работы получены вместе с Л.Д. Акуленко.

Литература

1. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27 (3). С. 474-483.

2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5-13.

4. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5 (6). С. 1049-1070.

5. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 165-176.