

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ

Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. Д. ЛЕЩЕНКО

(Москва, Одесса)

Исследованы некоторые случаи движения свободного твердого тела, содержащего подвижную внутреннюю массу. Вначале проведен анализ пассивного движения твердого тела, несущего подвижную точечную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии квадратичного трения. В случае вязкого трения аналогичная задача исследована в [1, 2]. Затем решена задача об оптимальной по быстродействию стабилизации свободного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом вязкоупругим образом. Считается, что торможение вращений осуществляется при помощи управляющего момента, ограниченного по модулю, причем величина ограничения может быть переменной во времени. Аналогичные задачи исследования управляемого движения твердого тела относительно центра масс рассматривались, например, в работах [3–5] и др.

1. Рассматривается свободное движение твердого тела, к которому в некоторой неподвижной относительно тела точке O_1 прикреплена точечная масса m . Предполагается, что при относительном движении на точку m действует возвращающая упругая сила с коэффициентом жесткости c , а также сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости — квадратичное трение с коэффициентом μ . Тогда векторное уравнение относительного движения точки m , согласно методике работы [1], можно представить в виде

$$\lambda |\mathbf{r}'| \mathbf{r}' + \Omega^2 \mathbf{r} = -\{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + (1-m/M) [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{r}'']\} \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки O_1 , \mathbf{r}' — радиус-вектор точки m относительно O_1 , $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость тела, M — суммарная масса твердого тела и подвижной точки, штрих означает производную по времени t в связанной с телом системе координат. Уравнение (1.1) удобнее рассматривать в системе координат, связанной с телом; тогда \mathbf{r} — постоянный вектор, $\boldsymbol{\omega}$ — некоторая неизвестная пока функция времени.

Ставится задача исследовать движение системы, т. е. найти описывающие его векторы \mathbf{r} и $\boldsymbol{\omega}$ как функции времени при заданных произвольных начальных условиях. В общем случае решение задачи построить не удается. Однако если предположить коэффициенты связи λ и Ω таковыми, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершил оборот, то в этом случае движение твердого тела близко к движению Эйлера — Пуансо, а относительные колебания точки, вынужденные этим движением, будут малы. Если взять

$$\lambda = \Lambda \Omega^3, \quad \Omega \gg \omega \quad (\omega = |\boldsymbol{\omega}|),$$

то «вынужденное» движение системы (1.1) приближенно записывается в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\Omega^{-2}\mathbf{a} + \Lambda\Omega^{-3}|\mathbf{a}'|\mathbf{a}' + O(\Omega^{-4}) \\ \mathbf{a} &= \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \omega' \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Штрих, как отмечалось, означает скорость изменения в связанной с телом системе координат. Далее предполагается, что начало этой системы координат находится в точке O — центре инерции твердого тела и массы m . Тогда уравнение, определяющее искомый вектор $\omega(t)$, находится из условия постоянства момента количества движения системы относительно точки O и может быть представлено в форме [1]:

$$I_o^* \cdot \omega' + (\omega \cdot I_o^* \cdot \omega) = -(k' + \omega \times k) \quad (1.3)$$

Здесь I_o^* — тензор инерции твердого тела и массы m , находящейся в точке O_1 , относительно центра инерции O . Величину k условно можно назвать вектором момента количества движения подвижной массы m : она обращается в нуль, если внутренние движения отсутствуют, т. е. $\mathbf{r}' = 0$, $\mathbf{r} = 0$. В общем случае с учетом (1.2) вектор k приближенно равен

$$k = m[\rho \times (\omega \times r + r') + r \times (\omega \times \rho)] + O(\Omega^{-4}) \quad (1.4)$$

Здесь величина r вычисляется приближенно согласно (1.2), а производная r' , которая выражается через ω' , находится при помощи соотношения, следующего непосредственно из (1.3):

$$\omega' = -(I_o^*)^{-1} \cdot \omega \times I_o^* \cdot \omega + O(\Omega^{-2}) \quad (1.5)$$

Таким образом, величина r' определяется с нужной степенью точности как функция ω . Аналогично находятся последующие производные r'' , ω'' . В результате для определения вектора угловой скорости ω из (1.3) на основе (1.4), (1.5) получается искомое уравнение вида [1]:

$$I_o^* \cdot \omega' + \omega \times (I_o^* \cdot \omega) = \Phi(\omega) + O(\Omega^{-4}) \quad (1.6)$$

Здесь функция $\Phi(\omega)$ является полиномом, содержащим четвертые и восьмые степени вектора ω , и состоит из слагаемых, величины которых имеют порядок Ω^{-2} и Ω^{-3} . В общем случае функция Φ имеет довольно громоздкий вид и ее выражение не приводится. В следующем п. 2 строится решение задачи Коши для уравнения (1.6) в частном случае осевой симметрии.

2. Исследуем движение динамически симметричного твердого тела, несущего подвижную точечную массу m , соединенную с телом в некоторой точке O_1 на оси симметрии. Считается, что при относительном движении на точку m действует возвращающая упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости (см. п. 1). Начало декартовой системы координат, связанной с телом, поместим в центр инерции O системы, состоящей из тела и точечной массы, расположенной в точке O_1 . Орты этой системы e_1, e_2, e_3 направим так, чтобы орт e_3 совпадал с осью динамической симметрии системы. Тогда радиус-вектор ρ точки O_1 равен $\rho = re_3$, причем для определенности предполагается, что $r > 0$. В этой системе координат тензор инерции I_o^* имеет диагональный вид [1]:

$$I_o^* = \text{diag}(I, I, I_*) \quad (2.1)$$

Величины I и I_* называются экваториальным и осевым моментами инерции соответственно. Так как $\omega_i = \omega \cdot e_i$ ($i = 1, 2, 3$), то уравнение ну