

16-23



486

УДК 531.383

© 1990 г.

Д. Д. ЛЕЩЕНКО, С. Н. САЛЛАМ

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении. Рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации θ , и возмущающего момента. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} Ap^* + (C-A)qr &= k(\theta) \sin \theta \cos \varphi + M_1 \\ Aq^* + (A-C)pr &= -k(\theta) \sin \theta \sin \varphi + M_2 \\ Cr^* &= M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2, 3) \\ \psi^* &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \theta^* = p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \varphi^* &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Динамические уравнения Эйлера записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, M_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами $2\pi, \psi$ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от угла нутации $k(\theta)$. В случае тяжелого волчка имеем $k = mgl$, где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Возмущающие моменты M_i в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений $M_i = 0$, $i=1, 2, 3$ и $k(\theta) = \text{const}$ уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа.

В работе делаются следующие исходные предположения

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i=1, 2), \quad M_3 \sim k \quad (1.2)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. С помощью неравенств (1.2) введем малый параметр ε и положим

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\theta) = \varepsilon K(\theta), \quad \varepsilon \ll 1 \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2), \quad M_3 = \varepsilon M_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

В [1] та-
дого тела, б.
усреднения
система урав-
для случая
рассматрива-
симметрии т-
рия движени-
Вследствие
жестких уда-
В [2], ка
(1.2), (1.3)
на тело дей-
торого равн-
ию силой,
ческой сим-
В отличие
мультипли-
($i=1, 2, 3$).
Возмуще-
дерегулярно
Новые п
ф, К, А, С,
порядка еди-
Становит-
система (1.1)
важно про-
рядка ε^{-1} .
Метод у-
тела. В [6-
в основном
усреднение
В [1-3, 6, 8]
кие в случае
возможности
ния и иссле-
2. Проде-
(1.3). Сокр-

Рассмотр-
(2.1). Из по-

Здесь γ
меньших пре-
при $\varepsilon=0$ п-

А. Лещенко
теза с расч.
Деп. в УкрПН
Лещенко
в псевдорегу
№ 1656-Укр88

В [1] также рассматриваются возмущенные движения тяжелого твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Построено численное решение усредненной системы для случая линейных диссипативных моментов. В отличие от [1] в [2, 3] рассматривается случай быстро вращающегося вокруг оси динамической симметрии тела¹, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения в первом и втором приближениях удастся получить явные аналитические решения.

В [2], как и в данной работе, предполагаются выполненными условия (1.2), (1.3). В отличие от публикуемой работы в [2] предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна k и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии.

В отличие от третьего неравенства (1.2) в [3]¹ предполагается, что возмущающие моменты мала по сравнению с восстанавливающим $|M_i| \ll k$ ($i=1, 2, 3$).

Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа были ранее исследованы².

Новые переменные P, Q , а также переменные и постоянные $r, \psi, \theta, \varphi, K, A, C, M_i^*$ ($i=1, 2, 3$) предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ставится задача исследовать асимптотическое поведение решений системы (1.1) при малом ε , если выполнены условия (1.2), (1.3). Исследование проводится методом усреднения [4-6] на интервале времени порядка ε^{-1} .

Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. В [6-8] этим методом исследованы некоторые задачи динамики; в основном для динамически симметричных тел. В [9] впервые проведено усреднение по движению Эйлера-Пуансо для несимметричного тела. В [1-3, 6, 8, 10] исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Упрощающие предположения (1.2) или (1.3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

2. Процедура усреднения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε , получим

$$\begin{aligned} AP' + (C-A)Qr &= K(\theta) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1^* \\ AQ' + (A-C)Pr &= -K(\theta) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2^*, \quad Cr' = \varepsilon M_3^* \\ \psi' &= \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \theta' = \varepsilon (P \cos \varphi - Q \sin \varphi) \\ \varphi' &= r - \varepsilon (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon=0$ в (2.1). Из последних четырех уравнений (2.1) получим

$$r=r_0, \quad \psi=\psi_0, \quad \theta=\theta_0, \quad \varphi=r_0 t + \varphi_0 \quad (2.2)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям переменных при $t=0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения (2.1) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для

¹ Леценко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Одесса, 1988. 22 с. — Деп. в УкрНИИТИ 23.06.88, № 1655-Ук88.

² Леценко Д. Д., Саллам С. Н. Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии. Одесса, 1988. 48 с. — Деп. в УкрНИИТИ 23.06.88, № 1656-Ук88.

Р. Q. Решение представим в виде

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma_0 + b \sin \gamma_0 + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin (r_0 t + \varphi_0) \\ Q &= a \sin \gamma_0 - b \cos \gamma_0 + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos (r_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a &= P_0 - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad b = -Q_0 + K_0 C^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 r_0^{-1} \\ \gamma_0 &= n_0 t, \quad n_0 = (C-A) A^{-1} r_0 \neq 0, \quad |n_0/r_0| \leq 1, \quad K_0 = K(\theta_0) \end{aligned}$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения новых переменных P, Q , введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных P, Q зависит от медленной переменной r), поэтому далее вводится дополнительная переменная γ , определяемая уравнением

$$\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C-A) A^{-1} r \quad (2.4)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\gamma = \gamma_0 = n_0 t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon = 0$. Первые два соотношения (2.3) можно, исключая постоянные, с учетом (2.2) переписать в эквивалентном виде

$$P = a \cos \gamma + b \sin \gamma + K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \varphi \quad (2.5)$$

$$Q = a \sin \gamma - b \cos \gamma + K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \varphi$$

и разрешить относительно a, b :

$$a = P \cos \gamma + Q \sin \gamma - K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin (\gamma + \varphi) \quad (2.6)$$

$$b = P \sin \gamma - Q \cos \gamma + K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos (\gamma + \varphi)$$

Рассмотрим систему (2.1) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (2.5), (2.6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным типа Ван-дер-Поля [6] a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \gamma$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, причем

$$\alpha = \gamma + \varphi \quad (2.7)$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (2.1))

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) - \varepsilon K C^{-1} r^{-1} \cos \theta (b - K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\ &+ \varepsilon K C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha - \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) dK/d\theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \varepsilon A^{-1} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) + \varepsilon K C^{-1} r^{-1} \cos \theta (a + K C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\ &- \varepsilon K C^{-2} r^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha + \varepsilon C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha (a \cos \alpha + b \sin \alpha) dK/d\theta \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3^0, \quad \dot{\psi} = \varepsilon \operatorname{cosec} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon K C^{-1} r^{-1}$$

$$\dot{\alpha} = \varepsilon C A^{-1} r - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon K C^{-1} r^{-1} \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = (C-A) A^{-1} r$$

Здесь через M_i^0 обозначены функции, полученные из M_i^* (см. (1.3)) в результате сделанной подстановки (2.5) — (2.7), т. е.

$$M_i^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Отметим, что переход от двух переменных P, Q к трем a, b, γ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon = 0$ система для P, Q имеет вид линейной замена (2.5) неособая для всех a, b .

Введем вектор x , компонентами которого служат медленные переменные a, b, r, ψ, θ системы (2.8). Тогда эту систему можно записать в виде

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, \alpha, \gamma, t), \quad \dot{\alpha} = C A^{-1} r + \varepsilon Y(x, \alpha) \quad (2.10)$$

$$\dot{\gamma} = (C-A) A^{-1} r, \quad x(0) = x_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \gamma(0) = 0$$

Здесь векто
ми частями Y
(2.2) — (2.4),

Рассмотрим
да усреднение
 b, r, ψ, θ и б
лишь в первом
посредственно
Предположим
от t . Так как
замена (2.5) —
 α и γ с пери
фазы α и γ
ны. При усре
чая: переход
зональных, в
бенностью α
[(C-A) A^{-1} r

где i, j — па
C/A иррацио
стемы (2.10)
эллиптической
независимой
В первом
близкостно
мы (2.8) по
переменные

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon A^{-1} r, \\ b &= \varepsilon A \end{aligned}$$

Реш
третног
постью
что пос
Дан
частота
екто
усреди

функция X и скалярная функция Y определяются правыми частями уравнений (2.8), начальные значения получаются согласно (2.7).

Для системы (2.8) или (2.10) с точки зрения применения методов [4-6]. Система (2.8) содержит медленные переменные α , быстрые переменные — фазы α , γ и время t , причем γ входит в три уравнения (2.8). Система существенно нелинейна и применение метода усреднения весьма затруднено [11]. Для простоты, что возмущающие моменты M_i^* не зависят от t , M_i^* ($i=1, 2, 3$) периодичны по φ с периодом 2π , то согласно (2.7) функции M_i^0 из (2.9) будут периодическими функциями от α с периодами 2π . Тогда система (2.10) содержит две вращающиеся переменные и соответствующие им частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ переменные. При усреднении системы (2.8) или (2.10) следует различать два случая: резонансный, когда частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ несоизмеримы, и нерезонансный, когда эти частоты соизмеримы [11]. Весьма существенной особенностью системы (2.10) является то, что отношение частот постоянно $(C-A)A^{-1}r/[CA^{-1}r]=1-AC^{-1}$ и резонансный случай имеет место при

$$C/A = i/j, \quad i/j \leq 2 \quad (2.11)$$

где i, j — натуральные взаимно простые числа, а в нерезонансном случае C/A — рациональное число. Вследствие (2.11) усреднение нелинейной системы (2.10), в которой X не зависит от t , эквивалентно усреднению квадратичной системы с постоянными частотами. Это достигается введением медленной переменной γ .

В резонансном случае ($C/A \neq i/j$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (2.8) по обоим быстрым переменным α , γ . В результате для медленных переменных получаются уравнения

$$\begin{aligned} \mu_1 - \varepsilon b K C^{-1} r^{-1} \cos \theta + \varepsilon K C^{-2} r^{-2} \sin \theta \mu_3^* - 1/2 \varepsilon C^{-1} r^{-1} b \sin \theta dK/d\theta \\ A^{-1} \mu_2 + \varepsilon a K C^{-1} r^{-1} \cos \theta - \varepsilon K C^{-2} r^{-2} \sin \theta \mu_3^* + 1/2 \varepsilon C^{-1} r^{-1} a \sin \theta dK/d\theta \\ r^* = \varepsilon C^{-1} \mu_3, \quad \psi^* = \varepsilon K C^{-1} r^{-1}, \quad \theta^* = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mu_1(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) d\alpha d\gamma$$

$$\mu_2(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) d\alpha d\gamma$$

$$\mu_3(a, b, r, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 d\alpha d\gamma$$

$$\begin{aligned} \mu_3^*(a, b, r, \psi, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \sin \alpha d\alpha d\gamma, \quad \mu_3^c(a, b, r, \psi, \theta) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \cos \alpha d\alpha d\gamma \end{aligned}$$

Для усредненной системы (2.12) для возмущающих моментов константного вида, определим движение тела в нерезонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале изменения времени порядка ε^{-1} . Отметим, что последнее уравнение системы (2.12) интегрируется и дает $\theta = \theta_0$. Тогда система эквивалентна двухчастотной системе с постоянными частотами, поскольку обе частоты пропорциональны осевой составляющей угловой скорости. Поэтому обоснование применимости метода усреднения можно провести, как и для квазилинейной системы [2].

(2.11) система (2.10) одночастотна. Введем вспомогательную переменную — линейную комбинацию фаз с целочисленными коэффициентами

$$\lambda = \alpha - i(i-j)^{-1}\gamma, \quad i/j \neq 1, \quad i/j \leq 2, \quad i, j > 0 \quad (2.13)$$

(2.10) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, i(i-j)^{-1}\gamma + \lambda, \gamma) \\ \dot{\lambda} &= \varepsilon Y(x, i(i-j)^{-1}\gamma + \lambda), \quad \dot{\gamma} = (C-A)A^{-1}\gamma \end{aligned} \quad (2.14)$$

Правые части периодичны по γ с периодом $2|i-j|\pi$. Систему (2.14) в приближении построим усредняя правые части системы (2.14) по периоду изменения аргумента γ . В результате получим систему для медленных переменных

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1^* &= -\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b \cos \theta + \varepsilon KC^{-2}r^{-2} \sin \theta \mu_3^{**} - \frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}b \sin \theta dK/d\theta \\ \dot{\mu}_2^* &= \varepsilon KC^{-1}r^{-1}a \cos \theta - \varepsilon KC^{-2}r^{-2} \sin \theta \mu_3^{**} + \frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}r^{-1}a \sin \theta dK/d\theta \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1}\mu_3^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\lambda} = -\varepsilon KC^{-1}r^{-1} \cos \theta$$

$$\mu_1^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) d\gamma$$

$$\mu_2^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} (M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) d\gamma$$

$$\mu_3^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} M_3^0 d\gamma$$

$$\begin{aligned} \mu_3^{**}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) &= \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} M_3^0 \sin \alpha d\gamma, \quad \mu_3^{**}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda) = \\ &= \frac{1}{2\pi|i-j|} \int_0^{2\pi|i-j|} M_3^0 \cos \alpha d\gamma \end{aligned}$$

Предполагается, что в подынтегральных выражениях переменная α связана на λ согласно (2.13). Отметим, что предпоследнее уравнение (2.15) имеет решение $\theta = \theta_0$.

Решая усредненную систему (2.15) для возмущающих моментов конечного вида, определим движение тела в резонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале времени порядка ε^{-1} . Обоснование проводится стандартным образом [4, 5].

В качестве примера восстанавливающего момента, зависящего от угла поворота, рассмотрим твердое тело с прикрепленной к нему в точке N пружиной, конец L которой закреплен неподвижно. На тело действуют (см. рис. 1) сила тяжести mg и сила упругости пружины F , модуль которой пропорционален деформации пружины $F = \lambda_1(s - s_0)$. Здесь λ_1 — коэффициент жесткости пружины. В этом случае восстанавливающий момент имеет вид

$$\begin{aligned} k(\theta) &= mgl + \lambda_1 hz [1 - s_0(h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta)^{-1/2}] \\ ON &= z, \quad OC = l, \quad OL = h, \quad LN = s = s(\theta) \quad k(\theta) = \varepsilon K(\theta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее при помощи изложенной методики рассмотрены некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

3. Случай малого постоянного момента. Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого момента, постоянного в свя-

защитных
ты M_i (

Перео
резонанс
типа (2

$r =$
Прои
(3.2), по

Подста
руем урав

Здесь
осевой ске
Как сл
ния тела
Решени
сто r выра

$\beta = (M_3^*)$
Подстав
и r из (3.3)

$r =$

$q =$

$\gamma = (C$

Для рас
ной выраже
(2.16) выгес

$\beta = (e$

Согласно
 M_3^* имеет
цессии ψ (3
обоих случа
конечного т
при этом $r =$
Перемени
Медленные
ми функци

и осей и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты M_i ($i=1, 2, 3$) в этом случае имеют вид

$$M_1=M_2=0, M_3=\varepsilon M_3^*=\text{const} \quad (3.1)$$

Переходя к новым медленным переменным a, b, r, ψ, θ , получим в нестационарном случае усредненную систему

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon K C^{-1} r^{-1} b \cos \theta - \\ & - 1/2 \varepsilon C^{-1} r^{-1} b \sin \theta dK/d\theta \\ \dot{b} &= \varepsilon K C^{-1} r^{-1} a \cos \theta + \\ & + 1/2 \varepsilon C^{-1} r^{-1} a \sin \theta dK/d\theta \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1} M_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon K C^{-1} r^{-1}, \quad \dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегрировав третье уравнение получим

$$r = r_0 + \varepsilon C^{-1} M_3^* t \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.2) и проинтегрируем уравнение для ψ :

$$\psi = \psi_0 + K (M_3^*)^{-1} \ln |1 + \varepsilon C^{-1} M_3^* r_0^{-1} t| \quad (3.4)$$

Здесь ψ_0 и r_0 — произвольные начальные значения угла прецессии и скорости вращения.

Как следует из (3.2), угол нутации θ не изменяется во время движения $\theta = \theta_0$.

Решение системы первых двух уравнений (3.2) после подстановки вместо выражения (3.3) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} a &= P_0 \cos \beta + Q_0 \sin \beta - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\beta + \varphi_0) \\ b &= P_0 \sin \beta - Q_0 \cos \beta + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\beta + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $P_0 = (M_3^*)^{-1} [K_0 \cos \theta_0 + 1/2 \sin \theta_0 (dK/d\theta)_{\theta=\theta_0}] \ln |1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t|$, $K_0 = K(\theta_0)$. Подставляя в формулы (2.5), (1.3) полученные выражения a, b из (3.5) в (3.3), определим

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos(\gamma - \beta) - q_0 \sin(\gamma - \beta) + k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \beta - \varphi_0) + \\ & + k C^{-1} r_0^{-1} (1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t)^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$q = p_0 \sin(\gamma - \beta) + q_0 \cos(\gamma - \beta) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \beta - \varphi_0) + \\ + k C^{-1} r_0^{-1} (1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t)^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi$$

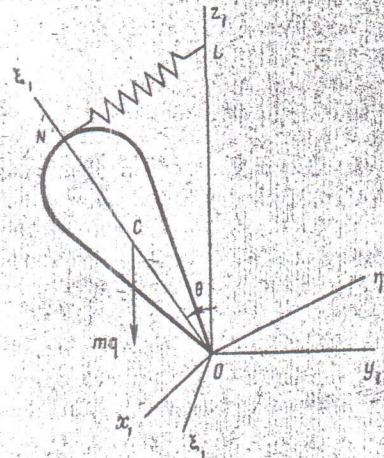
$$\gamma = (C-A) A^{-1} (\varepsilon C^{-1} M_3^* t^2 / 2 + r_0 t), \quad p_0 = \varepsilon P_0, \quad q_0 = \varepsilon Q_0, \quad k_0 = \varepsilon K(\theta_0)$$

Для рассматриваемого примера тела с прикрепленной к нему пружинкой выражения для p, q получаются по формулам (3.6) с подстановкой (2.16) вместо k и этого же выражения при $\theta = \theta_0$ вместо k_0 . При этом

$$\beta = (\varepsilon M_3^*)^{-1} [k_0 \cos \theta_0 + \lambda_1 h^2 z^2 s_0 \sin^2 \theta_0 (h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta_0)^{-1/2}] \ln |1 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} M_3^* t|$$

Согласно (3.3) величина $|r(\tau)|$, $\tau = \varepsilon t$ возрастает, если параметры r_0, M_3^* имеют одинаковый знак и убывает, если знаки различны. Угол прецессии ψ (3.4) содержит переменную составляющую, модуль которой в обоих случаях монотонно возрастает: в первом случае он ограничен для конечного $\tau \sim 1$, во втором — стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow -C r_0 / M_3^*$; при этом $r \rightarrow 0$.

Переменная β в (3.5), (3.6) заменяется аналогично ψ ; если $\theta_0 \neq \pm 1/2\pi$. Медленные переменные a, b являются ограниченными 2π — периодическими функциями β .



Составляющие p, q вектора угловой скорости ω являются ограниченными осциллирующими слагаемыми, обусловленные начальными данными p_0, q_0 , а также слагаемыми, обусловленные восстанавливающим моментом (1.2), (2.16).

Отметим, что при отсутствии пружины сравнение полученных выражений для медленных переменных a, b, p, q (3.5), (3.6) с соответствующими формулами [2], если формально положить в них $\lambda_1=0$, дает совпадение указанных выражений.

Следует подчеркнуть, что в формулах (3.6) для p и q присутствуют переменная и постоянная составляющие восстанавливающего момента $k(\theta)$ и $k_0=k(\theta_0)$.

4. Случай линейных внешних диссипативных моментов. Рассмотрим возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты M_i ($i=1, 2, 3$) являются линейно-диссипативными [12]:

$$M_1 = -\varepsilon I_1 p, M_2 = -\varepsilon I_2 q, M_3 = -\varepsilon I_3 r, I_1, I_2 > 0 \quad (4.1)$$

Здесь I_1, I_2 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Запишем возмущающие моменты с учетом соотношений (1.3) для p и q :

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, M_2 = -\varepsilon^2 I_2 Q, M_3 = -\varepsilon I_3 r \quad (4.2)$$

Согласно п. 2 переходим к новым медленным переменным a, b, r, ψ, θ и получим усредненную систему (2.12) вида

$$a' = -\varepsilon I_1 A^{-1} a - \varepsilon C^{-1} r^{-1} b (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta) \quad (4.3)$$

$$b' = -\varepsilon I_2 A^{-1} b + \varepsilon C^{-1} r^{-1} a (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta)$$

$$r' = -\varepsilon I_3 C^{-1} r, \psi' = \varepsilon K C^{-1} r^{-1}, \theta' = 0$$

Проинтегрировав третье уравнение (4.3), получим (r_0 — произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r = r_0 \exp(-\varepsilon I_3 C^{-1} t), r_0 \neq 0 \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) уравнение (4.3) для ψ интегрируется и дает (ψ_0 — постоянная, равнаяначальному значению угла прецессии при $t=0$):

$$\psi = \psi_0 + K I_3^{-1} r_0^{-1} [\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) - 1] \quad (4.5)$$

Кроме того, как видно из (4.3), угол нутации сохраняет постоянное значение $\theta = \theta_0$. Подставляя в первые два уравнения (4.3) вместо r выражение (4.4), получим систему вида

$$a' = -\varepsilon I_1 A^{-1} a - \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} b \exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta)$$

$$b' = -\varepsilon I_2 A^{-1} b + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} a \exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta)$$

решение которой согласно [13, с. 534] записывается следующим образом

$$a = \exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t) [P_0 \cos \eta + Q_0 \sin \eta - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\eta + \varphi_0)] \quad (4.6)$$

$$b = \exp(-\varepsilon I_2 A^{-1} t) [P_0 \sin \eta - Q_0 \cos \eta + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\eta + \varphi_0)]$$

$$\eta = r_0^{-1} I_3^{-1} (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta) [\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) - 1], K_0 = K(\theta_0)$$

В результате подстановки в соотношения (2.5), (1.3) для P, Q, p, q выражений a, b из (4.6) и r из (4.4) определим

$$p = \exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t) [p_0 \cos(\gamma - \eta) - q_0 \sin(\gamma - \eta) + k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \eta - \varphi_0)] + k C^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) \sin \theta_0 \sin \varphi \quad (4.7)$$

$$q = \exp(-\varepsilon I_2 A^{-1} t) [p_0 \sin(\gamma - \eta) + q_0 \cos(\gamma - \eta) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\gamma - \eta - \varphi_0)] + k C^{-1} r_0^{-1} \exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) \sin \theta_0 \cos \varphi$$

$$\gamma = \frac{C}{I_3} \frac{C-A}{A} \frac{r_0}{\varepsilon} [1 - \exp(-\varepsilon I_3 C^{-1} t)], p_0 = \varepsilon P_0$$

$$q_0 = \varepsilon Q_0, k_0 = \varepsilon K_0$$

Отметим, что в отличие от соответствующих формул [2] выражения (4.7) содержат постоянную k_0 и переменную составляющие восстанавливающего момента $k(\theta)$.

Для тела с пружиной в формулы (4.7) нужно подставить выражение (2.16) для восстанавливающего момента $k=k(\theta)$ и это же выражение при $\theta=\theta_0$ для $k_0=k(\theta_0)$. В этом случае

$$\eta = r_0^{-1} I_3^{-1} e^{-1} [k \cos \theta + \frac{1}{2} \lambda_1 h^2 z^2 \sin^2 \theta (h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta)^{-1/2}] [\exp(e I_3 C^{-1} t) - 1]$$

Тем самым решение системы первого приближения для медленных переменных в случае диссипативного момента (4.1) построено. Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте согласно (4.4). Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ медленно экспоненциально возрастает в соответствии с (4.5). Из (4.6) следует, что медленные переменные a, b монотонно стремятся к нулю по экспоненте.

Согласно (4.7) слагаемые проекций p, q , обусловленные начальными значениями p_0, q_0 , затухают по экспоненте. В то же время проекции p, q содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливающему моменту, что приводит к экспоненциальному росту величины $(p^2 + q^2)^{1/2}$.

Сравнение полученных выражений для медленных переменных a, b, p, q (4.6), (4.7) с соответствующими формулами [2] при отсутствии пружины (формально положим в них $\lambda_1 = 0$) дает совпадение указанных выражений.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и полезные обсуждения.

лю
лым
усред-
имеры.

метрично-
лем восста-
змущающего

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771-778.
2. Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3-10.
3. Леценко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 8-17.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. Волосов В. М., Морозов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
8. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
9. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474-483.
10. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
11. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
12. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

(1.1)

авные оси
и вектора
ра воз-

Одесса

Поступила в редакцию
18.IV.1989