

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

За підтримки:

- Національного космічного агентства України
- КП ЦКБ «АРСЕНАЛ»
- Українського відділення Міжнародної громадської організації «Академія навігації та керування рухом»

VI Міжнародна науково-технічна конференція

**ПРОТЕХНОЛОГІЇ, НАВІГАЦІЯ,  
КЕРУВАННЯ РУХОМ  
ТА КОНСТРУЮВАННЯ  
АВІАЦІЙНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ**

Збірник доповідей

Частина I

26-27 квітня 2007 р.

Київ, Україна

## СТРУКТУРА УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО КРИТЕРИЮ МОДУЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ.

Е.С. Щербина.

Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт»

г. Киев, Украина

## STRUCTURE OF THE CONTROL DYNAMIC SYSTEMS ON THE CRITERION OF MODULE INVARIANTS.

Y. Shcherbyna

National Technical University of Ukraine

"Kiev Polytechnical institute"

Объектом рассмотрения является все пространство управляемых динамических систем. Это пространство разбивается на классы эквивалентности этих систем по отношению координатности и классифицирующих групп. Классы систем классифицируются по коразмерности образующих их многообразий. Это позволяет свести рассмотрение задач в классах систем на категориях составных многообразий.

Показано, что классы коразмерности нуль являются открытыми множествами в пространстве систем  $M$ . В выделенном классе систем  $m \in M$  существуют подмножества инвариантных систем различных типов, а для каждой системы  $m \in M$  из общего класса систем  $M$  представляется возможным выделить целое семейство систем с теми же свойствами инвариантности, что и у исходной системы  $m$ . Вводится определение модулярной инвариантности.

Дополнительно получается семейство систем, трансверсальных к первому семейству в точке  $m \in M$ . Это второе семейство описывает и дает критериальный признак структурной устойчивости по критерию модулярной инвариантности семейства инвариантных систем в окрестности точки  $m \in M$ .

## ПЫСТРОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТА СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ.

Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

г. Одесса, Украина

[leshchenko\\_d@ukr.net](mailto:leshchenko_d@ukr.net), [rachinskaya@onu.edu.ua](mailto:rachinskaya@onu.edu.ua)

## FAST ROTATION OF DYNAMICALLY SYMMETRIC SATELLITE UNDER THE ACTION OF LIGHT PRESSURE TORQUE IN A RESISTIVE MEDIUM.

D.D. Leshchenko, A.L. Rachinskaya

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил светового давления и сопротивления. Вращательное движение изучается в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, светового давления и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1-10].

Для решения задачи введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1,2]. Система координат  $Ox_i (i=1,2,3)$  движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником: ось  $Ox_1$  параллельна радиус-вектору орбиты в ее перигелии, ось  $Ox_2$  – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось  $Ox_3$  – нормали к плоскости орбиты. Система координат  $Oy_i (i=1,2,3)$  связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента  $G$ . Ось  $Oy_3$  направлена по вектору кинетического момента  $G$ , ось  $Oy_2$  лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости  $Ox_1x_2$ ), ось  $Oy_1$  лежит в плоскости  $Ox_2x_3$  и направлена так, что векторы  $y_1, y_2, y_3$  образуют правую тройку [1-3]. Оси системы координат  $Oz_i (i=1,2,3)$  связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Положение главных центральных осей инерции относительно осей  $Oy_i$  определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы  $\alpha_{vi}$  осей  $z_i$  относительно системы  $Oy_i$  выражаются через углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента  $G$  относительно его центра масс в системе



координат  $Ox_i$  определяются углами  $\lambda$  и  $\delta$ , как показано в [1-3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $L_i$  - моменты внешних сил относительно осей  $Oy_i$ ,  $G$  - величина кинетического момента,  $A_i (i=1,2,3)$  - главные центральные моменты инерции относительно осей  $Oz_i$ ,  $A_1 = A_2 \neq A_3$ .

Проекция  $L_i$  момента внешних сил складывается из момента сил светового давления  $L_i^c$  и момента сил внешнего сопротивления  $L_i^r$ .

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $Oz_3$ . Как показано в [1,6], в этом случае для момента сил светового давления, действующего на спутник, имеет место формула

$$L_i^c = (a_c(\varepsilon_r) R_0^2 / R^2), a_c(\varepsilon_r) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_r) Z_0^l(\varepsilon_r), p_c = \frac{E_0}{c} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{e}_r$  - единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты;  $\varepsilon_r$  - угол между направлениями  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{k}$  так, что  $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_r$ ;  $R$  - текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника;  $R_0$  - фиксированное значение  $R$ , например, в начальный момент времени;  $a_c(\varepsilon_r)$  - коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности;  $S$  - площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку;  $Z_0^l$  - расстояние от центра масс до центра давления;  $p_c$  - величина светового давления на расстоянии  $R$  от центра Солнца;  $c$  - скорость света;  $E_0$  - величина потока энергии светового давления на расстоянии  $R_0$  от центра Солнца.

Рассматривается динамически симметричный спутник в предположении, что угловая скорость  $\omega$  движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения  $\omega_0$ , т.е.  $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1 \omega_0 / G \ll 1$ .

Полагаем [1]  $a_c = a_c(\cos \varepsilon_r)$  и аппроксимируем ее полиномами по степеням  $\cos \varepsilon_r$ . Представим функцию  $a_c(\cos \varepsilon_r)$  в виде  $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_r + \dots$

Далее рассмотрим только второй член разложения. Предположим также, что  $a_1 \sim \varepsilon$ .

В работе предполагается, что момент сопротивления  $L^r$  может быть

представлен в виде  $L^r = I \omega$ , где тензор  $I$  имеет постоянные компоненты  $I_{ij}$  в системе  $Oz_i$ , связанной с телом [1,5]. Сопротивление среды предполагаем любого порядка малости  $\varepsilon^2$ :  $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$ , где  $\|I\|$  - норма матрицы коэффициентов сопротивления,  $G_0$  - кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом  $e$  и периодом обращения  $Q$ . Зависимость истинной аномалии  $\nu$  от времени  $t$  дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} \quad (3)$$

Исследуем решение системы (1) - (3) при малом  $\varepsilon$  на большом промежутке времени  $t \sim \varepsilon^{-2}$ . Для решения задачи будем применять метод усреднения [11].

В случае невозмущенного движения Эйлера-Пуансо, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, интегрирование уравнений движения для  $\varphi, \psi, \theta$  доводится до конца в элементарных функциях. Имеем, что  $\varphi, \psi$  являются линейными функциями, а угол  $\theta$  - величина постоянная. Для возмущенного движения углы  $\varphi, \psi$  являются быстрыми переменными, а угол  $\theta$  - медленной. Проведем усреднение системы уравнений для медленных переменных  $G, \lambda, \delta, \theta$  по быстрым переменным: сначала по  $\psi$ , а затем по  $\varphi$ .

После усреднения по быстрым переменным  $\varphi, \psi$  имеем уравнения в безразмерных величинах

$$\begin{aligned} \frac{dG^l}{dt} &= -\varepsilon^2 G^l \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2A_1^l} (I_{11}^l + I_{22}^l) + \frac{I_{33}^l}{A_3^l} \cos^2 \theta \right], \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon^2 \left[ -\frac{I_{11}^l + I_{22}^l}{2A_1^l} + \frac{I_{33}^l}{A_3^l} \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{\Gamma(1+e \cos \nu)^2}{2G^l(1-e^2)^2} \varepsilon^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\Gamma(1+e \cos \nu)^2}{G^l(1-e^2)^2} \varepsilon^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь безразмерные величины определяются равенствами

$$t^l = \Omega_0 t, \quad G^l = \frac{G}{G_0}, \quad A_i^l = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}, \quad \frac{I_{ij}^l}{G_0} = \varepsilon^2 I_{ij}^l, \quad \Omega_0 - \text{угловая скорость движения спутника}$$

относительно центра масс в начальный момент времени.

Введено обозначение  $\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}}$ , где  $\mu$  - гравитационная постоянная.

Назовем величину  $\Gamma$  приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

Последние два уравнения (4) и уравнение (3) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda) \\ \dot{\nu} &= \frac{\varepsilon}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta, \Lambda$  - коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (4). Из системы (5) видно, что  $\delta, \lambda$  - медленные переменные, а  $\nu$  - полумедленная.

Применяем модифицированный метод усреднения [12] и имеем:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma \cos \delta}{2G^2 (1 - e^2)^{1/2}} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \quad (6)$$

Интегрирование системы (6) и первых двух уравнений системы (4) проводилось в медленном времени  $\tau = \varepsilon^2 t'$  при начальных условиях  $G(0) = 1$ ;  $\delta(0) = \pi/4 \text{ рад}$ ;  $\lambda(0) = \pi/4 \text{ рад}$  и значениях главных центральных моментов инерции тела  $A_1^1 = 4.175$ ;  $A_3^1 = 1.67$ . Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом:  $e = 0$  - круговая орбита;  $e = 0.04473$  - 1-й советский спутник;  $e = 0.0487$  - 3-й советский спутник;  $e = 0.421$  - сильно эллиптическая орбита [1], а также при различных начальных значениях угла нутации  $\theta(0) = \pi/6 \text{ рад}$  или  $\theta(0) = \pi/3 \text{ рад}$ . Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта:  $I_{11}^1 = 2.322$ ;  $I_{22}^1 = 1.31$ ;  $I_{33}^1 = 1.425$  и  $I_{11}^1 = 2.0$ ;  $I_{22}^1 = 1.0$ ;  $I_{33}^1 = 0.5$ . В первом случае величина в квадратных скобках второго уравнения системы (4) будет положительной, а во втором случае - отрицательной. Величина коэффициента момента сил светового давления  $a_{ic} = 10^{-5} \text{ Нм}$ , гравитационная постоянная  $\mu = 1.37 \cdot 10^{20} \text{ м}^3/\text{с}^2$ .

Интегрируя второе уравнение системы (4) для угла прецессии в медленном времени  $\tau$ , получим:

$$\text{tg} \theta = \text{tg} \theta_0 \exp \left[ \left( -\frac{I_{11}^1 + I_{22}^1}{2A_1^1} + \frac{I_{33}^1}{A_3^1} \right) \tau \right], \quad (7)$$

здесь  $\theta_0$  - начальное значение угла прецессии.

Учитывая равенство (7), можно получить аналитическое решение для первого уравнения системы (4) в явном виде в медленном времени  $\tau$ :

$$G^1 = \cos \theta_0 \exp \left( -\frac{I_{33}^1}{A_3^1} \tau \right) \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_0 \exp \left( 2 \left( -\frac{I_{11}^1 + I_{22}^1}{2A_1^1} + \frac{I_{33}^1}{A_3^1} \right) \tau \right)} \quad (8)$$

Для проверки корректности численного расчета уравнений системы (4) производился сравнительный анализ графиков численного и аналитического расчетов в безразмерном виде для кинетического момента  $G$  и угла нутации  $\theta$ , для которых известны аналитические решения (7) и (8). Численный расчет совпадает с аналитическим решением в обоих случаях с точностью до шестого знака. Графики приведены на рис. 1, 2 в двух возможных расчетных случаях коэффициентов сопротивления, где 1 - первая комбинация коэффициентов  $I_{ii}^1$ , а 2 - вторая. Рисунки соответствуют начальному условию  $\theta(0) = \pi/6 \text{ рад}$ .

Подставляя (7) и (8) в последнее уравнение системы (6) имеем автономное дифференциальное уравнение для угла  $\lambda$ , которое можно решить только численно независимо от системы (4)

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\Gamma \cos \delta (1 - 0.5 \text{tg}^2 \theta_0 e^{2k\tau}) e^{\beta\tau}}{2 \cos \theta_0 (1 - e^2)^{1/2} (1 + \text{tg}^2 \theta_0 e^{2k\tau})^{1/2}} \\ \text{или } k &= -\frac{I_{11}^1 + I_{22}^1}{2A_1^1} + \frac{I_{33}^1}{A_3^1}, \quad \beta = \frac{I_{33}^1}{A_3^1}. \end{aligned} \quad (9)$$

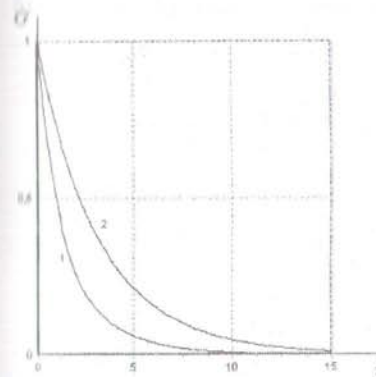


Рисунок 1.

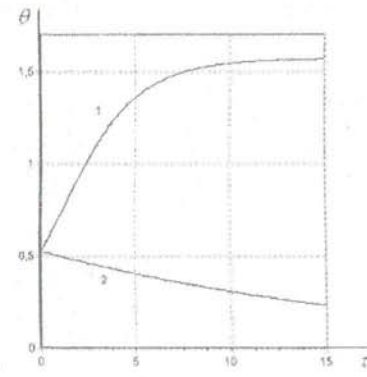


Рисунок 2.

Сравнивались графики функции угла  $\lambda$  для случая решения системы дифференциальных уравнений (4), (6) и решения автономного уравнения (9) в обоих расчетных случаях. Решения совпадают с точностью до шестого знака.

На рисунках 3, 4 приведены графики изменения угла  $\lambda$  в двух расчетных случаях коэффициентов сопротивления  $I_{ii}^1$ ; рис. 3 соответствует первому случаю, а рис. 4 - второму, причем в каждом случае расчет производился для различных видов траекторий. Видно, что при увеличении эксцентриситета орбиты функции угла  $\lambda$  имеют больший градиент (кривые с индексом  $a$  соответствуют круговой орбите  $e = 0$ , а с индексом  $b$  - сильно эллиптической орбите  $e = 0.421$ ). Кривые 1 соответствуют начальному значению угла нутации  $\theta(0) = \pi/6 \text{ рад}$ , а кривые 2 -  $\theta(0) = \pi/3 \text{ рад}$ . На рисунках видно, что кривые 1 и 2 имеют различный характер: кривые 1 являются монотонными, а кривые 2 имеют промежутки возрастания и убывания. Это объясняется различным видом функции угла  $\theta$  (рис. 2). В первом расчетном случае коэффициентов  $I_{ii}^1$  угол  $\theta$  увеличивается от 30 градусов до 90 градусов, а во втором случае - угол  $\theta$  уменьшается, оставаясь при этом положительной величиной.

Рассмотрим второе уравнение системы (6) для функции угла  $\lambda$ . Правая часть уравнения является знакопеременной функцией и зависит от знака



выражения  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$ . При значениях угла  $\theta \in [0; \approx 54.74^\circ]$  это выражение является положительным. Поэтому во втором расчетном случае при  $\theta(0) = \pi/6 \text{ рад}$  выражение  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$  остается положительным на всем интервале времени (кривая 2 рис. 2), а значит функция  $\lambda$ , согласно второму уравнению системы (6) является монотонно убывающей (кривые 1а и 1б рис.4). В первом расчетном случае угол  $\theta$  увеличивается (кривая 1 рис.2) и проходит критическое значение  $54.74^\circ$ , поэтому знак выражения меняется, а функция угла  $\lambda$  имеет соответствующие промежутки возрастания и убывания (кривые 1а и 1б рис.3).

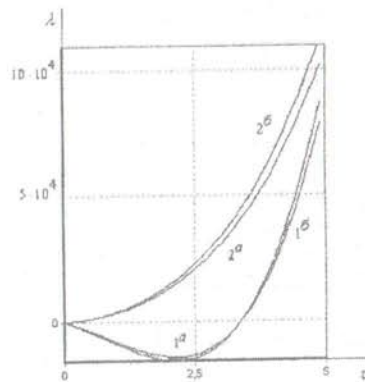


Рисунок 3.

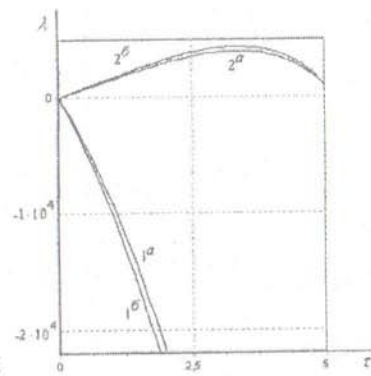


Рисунок 4.

Таким образом, исследовано быстрое движение динамически симметричного спутника под действием момента сил светового давления в среде с сопротивлением.

#### Библиографический список

- [1] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.-М.: Наука, 1965. - 416 с.
- [2] Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика.-1963.- 27,вып.3.- С. 474 – 483.
- [3] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.-М.: Изд-во МГУ, 1975.-308 с.
- [4] Белецкий В.В, Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников.-Киев: Наук. думка, 1984.-188 с.
- [5] Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в

сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1982.- №3.- С. 5-13.

- [6] Карымов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // ПММ. 1964. Т.28. Вып. 5. С. 923-930.
- [7] Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука, 1986. 304с.
- [8] Лещенко Д.Д., Шамасев А.С. О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №1. С. 14-21.
- [9] Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С.17-26.
- [10] Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием гравитационных и световых моментов // Изв. РАН. МТТ. 2006. №4. С.97-107.
- [11] Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
- [12] Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с медленной и быстрой фазами // ПММ. 2002. Т. 66. Вып.2. С. 165-176