ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/279442522

Курс теоретической механики

Book · January 2000

CITATIONS
0

READS
44

2 authors, including:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

219 PUBLICATIONS **235** CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project

Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces View project

All content following this page was uploaded by Dmytro Leshchenko on 30 June 2015.

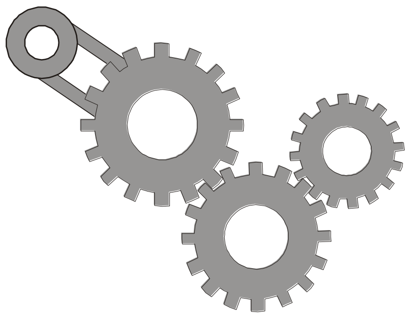
The user has requested enhancement of the downloaded file.

В.Х. Кириллов, Д.Д. Лещенко

Курс теоретической механики

Учебное пособие для студентов
высших технических учебных заведений

Издание второе, исправленное



Одесса
2002

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

§1. Предмет теоретической механики

Наука - это система знаний об объективных законах природы. Естественные науки изучают простые формы движения материи. Простейшей из них является механическая, под которой понимают изменение положения материального тела по отношению к другим телам или изменение взаимного расположения частей тела с течением времени. **Теоретическая механика** изучает общие законы этой простейшей формы движения материи.

Другие естественнонаучные дисциплины (например, физика, химия, биология и др.) изучают более сложные формы движения материи, которые проявляются в тепловых, электромагнитных, химических, биологических и других процессах. Между всеми формами существуют количественные и качественные отличия, однако, они находятся в диалектической связи и при соответствующих условиях переходят одна в другую. При этом более сложные формы движения не отрицают более простые формы, но их предполагают. Всегда произвольному явлению или процессу сопутствует простое перемещение материальных объектов.

Приведём несколько примеров. При тепловых процессах передача энергии может осуществляться тремя механизмами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Температура тела характеризует энергию, с которой движутся его молекулы. Так, например, из кинетической теории температура газа равна $T=V^2/3R$, где R - газовая постоянная, а V - средняя скорость движения молекул. Процесс передачи тепла теплопроводностью объясняется тем, что молекулы частей тела, где температура тела выше, имеют большую скорость и при контактном соударении сообщают дополнительную скорость соседним более «холодным» молекулам. Таким образом, с механической точки зрения, совершенно очевидно, что тепло может передаваться только от горячего тела холодному.

При конвекции перенос теплоты осуществляется перемещением объёмов жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой. Конвекция возможна лишь в текучей среде, здесь перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды, чем выше скорость среды, тем интенсивнее происходит теплоперенос.

Тепловое излучение представляет собой процесс передачи тепла путем электромагнитных волн. При поглощении этих волн каким-нибудь другим телом они преобразуются в энергию теплового движения молекул. Помимо волновых свойств излучения обладают также и корпускулярными свойствами, которые состоят в том, что лучистая энергия излучается и поглощается веществами не непрерывно, а отдельными дискретными порциями - квантами света или фотонами. Испускаемый фотон - частица материи, обладающая энергией, количеством движения и электромагнитной массой.

Рассмотрев три механизма переноса тепла, мы убеждаемся в том, что сущность тепловых процессов проявляется через элементарные механические перемещения и взаимодействия, то есть в основе учения о теплоте лежат законы механики.

Механические законы и модели оказались очень плодотворными и при объяснении новых достижений науки. Так классическая теория проводимости металлов может быть объяснена движением свободных электронов, а полупроводников - движением электронов и дырок, бестоковая передача энергии в полупроводниках и диэлектриках - движением экситонов (электронно-дырочных пар); явление сверхпроводимости - движением спаренных электронов (куперовских пар).

Как видим, сущность всех приведенных физических явлений проявляется через элементарные механические перемещения, однако эти явления качественно отличаются от механических взаимодействий, и к ним не сводятся. Фактически ни одно явление природы не может быть в должной мере понято без уяснения его механической стороны.

Вместе с тем, следует отметить еще одну важную особенность предмета теоретической механики. Она является идеальным образчиком современной теории научного познания, в связи с математическим моделированием разнообразных динамических процессов, то есть процессов, которые изменяются с течением времени. Начало развития динамических моделей положено законами И. Ньютона. Классическим примером, иллюстрирующим значение динамических моделей в исследовании явлений природы, является достижения в области небесной механики и астрофизики. В середине 19 столетия выводы динамической модели Солнечной системы, объектами которой были видимые планеты, вошли в противоречие с накопленными к тому времени наблюдениями. Так, движение Урана не соответствовало теоретическим расчётам в рамках существовавшей модели. Для устранения этого противоречия французский ученый У. Леверье предположил существование новой планеты, названной им Нептуном, и, используя законы Ньютона, вычислил массу Нептуна и ее траекторию движения. Астроном Галле открыл эту планету в том месте, которое указал Леверье. Аналогичным образом в 1930 г. была открыта еще одна планета Солнечной системы - Плутон.

А. А. Фридман в рамках современной механики (теории относительности) в 1924 г. построил динамическую теорию Вселенной, из результатов которой следовало ее расширение. Через три года американский астроном Хаббл в результате наблюдений подтвердил это расширение (разбегание галактик).

Следует отметить также большие успехи динамического (математического) моделирования и в области квантовой физики.

Фундаментальное значение теоретической механики для развития инженерной науки и для всего современного естествознания связано, прежде всего, с тем, что ее законы и способы математического моделирования (с использованием аналитических и численных методов на базе ЭВМ) широко применяются при исследовании основных процессов и явлений, которые изучаются в данной конкретной науке. Теоретическая механика составляет научную базу современной техники и технологии при решении самых разнообразных и сложных инженерных задач в области создания эффективных энергетических установок, систем управления, робототехники и автоматики, экологии и др. Решение абсолютного большинства инженерных задач связано с расчётом, проектированием и изготовлением объекта, а это возможно лишь на основе глубокого понимания и свободного владения законами и методами механики.

Поэтому теоретическая механика входит как обязательная фундаментальная дисциплина общенаучного уровня подготовки бакалавров или специалистов для всех инженерных специальностей. На изучение курса отводится, как правило, 1 или 2 семестра. Сокращение количества часов на изучение дисциплины с одновременным увеличением объема курса, читаемого для большинства специальностей в высшей технической школе, вызывает необходимость изменения методики преподавания теоретической механики, поскольку интенсификация процесса обучения на современном этапе возможна только на основе широкого применения компьютерной техники. В предлагаемом курсе наряду с традиционной, проводится также и компьютерная идеология, которая предполагает при решении задач механики использование не только аналитических, но и широкое применение численных методов. Концепция данного курса предполагает создание методической базы на основе ЭВМ.

§2. Составные части теоретической механики. Простейшие понятия

Теоретическая механика изучает общие законы равновесия и движения материальных тел и ее подразделяют на статику, кинематику и динамику. Статика посвящена изучению законов равновесия, в кинематике изучается движение тел с геометрической точки зрения, независимо от действия на них сил. Динамика посвящена изучению движения тел с учетом их взаимодействия с окружающими телами.

Построение всех естественных наук начинается с аксиом и понятий (моделей), которые использует данная наука для того, чтобы описать те формы движения материи, которые она рассматривает.

Аксиомы - это те предложения теории, которые принимаются как начальные, причем вопрос об их истинности решается в рамках практическо-позна-вательной деятельности. В механике, правда, аксиоматический метод не получил еще такую завершенную форму, как геометрия в математике.

Элементарные (простейшие) понятия - понятия, которые логически нельзя определить с помощью еще более простых понятий; для таких понятий посредством системы аксиом вводятся основные свойства и отношения определяемого объекта. В современной теории познания такое определение элементарных понятий называется аксиоматическим. Таким образом, аксиомы являются не только исходными предложениями теории, но одновременно являются также и определением элементарных понятий этой теории, ибо описывают основные свойства и отношения изучаемых объектов теории.

В теоретической механике такими элементарными понятиями являются: пространство и время, материальная точка и абсолютно твёрдое тело, сила, масса и другие.

Аксиомы механики впервые были сформулированы И. Ньютоном в его знаменитом труде “Математические начала натуральной философии” (1687 г.). Представления Ньютона о пространстве, времени, механическом движении и их количественных мерах оказались очень хорошей моделью действительности, проверенной всей последующей 300-летней практикой человечества.

Пространство и время, представляя собою всеобщие формы существования материи, являются объективной реальностью и неразрывно связаны с материей и ее движением. Пространство характеризует структурность и про-тяжённость материальных систем, время - продолжительность и последовательность реальных явлений и событий. Одним из исходных положений механики служит постулат об абсолютном пространстве и абсолютном времени. По Ньютону, абсолютное пространство и время по самой своей сущности безотносительны к чему-либо внешнему, причём пространство остается всюду одинаковым и неподвижным, а время повсюду протекает одинаково.

Особенностью такого пространства является то, что его свойства не зависят от расположения и движения в нём материальных тел. Это пространство безгранично, однородно и изотропно, оно является трехмерным и в нём справедливы все аксиомы и теоремы геометрии Евклида. Абсолютное время также является безграничным и однородным и для него характерна абсолютность одновременности событий в любой системе координат. Эти глобальные свойства пространства и времени базируются на законе инерции и инвариантности основного закона динамики (преобразования Галилея-Лоренца), а соответствующая система отсчета, в которой пространство и время имеют эти фундаментальные свойства симметрии, называется инерциальной.

Характеризуя свойства пространства и времени классической механики, укажем еще на одну связь между свойствами симметрии пространства (однородность и изотропность) и времени (однородность) с общими законами природы. Известная теорема Е. Нётер (1918 г.) устанавливает связь между пространственно-временной симметрией и законами сохранения. Согласно этой теореме из однородности и изотропности пространства вытекает закон сохранения количества движения и кинетического момента, а из однородности времени - закон сохранения энергии.

В связи с определением механического движения в пространстве с течением времени возникает необходимость в определении элементарного носителя механического движения. Как раз по отношению к такому объекту справедливы все аксиомы классической механики.

Материальная точка - понятие, которое вводится в механике для обозначения элементарного объекта, обладающего свойствами механического взаимодействия, который рассматривается как геометрическая точка, имеющая массу. На практике тело конечных размеров можно считать материальной точкой при его поступательном движении или в сложном движении, когда относительным вращением можно пренебречь. Движение механической системы можно также моделировать движением её центра масс. Ибо при движении любой механической системы ее центр масс движется как материальная точка с массой, которая равна массе всей системы, под влиянием всех внешних сил, действующих на систему.

Введение понятия материальной точки даёт возможность для математического уточнения понятий движения, пространства и времени.

Движение абстрактно рассматривается как перемещение материальных точек по траекториям. Для характеристики движения вводятся эмпирические понятия о пути, времени перемещения, о скорости и ускорении и т.д.

Пространство абстрактно задается в виде системы координат, в которой располагаются материальные точки (или их системы).

Время вводится как независимый параметр. В классической механике время рассматривается как четвертая координата, независимая от пространственных.

С введением понятия материальной точки возникает возможность математического определения механических объектов; при этом **тело** рассматривается как система материальных точек. **Сплошная среда** может рассматриваться как система, состоящая из бесконечного числа материальных точек, которые «сплошь» примыкают друг к другу, без промежутков между ними. Реологические свойства физических тел при этом определяются характером связей между материальными точками сплошной среды, в зависимости от интенсивности её внутренних напряжений и внешних нагрузок. Например, **абсолютно твёрдое тело** - сплошная среда с «жёсткими» идеальными связями, для которой расстояние между любыми точками остается постоянным во время его движения или покоя, не зависимо от интенсивности действующих нагрузок. Аналогичным образом можно определить деформируемые и текучие среды.

Раздел I. Статика

Глава 1. Основные понятия и аксиомы статики

§ 1. Предмет статики

Статика - раздел теоретической механики, в котором изучаются законы равновесия твёрдых тел под действием сил, а также условия эквивалентности этих сил. При этом под **равновесием тела** понимают такое состояние тела, при котором оно под действием приложенных сил остается в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчета.

§ 2. Сила и системы сил

Понятие силы является одним из основных простейших понятий механики. **Сила** - векторная величина, которая является мерой механического воздействия одного тела на другое. В теоретической механике рассматриваются лишь силы гравитационной (сила тяжести) и электромагнитной (сила трения, давления и деформации) природы. Из опыта известно, что действие силы характеризуется следующими тремя факторами: 1) точкой приложения; 2) направлением и 3) величиной. В заданной декартовой системе координат вектор силы $\overline{F}$ определяется тремя координатами F_x, F_y, F_z , а величина и направление силы в заданной координатной системе определяются следующими соотношениями:

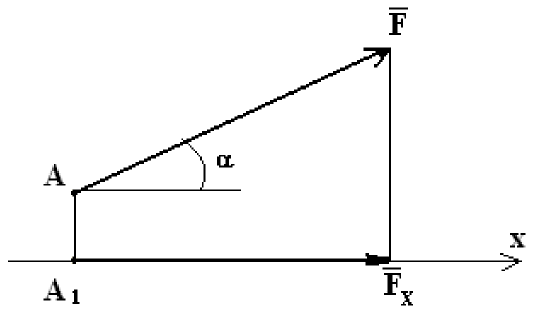
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\overline{F},\hat{\ } x) = F_x / F,\ \cos(\overline{F},\hat{\ } y) = F_y / F,\ \cos(\overline{F},\hat{\ } z) = F_z / F.$$

Очень важным с практической точки зрения понятием является проекция силы на ось координат.

Проекция силы (подобно проекции любого вектора) на ось является алгебраической величиной, которая равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и осью.

Проекция силы положительна, если проекция на ось начала и конца дает вектор, направленный в положительном направлении оси, в противном случае - проекция силы отрицательная (рис. 1.1)



$$Пр_x\ \overline{F} = F_x = \pm F\cos\alpha \qquad (1.1)$$

(α–острый угол между осью **x** и силой $\overline{F}$)

Рис. 1.1

Пример. Дано:

силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$; углы α, β;

$OABCO_1A_1B_1C_1$ - прямоугольный параллелепипед,

$AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$.

Определить: F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}

F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}

F_{3x}, F_{3y}, F_{3z}

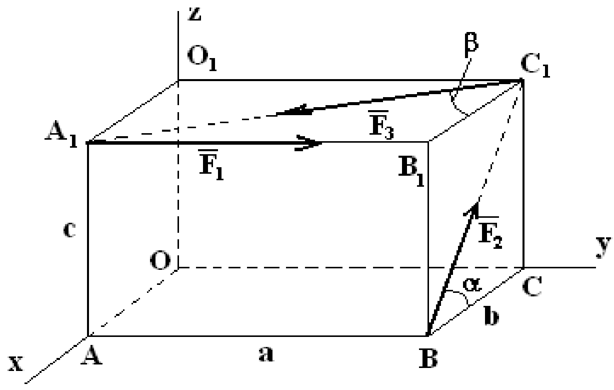


Рис. 1.2

Решение: $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = F_1$, $F_{1z} = 0$;

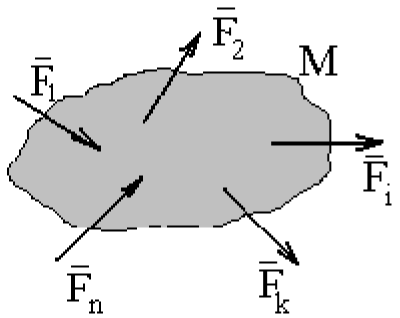
$F_{2x} = - F_2 \cos\alpha$, $F_{2y} = 0$, $F_{2z} = F_2 \sin\alpha$;

$F_{3x} = F_3 \cos\beta$, $F_{3y} = - F_3 \sin\beta$, $F_{3z} = 0$,

где $$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

<u>Система сил</u> - любая совокупность сил, действующих на тело



$\mathbf{S}\,(\overline{F}_1 , \overline{F}_2 ,\ldots, \overline{F}_n)$ - система сил

Рис. 1.3

<u>Главный вектор системы сил</u> - это векторная сумма всех сил системы

$$\overline{R}\,(S) = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ . \qquad (1.2)$$

Если известны координаты сил системы **S** $\overline{F}_i (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ в заданной системе координат (Oxyz), то величина и направление главного вектора $\overline{R}\,(\mathbf{S})$ определяются следующими соотношениями:

$$R = |\,\overline{R}\,| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (1.3)$$

$\cos(\overline{R}\ ,\hat{}\ x) = R_x / R$, $\cos(\overline{R}\ ,\hat{}\ y) = R_y / R$, $\cos(\overline{R}\ ,\hat{}\ z) = R_z / R$, где $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$.

Уравновешенная система сил - такая совокупность сил, под действием которой тело находится в равновесии

$$\mathbf{S}\,(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \equiv 0.$$

Эквивалентные системы сил - две или несколько систем сил, которые имеют одну и ту же уравновешенную систему сил.

Иными словами, две системы сил $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$ эквивалентны $\mathbf{S_1} \equiv \mathbf{S_2}$, если каждая из них в совокупности с одной и той же третьей системой $\mathbf{S_3}$ даёт уравновешенную систему сил

$$(\mathbf{S_1}, \mathbf{S_3}) \equiv 0, \ (\mathbf{S_2}, \mathbf{S_3}) \equiv 0.$$

Равнодействующая системы сил - сила, эквивалентная данной системе сил

$$\overline{\Phi}\,(\mathbf{S}) \equiv \mathbf{S}.$$

§ 3. Моменты сил относительно полюса и оси. Момент пары сил

Силовое водействие не является исчерпывающей количественной мерой механического взаимодействия между телами, такими дополнительными характеристиками механического взаимодействия являются моменты сил относительно полюса и оси.

Момент силы относительно полюса - вектор, приложенный в этом полюсе и равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = [\overline{r} \times \overline{F}] \qquad (1.4)$$

Величина момента силы равна

$$m_0(\overline{F}) = r\,F\,\sin\alpha\,. \qquad (1.5)$$

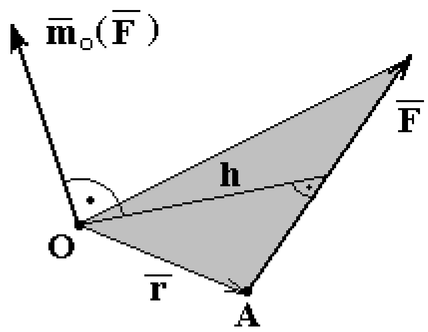


Рис. 1.4

Иными словами, моментом силы относительно полюса **O** называют вектор, приложенный в этом полюсе и по величине равный произведению модуля силы на плечо силы (**плечо силы** - кратчайшее расстояние от полюса **O** до линии действия силы)

$$m_o(\overline{F}) = F\,h \quad (h \text{ - плечо силы}). \qquad (1.6)$$

Момент силы $\overline{m}_0(\overline{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через полюс **O** и силу $\overline{F}$, в ту сторону, откуда виден поворот плеча силой против хода часовой стрелки.

<u>Момент силы относительно оси</u> - проекция на ось момента силы относительно любого полюса этой оси

$$m_z(\overline{F}) = \text{Пр}_z\, \overline{m}_0(\overline{F}),\ O \in z \qquad (1.7)$$

Рассмотрим вычисление момента силы относительно оси. Проведём плоскость $\pi \perp 0z$, $\overline{F}_1$ - проекция силы $\overline{F}$ на плоскость π, $O_1C_1 = h_1$ - плечо этой проекции $\overline{F}_1$ относительно полюса O_1.

Угол между плоскостями треугольников ΔOAB и $\Delta\, O_1A_1B_1$ равен α, как угол между нормалями к этим плоскостям $\overline{m}_0(\overline{F}) \perp \Delta\, OAB$, $O_1z \perp \Delta\, O_1A_1B_1$. Согласно теореме стереометрии площадь треугольника $\Delta\, OAB$ и площадь его проекции (треугольник $\Delta\, O_1A_1B_1$) связаны соотношением (рис. 1.5)

$$S(\Delta\, O_1A_1B_1) = S(\Delta\, OAB)\cos\alpha,$$

причем $\quad 2S(\Delta\, O_1A_1B_1) = F_1 h_1$,

а $\quad 2S(\Delta\, OAB) = F h$.

Учитывая это, получим

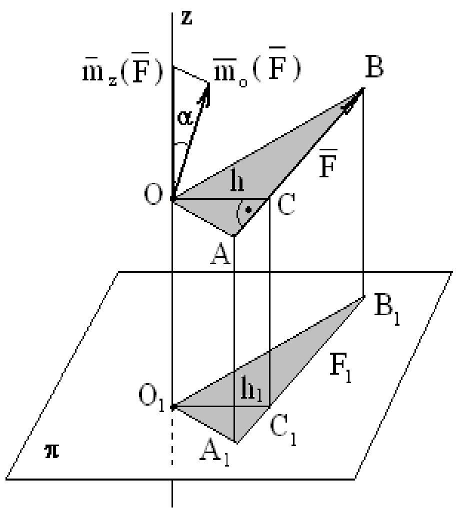


Рис. 1.5

$$m_z(\overline{F}) = \text{Пр}_z\, \overline{m}_0(\overline{F}) = m_0(\overline{F})\cos\alpha = F h \cos\alpha = 2S(\Delta\, OAB)\cos\alpha =$$
$$= 2S(\Delta\, O_1A_1B_1) = F_1 h_1.$$

Окончательно:

$$\boxed{m_z(\overline{F}) = \pm F_1 h_1} \qquad (1.8)$$

Момент силы относительно оси $m_z(\overline{F})$ - скалярная величина, по модулю равная произведению модуля F_1 проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции h_1 (плечо проекции силы - это кратчайшее расстояние от оси до линии действия проекции силы). Момент силы относительно оси считается положительным, если со стороны положительного направления оси видно, что проекция силы поворачивает своё плечо против хода часовой стрелки и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Пример. Дано: силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$; углы α, β; $ABCOA_1B_1C_1O_1$ - - прямоугольный параллелепипед

Решение. Из рисунка 1.2 находим

$m_x(\overline{F}_1) = -F_1c$, $m_y(\overline{F}_1) = 0$, $m_z(\overline{F}_1) = F_1b$

$m_x(\overline{F}_2) = F_2 a \sin\alpha$, $m_y(\overline{F}_2) = -F_2 b \sin\alpha$

Определить: $m_x(\overline{F}_1)$, $m_y(\overline{F}_1)$, $m_z(\overline{F}_1)$, $m_z(\overline{F}_2) = F_2\, a \cos\alpha$

$m_x(\overline{F}_2)$, $m_y(\overline{F}_2)$, $m_z(\overline{F}_2)$, $m_x(\overline{F}_3) = F_3\, c \sin\beta$, $m_y(\overline{F}_3) = F_3\, c \cos\beta$,

$m_x(\overline{F}_3)$, $m_y(\overline{F}_3)$, $m_z(\overline{F}_3)$. $m_z(\overline{F}_3) = - F_3\, a \cos\beta$,

где $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$,

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

<u>Главный момент системы сил относительно полюса (оси)</u> - векторная (алгебраическая) сумма моментов всех сил системы относительно данного полюса (данной оси).

$$\overline{M}_0(S) = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_i) \qquad (M_z(S) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i)). \qquad (1.9)$$

Свойства главных моментов системы сил.

1^0. **Теорема 1** (о связи главных моментов относительно полюса и оси).

Главный момент системы сил относительно оси равен проекции на эту ось главного момента этой системы сил относительно любого полюса данной оси.

$$M_z(S) = Пр_z\, \overline{M}_0(S), \; O \in z \qquad (1.10)$$

Докозательство:

$$M_z(S) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} Пр_z\, \overline{m}_0(F_i) = Пр_z \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0(F_i) = Пр_z\, \overline{M}_0(S) .$$

2^0. **Теорема 2** (об изменении главного момента при изменении полюса)

Главный момент системы сил относительно полюса при переходе к другому полюсу получает векторное приращение, равное моменту относительно второго полюса главного вектора системы, приложенного к первому полюсу.

$$\overline{M}_{o_2}(S) = \overline{M}_{o_1}(S) + \overline{O_2O_1} \times \overline{R}(S) \qquad (1.11)$$

Дано: Система сил **S** $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$,

O_1 - первый полюс, O_2 - второй полюс

Доказать: (1.11)

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Рассмотрим произвольную силу $\overline{F}_i$ системы **S**, и определим момент данной силы относительно каждого из полюсов

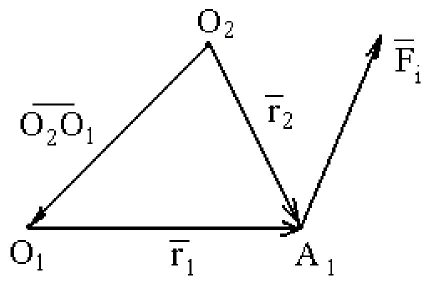


Рис.1.6

$\overline{m}_{0_1}(\overline{F}_i)=\overline{r}_1 \times \overline{F}_i$, $\overline{m}_{o_2}(\overline{F}_i)=\overline{r}_2 \times \overline{F}_i$, причём $\overline{r}_2=\overline{r}_1+\overline{O_2O_1}$, тогда

$\overline{m}_{o_2}(\overline{F}_i)=\overline{r}_2 \times \overline{F}_i=(\overline{r}_1+\overline{O_2O_1}) \times \overline{F}_i=\overline{r}_1 \times \overline{F}_i+\overline{O_2O_1} \times \overline{F}_i$

или $\overline{m}_{o_2}(\overline{F}_i)=\overline{m}_{o_1}(\overline{F}_i)+\overline{O_2O_1} \times \overline{F}_i$, причём это имеет место для любой из сил $\overline{F}_i(i=1, 2,..., n)$ системы S;

Сложим все данные соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{m}_{o_2}(\overline{F}_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{m}_{o_1}(\overline{F}_i)+\overline{O_2O_1} \times \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F}_i$,

или $\overline{M}_{o_2}(S)=\overline{M}_{o_1}(S)+\overline{O_2O_1} \times \overline{R}(S)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Если главный вектор системы сил равен нулю, то главный момент системы не зависит от выбора полюса.

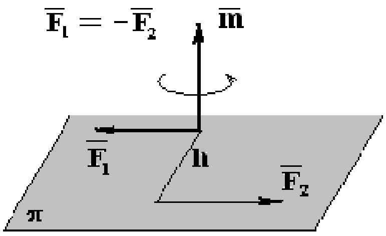


Рис. 1.7

Пара сил - система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны. Плоскость **π**, в которой расположены силы пары, называется **плоскостью пары**, а расстояние **h** между линиями действия сил пары называют **плечом пары** (рис1.7).

Известно, что под действием пары сил свободное тело начинает вращательное движение, поэтому пару сил нельзя заменить одной силой (равнодействующей), а вращательный эффект пары сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ определяется моментом пары.

Рассмотрим главный вектор и главный момент пары сил:

$$\overline{R}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)=\overline{F}_1+\overline{F}_2=0,$$

$$\overline{M}_{A_2}=\overline{m}_{A_2}(\overline{F}_1)+\overline{m}_{A_2}(\overline{F}_2)=\overline{m}_{A_2}(\overline{F}_1).$$

Так как главный вектор пары сил равно нулю, то согласно следствию теоремы 2 ее главный момент не зависит от выбора полюса, а его величина равна

$$M(\overline{F}_1, \overline{F}_2)=M_{A_2}=m_{A_2}(\overline{F}_1)=F_1 h.$$

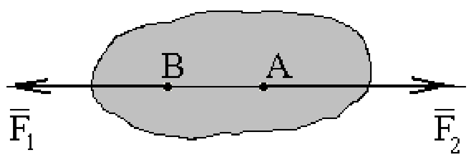
Главный момент пары сил называют **моментом пары**, по величине он равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары

$$\boxed{M = F_1 h} \quad . \tag{1.12}$$

Момент пары приложен в любой точке плоскости пары, направлен перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда видно, что пара поворачивает своё плечо против хода часовой стрелки .

§4. Аксиомы статики

Аксиома I (о равновесии системы двух сил) Для того, чтобы абсолютно твёрдое тело находилось в равновесии под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы имели одинаковую величину и действовали по одной прямой в противоположных направлениях.



$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$

Рис. 1.8

Такую систему двух равных по величине и направленных вдоль одной прямой в противоположные стороны сил в дальнейшем будем называть статическим нулем.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \equiv 0 .$$

Аксиома II (о добавлении или отбрасывании статического нуля) Равновесие абсолютно твердого тела не нарушится, если к системе действующих на него сил добавить или отбросить статический нуль.

Следствие.

Не нарушая равновесия твердого тела, силу можно переносить вдоль линии её действия.

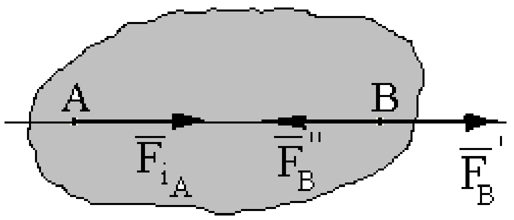


Рис. 1.9

Д о к а з а т е л ь с т во:

Пусть на тело действует уравновешенная система сил $S\,(\overline{F}_1, \overline{F}_2,..., \overline{F}_n) \equiv 0$;

$\overline{F}_{i_A}$ - одна из сил системы S, приложенная в точке A.

На линии действия силы $\overline{F}_i$ берём произвольную точку **B** и приложим в ней статический нуль $(\overline{F}_B{}', \overline{F}_B{}'') \equiv 0$, причём $\overline{F}_B' = \overline{F}_{i_A}$ и $\overline{F}_B'' = -\overline{F}_{i_A}$, то есть система сил $(\overline{F}_{i_A}, \overline{F}_B{}'')$ является статическим нулем $(\overline{F}_{i_A}, \overline{F}_B{}'') \equiv 0$. Согласно аксиоме I статики при этих операциях равновесие тела не нарушится.

Следовательно, $S\,(\overline{F}_1, \overline{F}_2,..., \overline{F}_{iA},..., \overline{F}_n) \equiv S(\overline{F}_1, \overline{F}_2,..., \overline{F}_{iA}, \overline{F}_B', \overline{F}_B{}'',..., \overline{F}_n)$, теперь отбросим статический нуль $(\overline{F}_{iA},\ \overline{F}_{B}'') \equiv 0$. Тогда

$$S\ (\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,...,\ \overline{F}_{iA},...,\ \overline{F}_n) \equiv S\ (\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,...,\ \overline{F}_B',...,\ \overline{F}_n).$$

В соответствии с определением эквивалентности: $\overline{F}_{iA} \equiv \overline{F}_B'$, а это равносильно переносу силы $\overline{F}_i$ вдоль линии ее действия из точки A в точку B.

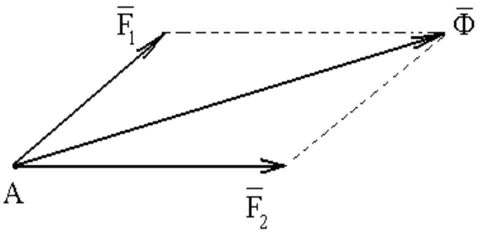
Таким образом, в статике силы являются скользящими векторами, следовательно, они могут быть приложенные в любой точке линии действия силы.

Аксиома III (о параллелограмме сил)

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и равна их векторной сумме

$$\overline{\Phi}_A \equiv (\overline{F}_1,\ \overline{F}_2)_A, \qquad \overline{\Phi} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

Величину равнодействующей силы $\overline{\Phi}$ как векторную сумму сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ вычисляют по формуле диагонали параллелограмма:



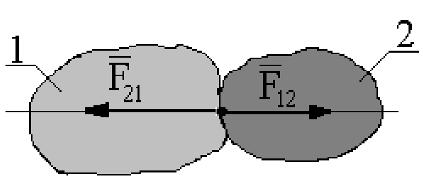
$$\Phi = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(F_1 \hat{,} F_2)}\ . \qquad (1.13)$$

Рис. 1.10

Аксиома IV (закон действия и противодействия)

Два тела взаимодействуют с силами, равными по величине, направленными по одной прямой в противоположных направлениях.

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21},$$



$\overline{F}_{12}$ - сила, с которой тело **1** действует на тело **2**,

$\overline{F}_{21}$ -сила, с которой тело **2** действует на тело **1**.

Эти силы $\overline{F}_{12}$ и $\overline{F}_{21}$ не являются статическим нулём, так как приложены к различным телам.

Рис. 1.11

Аксиома V (принцип затвердевания)

Равновесие деформируемого тела не нарушится при его затвердевании.

Под затвердением понимаем преобразование деформированного тела в абсолютно твердое тело. Содержание аксиомы о затвердевании состоит в том, что условия равновесия деформированного тела, которое находится под действием некоторой системы сил, являются достаточными условиями равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием той же системы сил. Принцип затвердевания расширяет область применения законов статики твердого тела на случай равновесия деформированных тел. Например, задача о равновесии электрического провода, являющегося деформированным телом, при определении натяжения провода почти полностью решается методами статики твердого тела.

§ 5. Связи и их реакции

Материальный объект, условия равновесия которого изучаются, находится во взаимодействии с окружающими телами, причем механическое взаимодействие этих тел осуществляются непосредственно, контактным образом, или на расстоянии. Характер и количественная мера силового дальнодействия в подавляющем большинстве задач статики известны, а силы контактного взаимодействия, как правило, неизвестны и подлежат определению из условий равновесия. Причем характер контактного взаимодействия зависит от ограничений, накладываемых на перемещение рассматриваемого тела.

В теоретической механике различают свободные и несвободные тела. Если материальное тело может занимать любое положение в пространстве и на скорости точек этого тела, не наложены никакие ограничения, то такое **тело называют свободным**. В противном случае **тело несвободно**, а тела, которые ограничивают свободу движения этого тела, называются **связями**. Сила, с которой связь действует на данное тело, называется **реакцией связи**. Таким образом, среди сил, действующих на тело, будем различать силы реакций связей, а остальные силы назовём **активными** или **задаваемыми**.

На практике при изучении равновесия (движения) тела часто применяют принцип освобождения от связей.

Аксиома освобождения от связей :

любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, освобождая его от связей и заменив их действия реакциями связей, приложенных к данному телу.

На основе этого принципа, например, проблема о равновесии твердого тела сводится к проблеме об уравновешенности системы сил (активных и реакций связей), действующих на данное тело, освобожденное от связей, т. е. когда действия связей заменено силами реакций связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять отброшенные связи силами реакций связей. Это является одной из важных задач статики. Рассмотрим отдельные виды связей и их реакции.

Идеальные связи

Идеальные связи не оказывают сопротивление перемещению данного тела вдоль поверхности связи. Если поверхности соприкасающихся тел (связи и данного тела) хорошо отполированы и смазаны, то сила трения мала и работа по относительному перемещению этих тел равна нулю. Поэтому, направление реакции идеальной связи противоположно тому направлению, в котором связь препятствует движению тела.

1^0. Г л а д к а я   о п о р н а я   п о в е р х н о с т ь. **Гладкая (идеальная) поверхность** не создаёт сопротивление при перемещении вдоль неё соприкасающегося тела. Поэтому реакция гладкой поверхности не может иметь составляющую в касательной плоскости к поверхности. Следовательно, реакция $\overline{R}$ гладкой поверхности направлена перпендикулярно этой плоскости, то есть вдоль нормали к поверхности (рис. 1.12).

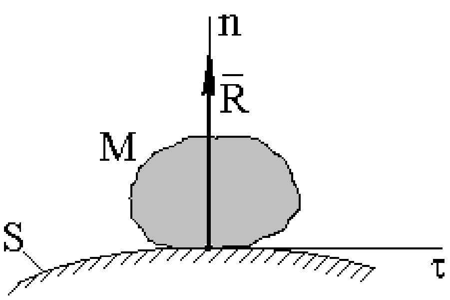


Рис. 1.12

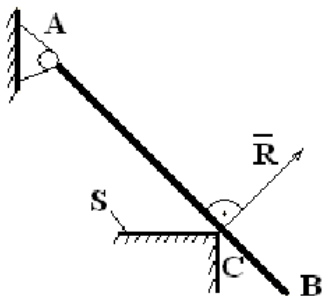


Рис. 1.13

2^0. **Н е р е г у л я р н а я   п о в е р х н о с т ь.** Пусть стержень AB в точке C опирается на поверхность S связи, причём в точке C к поверхности S нельзя провести единственную касательную плоскость. Такую поверхность в точке C называют **нерегулярной.** В этом случае стержень AB является связью по отношению к поверхности S, и ее реакция направлена по нормали к стержню в точке C. По закону действия и противодействия реакция поверхности S в точке C направлена по нормали к регулярной поверхности стержня AB (рис. 1.13).

3^0. **К а т к о в а я   о п о р а** (шарнирно-подвижная опора)

В этом случае опорная поверхность S катка не оказывает сопротивление перемещению катка вдоль этой поверхности, поэтому реакция катка направлена перпендикулярно к опорной поверхности катка (рис. 1.14).

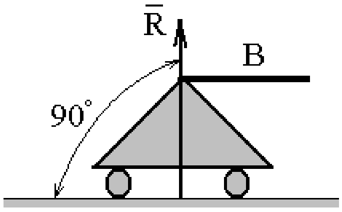


Рис. 1.14

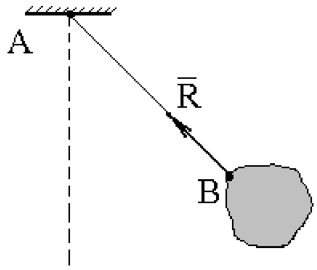


Рис. 1.15

4^0. **Гибкая связь**. Такая связь осуществляется с помощью нити, верёвки или аналогичными телами (шнур, трос, цепь). Она предполагается нерастяжимой, гибкой и невесомой. В этом случае реакция натянутой нити направлена вдоль связи, от тела к точке подвеса A (рис. 1.15).

5^0. **Неподвижный цилиндрический шарнир** (подшипник) является наиболее распространенной в технике связью. Конструктивно она состоит из подвижного цилиндрического вала (оси), который помещён в цилиндрическую неподвижную обойму (втулку). Внутренний диаметр обоймы равен диаметру вала, а вал может вращаться вокруг оси шарнира O. Реакция $\overline{R}$ шарнирно-недвижиной опоры проходит через центр шарнира O и точку контакта C вала и обоймы (рис.1.16). Однако эту точку C заранее указать нельзя, поэтому реакция цилиндрического шарнира $\overline{R}$ размещена в плоскости xOy, перпендикулярной оси шарнира Oz. Неизвестный вектор $\overline{R}$ на плоскости xOy определяется двумя составляющими $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y,$$

величины которых R_x и R_y , определяются из условий равновесия.

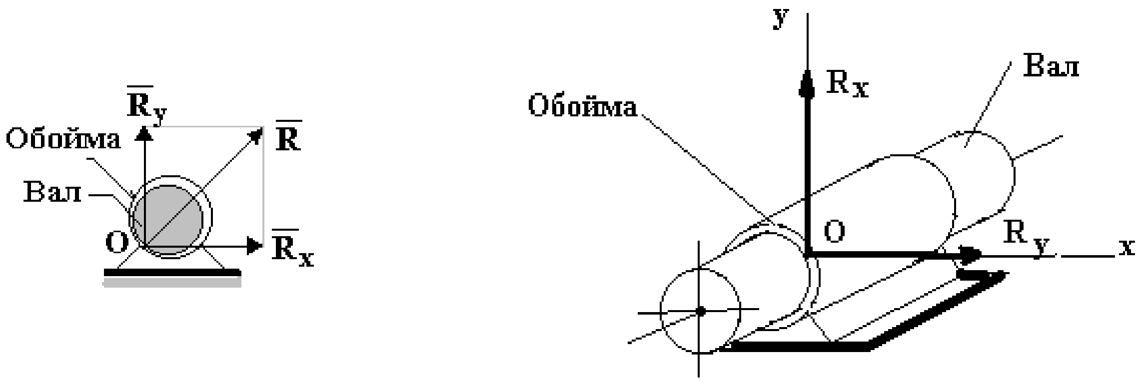


Рис.1.16

6^0. **Сферический шарнир (подпятник)**. Сферический шарнир является наиболее сложным видом связей, которые применяются в технике, это связано сложностью технологической обработки сферических поверхностей. Такой тип шарниров часто имеет место в живой природе для костных суставов, которые обеспечивают самую большую их подвижность. Сферический шарнир представляет собой идеально гладкую сферу (шаровую пяту), которая помещена в неподвижную сферическую обойму (рис. 1.17). В данном случае силовое воздействие шаровой пяты на сферическую обойму сводится к силе, направление которой в пространстве, а также её величина целиком обусловлены остальными силами, действующими на тело, для которого этот шарнир является связью. В общем случае реакция такого шарнира раскладывается на три составляющие

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z \ .$$

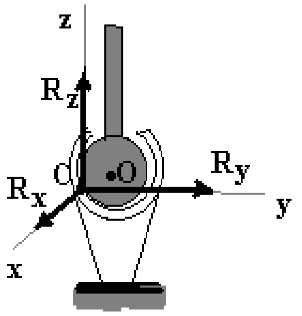


Рис. 1.17

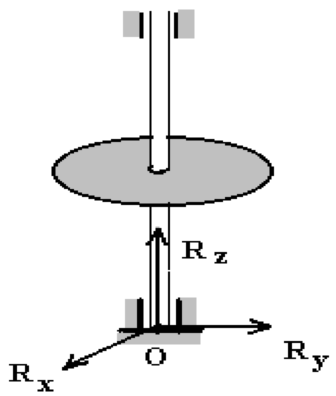


Рис. 1.18

Величины $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$, $\overline{R}_z$ определяются из условий равновесия.

7⁰. П о д п я т н и к представляет собою совокупность цилиндрического шарнира и опорной плоскости (рис. 1.18), поэтому реакция такой опоры $\overline{R}$ проходит через недвижную точку **О** подпятника и расположена в пространстве

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z \, ,$$

составляющие $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$, $\overline{R}_z$ определяются из уравнений равновесия.

8^0. **И д е а л ь н ы й с т е р ж е н ь** - невесомое абсолютно твёрдое тело АВ, шарнирно закрепленное по его концам А и В. Если стержень находится в равновесии, то силы (реакции шарниров А и В), приложенные к концам стержня, по аксиоме 1, должны быть направлены вдоль стержня. Следовательно, идеальный стержень нагружен по его концам, работает только на растяжение или сжатие. Реакцию $\overline{S}$ стержня всегда направляют внутрь стержня, тогда положительный знак S указывает на то, что стержень работает на растяжение, в противном случае, когда $S < 0$ - на сжатие (рис. 1.19).

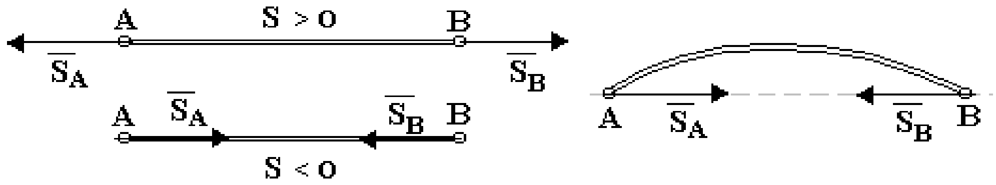


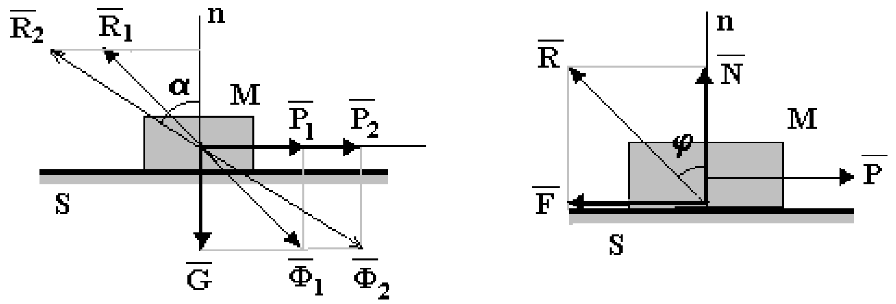
Рис. 1.19

Шероховатые опоры. Трение скольжения.

Реакция гладкой поверхности, на которой расположено неподвижное тело, направлена по нормали к этой поверхности. Поэтому малейшая сила, действующая на тело вдоль такой гладкой поверхности выводит его из состояния покоя и начинается скольжение. Если же поверхность связи шероховатая, то скольжение тела начинается только при определённом значении продольной силы. Такое сопротивление движению, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется **трением скольжения.**

Возникновение силы трения скольжения объясняется двумя факторами: во-первых, поверхности трущихся тел не являются гладкими, микрорельеф этих поверхностей состоит из выступов и углублений, взаимодействие которых препятствует относительному скольжению тела по поверхности другого. Такое трение называют **геометрическим трением;** с другой стороны, интенсивное взаимодействие выступов и углублений поверхностей контакта приводит к тому, что отдельные молекулы поверхностных слоёв сближаются на столько, что между ними возникают значительные силы молекулярного притяжения. Такое трение называется **молекулярным**. Совершенно очевидно, что интенсивность геометрического и молекулярного трения прямо пропорциональны давлению одного тела на другое.

Рассмотрим более подробно вопрос об измерении сил трения скольжения. Выясним, прежде всего, как направлена реакция шероховатой поверхности S. Пусть к неподвижному телу **M** веса **G** (рис. 1.20) приложена сила $\overline{P}_1$**,** направленная вдоль этой поверхности



а) **б)**

Рис. 1.20

На тело действует три силы: $\overline{G}$, $\overline{P}_1$ и реакция поверхности $\overline{R}_1$, причём эта система сил уравновешена $(\overline{G}, \overline{P}_1, \overline{R}_1) \equiv 0$. Найдём равнодействующую сил $\overline{G}$ и $\overline{P}_1$ (аксиома IV): $\overline{\Phi}_1 \equiv (\overline{G}, \overline{P}_1)$ $(\overline{\Phi}_1 = \overline{G} + \overline{P}_1)$. В результате $(\overline{\Phi}_1, \overline{R}_1) \equiv 0$, а по аксиоме I эти силы являются статическим нулём и, следовательно, реакция шероховатой поверхности $\overline{R}_1 = - \overline{\Phi}_1$ и она отклонена от вертикали на некоторый угол α. Чем больше величина силы $\overline{P}_2$ (рис. 1.20а), при условии, что тело **M** находится в покое, тем больше отклоняется от вертикали **n** полная реакция $\overline{R}_2$ шероховатой поверхности. Наконец, если величина силы $\overline{P}$ превзойдёт некоторое значение $\overline{P}_{max}$, начнётся скольжение тела по шероховатой поверхности S. Максимальное значение угла α, при котором ещё сохраняется покой тела, называется **углом трения** ($\varphi = \alpha_{max}$, φ - угол трения).

Если вращать $\overline{P}_{max}$ вокруг нормали **n ,** то реакция $\overline{R}$ опишет конус. Этот конус называют **конусом трения**.

Разложим реакцию $\overline{R}$ шероховатой поверхности S на составляющие, направленные по касательной и нормали к поверхности S :

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F} \ ,$$

где $\overline{N}$ **- нормальная реакция**, она равна давлению тела **M** на поверхность S ($N = G$);

$\overline{F}$ - **статическая сила трения скольжения** (сила трения), она направлена вдоль поверхности S (по касательной) в сторону, противоположную возможному скольжению, по величине $F = P$.

Из рис. 1.20 б видно, что $F = N \operatorname{tg} \alpha$ и

$$F_{max} = N \operatorname{tg} \varphi \ .$$

Величина $f = \operatorname{tg} \varphi$ называется **коэффициентом статического трения скольжения.** Он является безразмерной величиной и определяется опытным путём. Коэффициент трения зависит от материалов и физического состояния соприкасающихся поверхностей, он не зависит от площади контакта.

Основной закон трения (закон Кулона), применяемый на практике, представляется в следующей форме

$$0 \le F \le F_{max}$$

или

$$0 \le F \le f N , \qquad (1.14)$$

левое предельное равенство соответствует идеально гладкой поверхности, а правое - предельному состоянию равновесия. Закон Кулона (1.14) применяется также и в случае скольжения (движения) тела по шероховатой поверхности, при этом коэффициент трения можно считать постоянным в сравнительно ограниченном диапазоне изменения относительных скоростей трущихся поверхностей и сил давлений и он может зависеть также от площади контакта. Изложенное выше о трении скольжения относится только к сухому трению, при наличии смазки законы трения совсем иные.

Глава 2. Условия равновесия твёрдого тела

Прежде чем установить законы равновесия абсолютно твёрдого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, рассмотрим так называемые элементарные операции над силами, которые представляют собой применение соответствующих аксиом статики.

§ 1. Элементарные операции (ЭО) и их свойства

В статике различают две элементарные операции над силами:
I - ЭО - присоединение или отбрасывание статического нуля, а также перенос силы вдоль линии её действия (применение аксиомы II и её следствия);
II -ЭО - применение правила параллелограмма для сложения и разложения сил (применение аксиомы IV).

Свойства элементарных операций.

При применении элементарных операций:
1) система сил преобразуется в систему, эквивалентную исходной;
2) главный вектор системы сил не изменяется;
3) главный момент системы сил относительно полюса или оси не изменяется.
Все эти свойства элементарных операций вытекают из аксиом II и IV.
Важнейшее значение для вывода условий равновесия твёрдого тела имеет вспомогательная теорема.

§ 2. Основная лемма статики

Произвольную систему сил с помощью элементарных операций можно привести к системе, состоящей из двух сил.

В принципе для доказательства леммы достаточно показать, что система трёх сил с помощью элементарных операций может быть приведена к системе двух сил. В самом деле, добавляя затем к этим двум силам третью из исход-ной системы и повторяя всю процедуру приведения к двум силам, мы, таким образом, приведём любую систему **n** сил к эквивалентной, состоящей из двух сил.

Дано: система трёх сил

$S\,(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \overline{F}_3)$

Доказать, что $S_3\,(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \overline{F}_3) \equiv S_2(\overline{P},\ \overline{Q})$

Доказательство:
а). Пусть система сил S_3 такова, что линии действия каких-либо двух сил системы пересекаются. Для определённости, пусть таким свойством обладают

силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, так что точка **O** является точкой пересечения линий их действия. Перенесём силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ в точку **O** (I - ЭО) и затем найдём для них по правилу параллелограмма равнодействующую (II-ЭО) : $\overline{\Phi} \equiv (\overline{F}_1, \overline{F}_2)$,
в результате $S_3 (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \equiv S_2 (\overline{\Phi}, \overline{F}_3)$.
Для этого случая лемма доказана.
б). Пусть теперь система сил S_3 такова, что никакие две линии действия данной системы трёх сил не пересекаются. Обозначим $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ точки приложения сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ соответственно. Через линию действия $\overline{F}_1$ и точку $\mathbf{A_3}$ проведём плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$, аналогично, через линиию действия силы $\overline{F}_2$ и точку $\mathbf{A_3}$ проводим плоскость $\boldsymbol{\pi_2}$ (рис. 1.21). Эти две плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_2}$, имея общую точку $\mathbf{A_3}$, пересекаются, по крайней мере, по одной прямой. Выберем на этой прямой произвольную точку **B** . Если же плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_2}$ совпадают, то линия **AB** произвольна на этой плоскости.

Соединим отрезками прямых точку $\mathbf{A_1}$ с точками $\mathbf{A_3}$ и **B** , а также точку $\mathbf{A_2}$ с точками $\mathbf{A_3}$ и **B** . Затем разложим силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ по полученным направлениям (II -ЭО)

$$\overline{F}_1 = \overline{F}'_1 + \overline{F}''_1 , \qquad \overline{F}_2 = \overline{F}'_2 + \overline{F}''_2 .$$

Перенесём силы $\overline{F}'_1$ и $\overline{F}'_2$ по линиям их действия в точку $\mathbf{A_3}$, а силы $\overline{F}''_1$ и $\overline{F}''_2$ - в точку **B** (I -ЭО). Силы $\overline{F}'_1$, $\overline{F}'_2$ и $\overline{F}_3$ приложены в точке $\mathbf{A_3}$, приведём их к равнодействующей, применяя дважды I -ЭО

$$(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \overline{F}_3) \equiv \overline{P} .$$

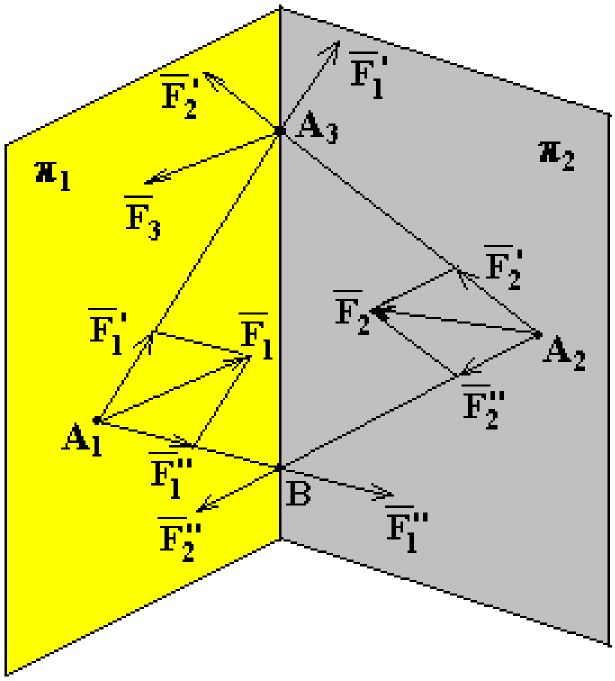


Рис. 1.21

Силы $\overline{F}_1''$ и $\overline{F}_2''$ приложены в одной точке **B** , их так же приведём к равнодействующей

$$(\overline{F}_1'' \ , \ \overline{F}_2'' \ ) \equiv \overline{Q} \ .$$

Таким образом, получаем

$$S_3\,(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \overline{F}_3) \ \equiv \ S_2\,(\ \overline{P}\ ,\ \overline{Q}\ ).$$

Лемма доказана.
Условия равновесия твёрдого тела, под действием произвольной системы сил определяются следующей теоремой.

§ 3. Основная теорема статики

Для уравновешенности произвольной системы сил, действующих на данное тело, необходимо и достаточно, чтобы её главный вектор и главный момент относительно произвольного центра были равны нулю.

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{R}\,(\,S\,) = 0\\ \overline{M}_{\mathbf{0}}\,(\,S\,) = 0\end{array}}\ . \qquad (2.1)$$

Покажем, что эти условия равновесия твёрдого тела под действием сил являются необходимыми и достаточными.

<u>Необходимость</u>

Дано : система сил S уравновешена

$S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \equiv 0$

Доказать: $\overline{R}(S) = 0$, $\overline{M}_0(S) = 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По основной лемме статики систему S с помощью элементарных операций приводим к эквивалентной системе S_2 , состоящей из двух сил: $S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \equiv S_2(\overline{P}, \overline{Q})$.

Система S_2 уравновешена, так как эквивалентна уравновешенной системе S :

$S_2(\overline{P}, \overline{Q}) \equiv 0$.

На основании аксиомы I статики силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ системы S_2 являются статическим нулём, т.е. они равны по величине, действуют по одной прямой в противоположные стороны. Тогда $\overline{R}(S_2) = 0$ и $\overline{M}_0(S_2) = 0$.

Но по свойствам элементарных операций $\overline{R}(S_2) = \overline{R}(S)$ и $\overline{M}_0(S_2) = \overline{M}_0(S)$, так как система S_2 получена из S с помощью элементарных операций. Поэтому $\overline{R}(S) = \overline{R}(S_2) = 0$ и $\overline{M}_0(S) = \overline{M}_0(S_2) = 0$.

Необходимость доказана.

Достаточность

Дано : система сил $S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ такова,
что $\overline{R}(S) = 0$ и $\overline{M}_0(S) = 0$

Доказать, что система S уравновешена

Д о к а з а т е л ь с т в о . По основной лемме статики систему S с помощью элементарных операций приведём к эквивалентной системе $S_2(\overline{P}, \overline{Q})$ двух сил. По свойствам элементарных операций: $\overline{R}(S_2) = \overline{R}(S)$ и $\overline{M}_0(S_2) = \overline{M}_0(S)$. Отсюда, учитывая условия теоремы, получим $\overline{R}(S_2) = 0$ и $\overline{M}_0(S_2) = 0$.

Из первого соотношения следует, что S_2 - пара сил, а из второго - что плечо этой пары равно нулю, т.е. силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ системы S_2 являются статическим нулём, а на основании аксиомы I система $S_2(\overline{P}, \overline{Q}) \equiv 0$ (уравновешена). Но $S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \equiv S_2(\overline{P}, \overline{Q})$, поэтому система S также уравновешена, т.е. $S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \equiv 0$. Теорема доказана.

§ 4. Аналитическая форма условий равновесия

Частные виды уравнений равновесия. Статически определённые
и статически неопределённые задачи.

Согласно основной теореме статики математическая модель равновесия твёрдого тела представляется двумя векторными уравнениями (2.1). В заданной системе координат аналитическая форма условий равновесия произвольной системы сил в проекциях на оси координат представляется в следующей форме:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F_i}) = 0$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F_i}) = 0 \qquad (2.2)$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F_i}) = 0.$$

Таким образом, основная задача статики сводится к решению данной системы уравнений относительно некоторых сил (реакций связей и неизвестных активных сил).

Однако количество и вид уравнений равновесия зависит от характера сил, действующих на тело. Рассмотрим частные виды уравнений равновесия.

1. Пространственная система сходящихся сил.

Если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке, то такую систему называют **сходящейся**. Поместим начало координат в эту точку (рис. 1.22), тогда моменты всех сил относительно осей координат равны нулю и система уравнений равновесия представляется в следующей форме:

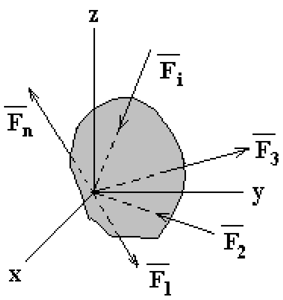


Рис. 1.22

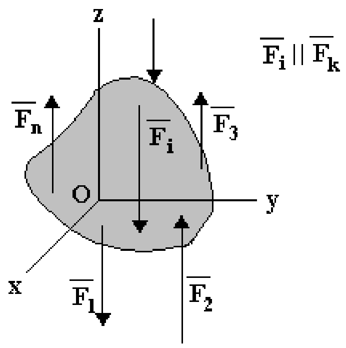
$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad (2.3)$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

В частности, если силы расположены на плоскости xOy , то условия равновесия представляются двумя уравнениями:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (2.4)$$

2. Система параллельных сил.

В случае, когда все силы системы, действующей на тело, параллельны друг другу, то одну из осей, например Oz , проведём параллельно линиям действия сил (рис. 1.23). Проекции всех сил на оси x и y равны нулю, равны ну-лю также и моменты всех сил относительно оси z, поэтому уравнения равновесия представляются системой:



$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F_i}) = 0 \qquad (2.5)$$
$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F_i}) = 0 \;.$$

Рис. 1.23

3. <u>Произвольная плоская система сил.</u>

Если система сил, действующих на данное тело, расположена в плоскости xOy (рис. 1.24), то проекция всех сил на ось z равна нулю и, кроме того, моменты сил относительно осей Ox и Oy также имеют нулевые значения. В результате условия равновесия представляются в следующей форме:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad (2.6)$$
$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\mathbf{F_i}) = 0,$$

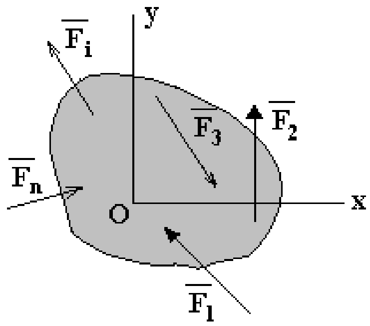


Рис. 1.24

а так как ось Oz на рисунке отсутствует, то обычно на практике последнее уравнение для моментов запи-сывают иначе, и вместо оси Oz для моментов вводят обозначение следа этой оси O на плоскости xOy, т.е. используются уравнения в таком виде:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad M_O = \sum_{i=1}^{n} m_O(\mathbf{F_i}) = 0. \qquad (2.7)$$

Наряду с данными условиями равновесия на практике также часто используются и другие формы уравнений равновесия плоской системы сил, они тоже содержат три уравнения:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad\qquad M_A = \sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F_i}) = 0$$
$$M_A = \sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F_i}) = 0 \quad (2.7а) \qquad\qquad M_B = \sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F_i}) = 0 \quad (2.7б)$$

$M_B = \sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F_i}) = 0$ $\qquad$ $M_C = \sum_{i=1}^{n} m_C(\mathbf{F_i}) = 0$

отрезок АВ не должен быть параллельным оси Оу $\qquad$ А, В, С - не лежат на одной прямой .

При изучении равновесия несвободного тела используются уравнения равновесия, в которых неизвестными величинами являются реакции наложенных связей. Их число зависит от вида связей и их количества. Задачи статики разрешимы только в том случае, если число реакций связей не превышает число уравнений равновесия, содержащих эти реакции связей. Такие задачи называют **статически определёнными**.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей превышает количество уравнений равновесия, называются **статически неопределёнными**.

Примером такой задачи является равновесие балки **АВ** , закреплённой по обоим концам неподвижными цилиндрическими шарнирами. На балку действуют две заданные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис. 1.25). В этом случае количество уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил равно трём, в то время как число неизвестных реакций связей - четыре (X_A, $У_A$, X_B, $У_B$).

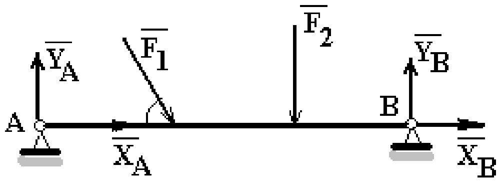


Рис. 25

Неопределённость подобного рода задач связана с тем, что в статике тела рассматриваются как абсолютно твёрдые, в действительности же под действием нагрузок тела приобретают соответствующие деформации. В рассмотренной задаче о равновесии балки с шарнирно закреплёнными концами она под действием приложенных сил испытывает деформацию изгиба. Решение этих задач выходит за рамки статики твёрдого тела и они рассматриваются в курсе сопротивления материалов.

§ 5. Решение задач статики

Рассмотрим общие положения о решении задач статики. Весь процесс решения задачи об определении неизвестных реакций связей удобно разбить на ряд последовательных шагов, характерных для большинства задач:

1. Выбрать объект равновесия. Необходимо рассмотреть такое тело, находящееся в равновесии, на которое действуют искомые силы.
2. Выяснить с какими телами взаимодействует объект равновесия и установить вид связей и характер активных сил.

3. Освободить объект равновесия от связей и приложить к нему реакции связей и активные силы.
4. В соответствии с видом действующих сил (активных и реакций связей) составить уравнения равновесия.
5. Решить полученную систему уравнений и провести проверку и анализ полученного решения.

Замечания.

1. *При решении задач очень важно правильно выполнить рисунок, на котором изображены объект равновесия и все действующие силы (активные и реакции связей) .*
2. *Уравнения равновесия имеют наиболее простой вид если:*
   а) оси координат параллельны неизвестным силам ;
   б) в качестве центра, относительно которого вычисляются моменты сил, выбрана точка, через которую проходит линия действия неизвестной силы.
3. *Для определения момента силы произвольного направления относительно осей координат удобно прежде разложить эту силу на составляющие, параллельные осям координат, и затем заменить момент силы относительно оси суммой моментов составляющих относительно той же оси.*

Рассмотрим общие замечания, связанные с методами решения задач статики. Математическая модель равновесия твёрдого тела для статически определённой задачи, как было указано, представляется в виде системы линейных алгебраических уравнений, число которых не более шести.

Решение задач статики рекомендуется выполнять в аналитической форме, если это не связано с громоздкими вычислениями. Искомые величины в этом случае представляются в виде аналитических зависимостей, позволяющих проводить анализ полученного решения.

Вместе с тем, аналитические решения для уравнений общего вида ($n > 3$) проводить не целесообразно. Это, например, относится к задачам статики пространственной системы сил общего вида, либо к задачам о равновесии составных конструкций, содержащих большое число элементов. Решение подобного рода задач связано с громоздкими математическими выкладками.

Современное состояние развития вычислительной техники позволяет автоматизировать этот трудоёмкий процесс, реализуя соответствующие алгоритмы численных методов. Тем самым расчёты, выполненные с помощью ЭВМ, открывают весьма действенные дополнительные возможности при решении задач механики, приближённых к реальным проблемам инженерной практики.

Рассмотрим современное состояние вопроса о решении задач механики с помощью ЭВМ. Прежде всего следует отметить широкое разнообразие численных методов (точных и итерационных) решения системы алгебраических и дифференциальных уравнений. С другой стороны, реализация этих методов может быть проведена с помощью множества алгоритмических языков программирования. Наибольшее применение в инженерной практике получили языки высокого уровня Фортран, Бейсик, Паскаль, Си.

На наш взгляд фундаментальным подходом к решению задач механики (так же, как и любых других задач, связанных с реализацией численных методов) является не только знание аналитических и численных методов, но также умение самостоятельно составлять и отлаживать программы с помощью одного из алгоритмических языков высокого уровня. Однако такой подход предполагает как фундаментальную математическую подготовку, так и знание основ техники программирования. Этого уровня подготовки сложно требовать от студентов младших курсов, но вместе с тем основная задача фундаментальных дисциплин, читаемых в высшей технической школе, является способствовать формированию именно такого уровня знаний у будущих инженеров и специалистов.

Современное состояние систем программирования и вычислительной техники позволило автоматизировать процессы реализации многих численных алгоритмов, применяемых в инженерных и научных расчётах. Для решения задач вычислительного характера существует большое число разнообразных программных средств и математических пакетов, среди которых наибольшей популярностью пользуются Maple, Mathematica, Mathlab, Mathcad, Derive и др.

Из числа этих программных средств можно особо выделить многофункциональный пакет Mathcad фирмы MathSoft Inc., который позволяет не только эффективно выполнять вычисления, но и обладает большими текстовыми и графическими возможностями. Помимо численных расчётов Mathcad способен делать символьные преобразования, он прост в использовании и лёгок в обучении. Формулы, представимые на экране монитора, имеют естественный вид, он обладает разветвлённой справочной системой, электронные книги Mathcad содержат множество полезной справочной информации.

На наш взгляд эти достоинства Mathcad делают его надёжным помощником в процессе обучения, к тому же он функционирует на персональных компьютерах любого класса (DOS, Windows). В дальнейшем изложении курса теоретической механики мы широко будем применять при расчётах этот многофункциональное программное средство.

Примеры.

1^0. Определение опорных реакций составной конструкции [27].

Схема конструкции, состоящей из двух частей, изображенная на рис. 1.26.

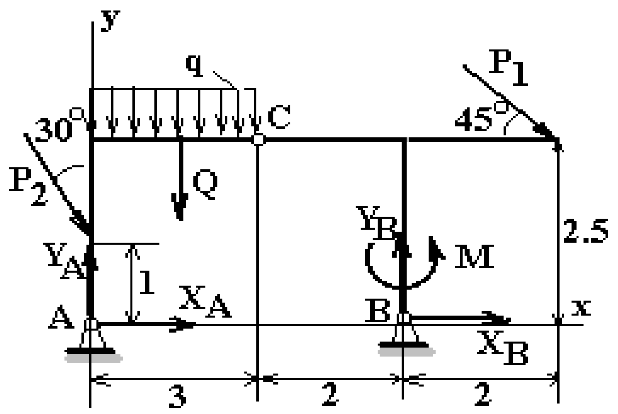


Рис. 1.26

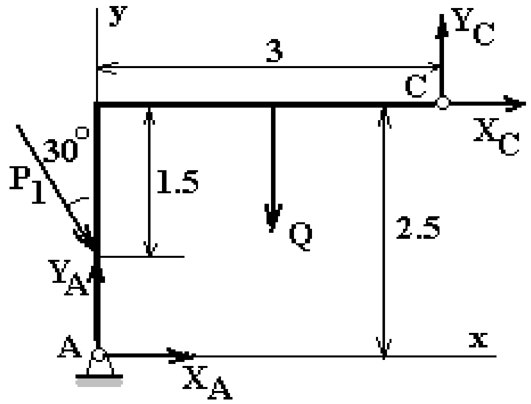


Рис. 1.27

Заданные нагрузки, действующие на конструкцию, имеют следующие значения P_1 = 13 кН, P_2 = 6 кН, M = 10 кН м, q = 2.4 кН / м. Найти реакции опор, а также соединительного шарнира **C**.

Р е ш е н и е. Для определения искомых реакций можно поступать двояко, или мысленно расчленить систему тел (составную конструкцию) на отдельные твердые тела и рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, или, применяя принцип затвердевания, вначале рассмотреть равновесие всей конструкции, а затем равновесие её отдельных элементов.

I. Рассмотрим вначале равновесие всей конструкции (Рис. 1.26).

1. Объект равновесия - составленная конструкция.
2. Связь - шарнирно-неподвижная опора **A** и **B**. На конструкцию действуют сосредоточенные силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и пара сил с моментом **M**.
3. Действие связей представим их реакциями $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей

   $$Q = q\ 3 = 7.2 \text{ кН}.$$

   Остальные активные силы - $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и пара сил с моментом M .
4. Составляем уравнения равновесия (система координат Axy изображена на рисунке).

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + X_B + P_1 \sin 30^0 + P_2 \cos 45^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + Y_B - Q - P_1 \cos 30_0 - P_2 \sin 45^0 = 0 \qquad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = - P_1 \sin 30^0\ 1 - Q\ 1.5 + M + Y_B\ 5 - P_2 \sin 45^0\ 7 - P_2 \cos 45^0\ 2.5 = 0$$

Данная система уравнений имеет четыре неизвестных X_A , $У_A$, X_B , $У_B$.

II. Рассмотрим теперь равновесие части конструкции, которая находится левее соединительного шарнира **C** (рис. 1.27).

1. Объект равновесия - левая часть конструкции.
2. Связи - цилиндрические шарниры **A** и **C**. На объект равновесия действуют равнодействующая $\overline{Q}$ и сила $\overline{P}_1$.
3. Составляем уравнения равновесия (в системе координат Axy)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + X_C + P_1 \sin 30^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + Y_C - Q - P_1 \cos 30^0 = 0 \qquad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = - P_1 \sin 30^0\, 1 - Q\, 1.5 - X_C\, 2.5 + Y_C\, 3 = 0$$

Систему шести уравнений (2.8), (2.9) относительно шести неизвестных решаем с помощью Mathcad

Исходные данные: $P_1 = 13$ $P_2 = 6$ $M = 10$ $Q = 7.2$ $\alpha = \pi/6$ $\beta = \pi/4$

Введем обозначения : $x1 = X_A$, $y1 = У_A$

$x2 = X_B$, $y2 = У_B$

$x3 = X_C$, $y3 = У_C$

Начальные приближения: $x1 = 0$ $y1 = 0$ $x2 = 0$ $y2 = 0$ $x3 = 0$ $y3 = 0$

Given $x1 + x2 + P1 \sin\alpha + P2 \sin\beta = 0$

$y1 + y2 - Q - P1 \cos\alpha - P2 \cos\beta = 0$

$-P1 \sin\alpha - 1.5\, Q + M + 5\, y2 - 7\, P2 \sin\beta - 2.5\, P2 \cos\beta = 0$

$x1 + x3 + P1 \sin\alpha = 0$

$y1 + y3 - Q - P1 \cos\alpha = 0$

$P1 \sin\alpha + 1.5.Q + 2.5\, x3 - 3\, y3 = 0$

Find(x1, x2, x3, y1, y2, y3)

Результаты расчета: X_A = - 8,109 кН , Y_A = 11,35 кН, X_B = - 2,633 кН ,

Y_B = 9, 521 кН, X_C = 1,609 кН, Y_C = 7,108 кН .

2^0. Определение реакций опор твердого тела (система сил в пространстве).

Схема конструкции представлена на рис. 1.28 [27]. Действующие силы и размеры имеют соответствующие значения: Q = 20 кН, G = 18 кН, F = 10 кН, a = 4 м , b = 4 м , c = 4.5 м. Определить опорные реакции конструкции.

Решение.

1. Объект равновесия - прямоугольная плита.

2. Горизонтальная плита находится в положении равновесия под действием шести стержней, на плиту действуют сосредоточенные силы $\overline{Q}$, $\overline{F}$ и сила тяжести плиты $\overline{G}$.
3. Действие связей на плиту заменяем их реакциями: $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, $\overline{S}_4$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_6$, кроме данных реакций связей на плиту действуют активные силы: $\overline{Q}$, $\overline{F}$ и $\overline{G}$.
4. Составляем уравнения равновесия системы сил в пространстве (оси координат изображены на рисунке):

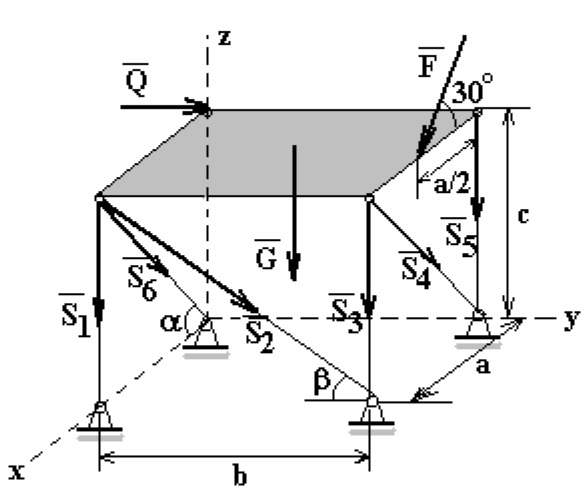


Рис. 1.28

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = - S_6 \cos\alpha - S_4 \cos\alpha + F\cos 30^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Q + S_2 \cos\beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = - G - S_1 - S_6 \sin\alpha - S_3 - S_2 \sin\beta - S_5 - S_4 \sin\alpha - F \sin 30^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ix} = - Q\, c - G\, b/2 - S_2 \cos\beta\, c - S_3\, b - S_5 b - S_4\, b \sin\alpha - F\, b \sin 30^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{iy} = S_1 a + S_2\, a \sin\beta + S_3\, a + G\, a/2 + F\cos 30^0\, c + F \sin 30^0\, a/2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{iz} = - F\cos 30^0\, b - S_2 \cos\beta\, a + S_4 \cos\alpha\, b = 0 .$$

Данные системы уравнений решаем в системе Mathcad:

Исходные данные: $Q = 20$ $G = 18$ $F = 10$
$\gamma = 30$ $a = 4$ $b = 4$ $c = 4.5$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \sin\beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Given $S_4 \cos\alpha + S_6 \cos\alpha - F\cos\gamma = 0$

$Q + S_2 \cos\beta = 0$

$G + S_1 + S_6 \sin\alpha + S_3 + S_5 + S_4 \sin\alpha + F\sin\gamma + S_2 \sin\beta = 0$

$Q\, c + G\, b/2 + S_2 \cos\beta\, c + S_3\, b + S_5\, b + S_4 \sin\alpha\, b + F \sin\gamma\, b = 0$

$S_1\, a + S_2 \sin\beta\, a + S_3\, a + G\, a/2 + F \cos\gamma\, c + F \sin\gamma\, a/2 = 0$

$F \cos\gamma\, b + S_2 \cos\beta\, a - S_4 \cos\alpha\, b = 0$

Find (S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6)

Результат: S_1 = - 7,79 кН , S_2 = - 30,1 кН, S_3 = 9,045 кН,
S_4 = - 15,44 кН, S_5 = - 11,502 кН, S_6 = 28,48 кН.

Знак минус для реакций S_1, S_2, S_4 и S_5 означает, что стержни 1,2, 4 и 5 работают на сжатие.

Глава 3. Приведение системы сил к простейшему виду

Часто при исследовании движения или равновесия тел возникает необходимость заменить сложную систему сил, приложённых к телу, более простой, но оказывающей такое же действие, т.е. эквивалентной системой сил.

В связи с этим рассмотрим вторую основную задачу статики, касающуюся законов эквивалентности системы сил, на основании которых осуществляется приведение произвольной системы сил к простейшему виду. Выясним, каков же признак эквивалентности двух систем сил.

§ 1. Теорема (об эквивалентности систем сил)

Для того чтобы две системы сил были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы главные векторы и главные моменты относительно одного и того же полюса этих систем сил были соответственно равны

$$\overline{R}(S_1)=\overline{R}(S_2) \qquad (3.1)$$
$$\overline{M}_{\mathbf{0}}(S_1)=\overline{M}_{\mathbf{0}}(S_2).$$

Докажем необходимость этих условий

Дано: $S_1(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_m)$

$S_2(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, ..., \overline{Q}_n)$

$S_1 \equiv S_2$ (системы S_1 и S_2 эквивалентны)

Доказать: $\overline{R}(S_1)=\overline{R}(S_2)$

$\overline{M}_{\mathbf{0}}(S_1)=\overline{M}_{\mathbf{0}}(S_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дополним систему S_1 системой S_3 , состоящей из сил, прямо противоположных силам системы S_1 , т.е. $S_3(-\overline{P}_1, -\overline{P}_2, ..., -\overline{P}_m)$. Тогда система сил (S_1, S_3) - уравновешена, (S_1, S_3) $\equiv 0$. По основной теореме статики

View publication stats