УДК 624.04

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

***Урсалов Н.В.**, ПГС-607м (н).*
*Научный руководитель – д.т.н., проф. **Сурьянинов Н.Г.***

Проведено розрахунок на згин вільно опертої прямокутної пластини. Обчислення проведені методом скінченних елементів в програмній системі Ansys, методом граничних елементів у програмі Skilab. Також виконані аналітичні розрахунки методами Нав'є і Леві. Співставлено результати напружено-деформованого стану пластини з подальшою оцінкою похибок застосованих методів.

Линейная теория пластин и оболочек основана на допущении бесконечной малости перемещений точек тела, что позволяет с достаточной точностью пренебрегать квадратами и высшими степенями перемещений по сравнению с их первыми степенями. Эта теория в научной литературе изложена в ряде капитальных работ А.Л. Гольденвейзера, В.З. Власова, В.В. Новожилова, П.М. Огибалова, К.Ф. Черных и других.

Основная техническая теория изгиба пластин — это теория Киргофа-Лява. Иногда ее рассматривают, как теорию первого приближения, привлекая для решения ряда задач более точные теории. Уточненные теории позволяют устранить некоторые математические противоречия, присущие классической теории пластин (например, несоответствие порядка дифференциальных уравнений с числом граничных условий; несоответствие типа дифференциальных уравнений в динамических задачах: вместо требуемого гиперболического типа классическая теория дает параболический тип дифференциальных уравнений, решение которых не имеет волнового характера и др.).

Техническая теория изгиба пластин основывается на двух общих гипотезах (гипотезы Кирхгофа): гипотеза прямых нормалей и гипотеза о ненадавливании одного слоя пластины на другой.

Основное дифференциальное уравнение технической теории изгиба пластин — (уравнение Софии Жермен – Лагранжа) имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}. \qquad (1)$$

Иногда это уравнение записывают в сокращенном виде:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q}{D}, \tag{2}$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (1) совместно с граничными условиями, заданными на краях пластинки, позволяет определить функцию прогибов $w(x, y)$.

Как известно, решение основного уравнения изгиба для прямоугольной пластинки в замкнутой форме получить не удается. Получено решение Л. Навье в двойных тригонометрических рядах, которое пригодно только для прямоугольных пластинок, шарнирно опертых контуру. Более общим является решение М. Леви (в одинарных тригонометрических рядах), которое пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любое закрепление или свободны [1].

Методы конечных и граничных элементов (МКЭ и МГЭ) позволяют выполнить расчет пластинки при любых внешних нагрузках и граничных условиях.

При использовании МГЭ и метода Канторовича-Власова прогиб точки срединной плоскости пластины представим одним членом ряда

$$w(x, y) = W(y)X(x). \tag{4}$$

В результате подстановки в (1), после несложных преобразований получим задачу Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины:

$$\begin{gathered} W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = q(y)/D; \\ DW(0);\ D\theta(0) = DW'(0); \\ M(0) = -DA\left[W''(0) - \mu r^2 W(0)\right]; \\ Q(0) = -DA\left[W'''(0) - (2-\mu) r^2 W'(0)\right]; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\text{где} \quad r^2 = -B/A;\ S^4 = C/A;\ q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y)X(x)dx/A;$$

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x)dx;\ B = \int_0^{l_1} X''(x)X(x)dx;$$

$$C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x)X(x)dx. \tag{6}$$

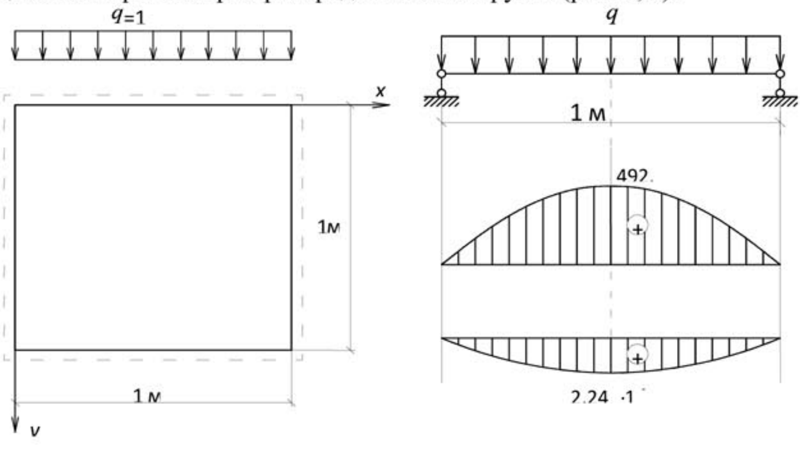
Решение уравнения Жермен-Лагранжа будет заключаться в определении функции прогиба (4), где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется в виде

$$DW(y) = A_1 \cdot Dw(0) + A_2 \cdot D\theta(0) - A_3 \cdot M(0) -$$
$$-A_4 \cdot Q(0) + \int_0^y A_4(y-\xi)q(\xi)d\xi \qquad (7)$$

Входящие в это выражение фундаментальные ортонормированные функции, функция Грина и вектор нагрузки для всех возможных непрерывных граничных условий построены в [2].

Для расчета пластинки методом конечных элементов сейчас имеются сотни инженерных компьютерных программ разной сложности, которые базируются на МКЭ. Практически все они позволяют легко и с высокой степенью точности рассчитать пластину любой формы при любых граничных условиях. Проблема здесь заключается только в наличии самой программы и умении пользоваться, реализовывать все её возможности в плане постановки задачи, выбора типа конечного элемента и анализа полученных результатов. Для этого в работе выбран пакет ANSYS [3].

Рассмотрим изгиб свободно опертой квадратной пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 1, а).



а б

Рис. 1. Свободно опертая квадратная пластинка

Реализация алгоритма МГЭ выполнена в программе SCILAB [4] (свободно распространяемый аналог пакета MATLAB). Эпюры изгибающих моментов и прогибов при $h=0{,}1\,м$, $E=2\cdot10^{8}\,кПа$, $\mu=0{,}3$, полученные методом граничных элементов, представлены на рис. 1,б.

Эти же величины были определены методом конечных элементов в программе ANSYS (рис. 2, 3).

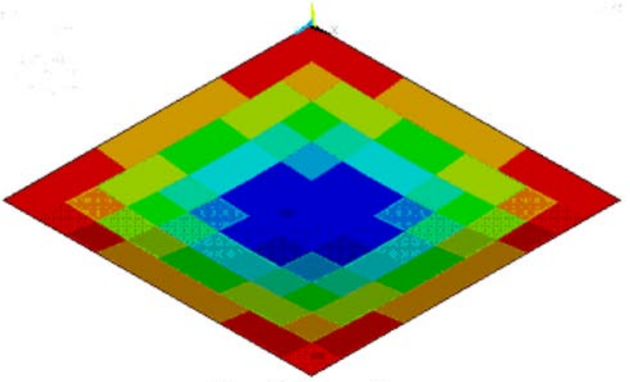


Рис. 2. Прогибы

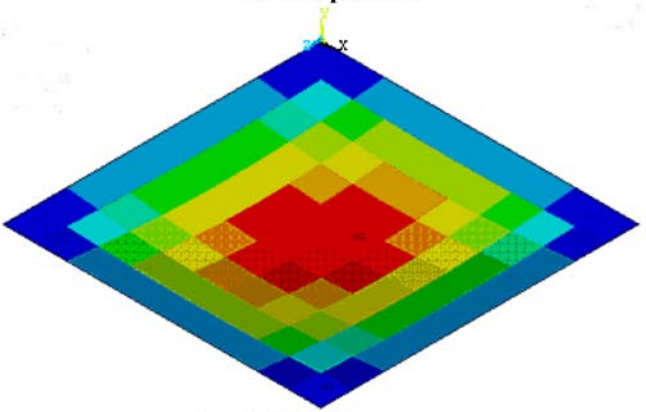


Рис. 3. Изгибающие моменты

Сравнение результатов, полученных аналитически и двумя численными методами, приведено в табл. 1.

Таблица 1

Прогиб и изгибающий момент в центре пластинки

Величина	Метод расчета				
	Навье	Леви	МКЭ	МГЭ	Точное значение
$w \cdot 10^6$, м	2,272 (2,5%)	2,244 (1,2%)	2,2470 (1,2%)	2,221 (0,2%)	2,217
M, Н·м	534,1 (11,5%)	516,84 (7,9%)	491,07 (2,52%)	482,5 (0,73%)	479,0

Литература

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. — М.: Высшая школа, 1982. — 264 с.
2. Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численно–аналитический метод граничных элементов. — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
3. Дащенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дащенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / Изд. 2-е, перераб. и доп. Под ред. Н. Г. Сурьянинова. — Одесса. — Пальмира, 2011. — 505 с.
4. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.

УДК 725.4

ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ПРКИНГОВ В КРУПНЫХ ГОРОДАХ

Федорчак Ю.И., *АБС*-518.

Научный руководитель – асс. ***Н.Ю. Колесникова***

Аннотация: в данной статье рассматриваются вопросы исторического формирования и современные виды паркингов.

Ключевые слова: Паркинг, парковка, автомобильный гараж, стоянка, крупные города; зоны города.

Проблема исследования: Формирования паркингов. Предпосылки к их развитию.