Эволюция движений твердого тела, близких к спящему волчку Лагранжа

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції

29—30 грудня 2016 року

Київ 2017

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К СПЯЩЕМУ ВОЛЧКУ ЛАГРАНЖА

Л. Д. Акуленко[1], Д. Д. Лещенко[2], Т. А. Козаченко[2]
[1]*Институт проблем механики РАН, Москва, Россия*
[2]*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина*
kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

1. Постановка задачи и процедура усреднения. Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - A)qr = \mu \sin\theta \cos\varphi + \varepsilon M_1, \\
A\dot{q} + (A - C)pr = -\mu \sin\theta \sin\varphi + \varepsilon M_2, \quad C\dot{r} = \varepsilon M_3, \\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta, \\
\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi), \quad i = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела, εM_i, $i = 1,2,3$ — проекции вектора возмущающих моментов на эти оси; ψ, θ, φ — углы Эйлера; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущений. В частности, при $\varepsilon = 0$ система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа (Суслов, 1946; Черноусько, Акуленко, Лещенко, 2015). В случае тяжелого волчка имеем $\mu = mgl$, m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тел; A — экваториальный, C — осевой момент инерции тела относительно точки O, $A \neq C$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом ε, которое будет проводиться методом усреднения (Волосов, Моргунов, 1971) на интервале времени порядка ε^{-1}.

В случае невозмущенного движения первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ являются величины (Суслов, 1946; Черноусько и др., 2015))

$$\begin{gathered}
G_z = A\sin\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right) + Cr\cos\theta = c_1, \\
H = \frac{1}{2}\left[A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2\right] + \mu\cos\theta = c_2, \quad r = c_3.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i, $i = 1,2,3$ — произвольные постоянные $c_2 \geq -\mu$.

Соотношения между корнями кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1-u^2)A - (G_z - Cru)^2] \tag{1.3}$$

и первыми интегралами (1.2) записываются следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2r^2}{2A\mu} = F_1, \quad u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{A\mu} - 1 = F_2,$$

$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu} = F_3. \tag{1.4}$$

Известно в общем случае выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении как функции времени t:

$$u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\alpha t + \beta\right), \quad -1 \le u_1 \le u_2 \le 1 \le u_3 < +\infty,$$

$$\alpha = \left[\mu\left(u_3 - u_1\right) / \left(2A\right)\right]^{1/2}, \quad \mathrm{sn}\left(\alpha t + \beta\right) = \sin am\left(\alpha t + \beta, k\right), \tag{1.5}$$

$$k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1}, \qquad 0 \le k^2 < 1. \tag{1.6}$$

Здесь u — периодическая функция $\alpha t + \beta$ с периодом $\dfrac{K(k)}{\alpha}$; β — произвольная фазовая постоянная; sn, am — эллиптический синус и амплитуда соответственно (Черноусько и др., 2015; Акуленко, Лещенко, Черноусько, 1979), k — модуль эллиптических функций.

Формулы (1.2), (1.4), (1.5) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в случае Лагранжа.

Сделаем следующие исходные предположения:

$$p^2 + q^2 << r^2, \quad Cr^2 >> \mu, \tag{1.7}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии, угловая скорость r достаточно велика. Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией T, и в первом приближении имеем

$$G_z \approx Cr, \ H \approx T \approx \frac{1}{2}Cr^2. \tag{1.8}$$

Если твердое тело вращается быстро, то для квадрата модуля эллиптических функций можно записать

$$k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1} \ll 1. \tag{1.9}$$

При выполнении второго условия (1.7) имеем

$$u_1 \ll u_3, \ u_2 \ll u_3, \ u_1 + u_2 \ll u_3. \tag{1.10}$$

Тогда из соотношений (1.4) получим

$$u_3 = F_1, \quad u_1 u_2 = \frac{F_3}{F_1}. \tag{1.11}$$

После ряда преобразований с учетом (1.4) находим выражения для вещественных корней кубического многочлена (1.3)

$$u_1 = \frac{1}{2F_1}\left[F_2 - \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}\right], \ u_2 = \frac{1}{2F_1}\left[F_2 + \sqrt{F_2^2 - 4F_1F_3}\right], \ \ u_3 = F_1. \tag{1.12}$$

Процедура, разработанная в Черноусько и др. (2015), Акуленко и др. (1979) используется для усреднения системы (1.1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$. В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия выполнения тождеств

$$\begin{aligned} &M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi = M_1^*(G_z, H, r, \theta),\\ &M_1 p + M_2 q = M_2^*(G_z, H, r, \theta),\\ &M_3 = M_3^*(G_z, H, r, \theta), \end{aligned} \tag{1.13}$$

или, в частности, достаточные условия

$$M_1 = pf, \quad M_1 = qf, \ \ M_3 = M_3^*, \ f = f(G_z, H, r, \theta),$$

которые обеспечивают справедливость соотношений (1.13).

Тогда с помощью ряда преобразований первые три уравнения (1.1) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} &\dot{G}_z = \varepsilon U_1\left(G_z, H, r, \theta\right), \qquad U_1 = M_1^* \sin\theta + M_3^* \cos\theta,\\ &\dot{H} = \varepsilon U_2\left(G_z, H, r, \theta\right), \qquad U_2 = M_2^* + M_3^* r,\\ &\dot{r} = \varepsilon U_3\left(G_z, H, r, \theta\right), \qquad U_3 = C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь U_1, U_2, U_3 – 2π-периодические функции фазы угла θ.

Для быстро вращающегося твердого тела при $k^2 \ll 1$ из выражения (1.5) для u получим приближенную формулу

$$u = \cos\theta \approx u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2\left(\alpha t + \beta\right). \tag{1.15}$$

Усредняя правые части полученной системы по t, получим с учетом (1.4), (1.5):

$$\begin{aligned} &\dot{G}_z = \varepsilon V_1\left(G_z, H, r\right), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2\left(G_z, H, r\right),\\ &\dot{r} = \varepsilon V_3\left(G_z, H, r\right), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$V_i\left(G_z, H, r\right) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} U_i\left(G_z, H, r, \theta\left(t\right)\right) dt,$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (1.16) подставлено выражение

$$\theta \approx \arccos\Big[u_1 + (u_2 - u_1)\sin^2\big(\alpha t + \beta\big)\Big].$$

На интервале времени порядка ε^{-1} оценка близости решений систем (1.14), (1.16) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения δ и малого параметра ε, характеризующего величину возмущений (Мухин, 1985).

После решения системы (1.16) для G_z, H, r медленные переменные $u_i,\ i = 1,2,3$ определяются по формулам (1.12).

2. Движение твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного моментов. Исследуем совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i,\ i = 1,2,3$ имеют вид:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br - \eta, \quad a,\ b > 0. \tag{2.1}$$

Здесь $a,\ b$ – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела, $\eta = \mathrm{const}$.

Моменты (2.1) удовлетворяют условиям (1.13), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ. Решение усредненной системы уравнений (1.16), с учетом (2.1) записывается следующим образом

$$\begin{gathered} r = \left(r_0 + \eta b^{-1}\right)\exp(-bC^{-1}\tau) - \eta b^{-1}, \\ G_z = \left(G_{z0} - Cr_0\right)\exp\left(-aA^{-1}\tau\right) + C\left(r_0 + \eta b^{-1}\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right) - \eta C b^{-1}, \\ H = \left(H_0 - \frac{1}{2}Cr_0^2 - \mu\right)\exp\left(-2aA^{-1}\tau\right) + \frac{1}{2}C\left(r_0 + \eta b^{-1}\right)^2\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right) - \\ - \eta C b^{-1}\left(r_0 + \eta b^{-1}\right)\exp\left(-bC^{-1}\tau\right) + \frac{1}{2}\eta^2 C b^{-2} + \mu. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $G_{z0},\ H_0$ — произвольные начальные значения проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль Oz и полной энергии тела.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r и проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz асимптотически приближаются к значениям $r = -\eta b^{-1},\ G_z = -\eta C b^{-1}$. Полная энергия H изменяется, асимптотически приближаясь к значению $H = \dfrac{1}{2}\eta^2 C b^{-2} + \mu$.

Список литературы

Акуленко, Л. Д., Лещенко, Д. Д. и Черноусько, Ф. Л. (1979). Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика*, *43*(5), 771—778.

Волосов, В. М., Моргунов, Б. И. (1971). *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*. Москва: Изд-во МГУ.

Мухин, Н. П. (1985). Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, (6), 51—54.

Суслов, Г. К. (1946). *Теоретическая механика.* Москва: Гостехиздат.

Черноусько, Ф. Л., Акуленко, Л. Д., Лещенко, Д. Д. (2015). *Эволюция движений твердого тела относительно центра масс*. Москва: Ижевский институт компьютерных исследований.