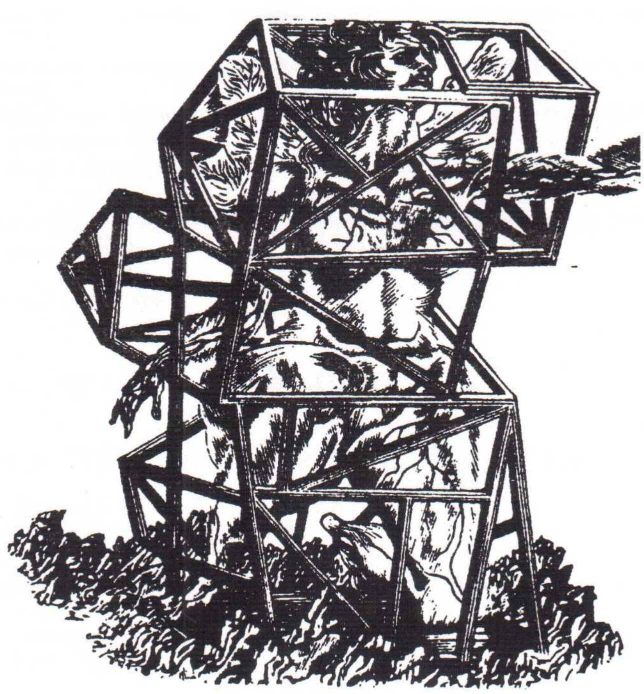
Министерство образования Украины
Одесский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА И ПСИХОЛОГИЯ В ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ "ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Сборник статей по материалам
1-ой Международной
научно-практической конференции



Часть I

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Одесса 1996

Л.Д. Акуленко,
д-р физ.-мат. наук, Институт проблем механики РАН, Москва, Россия,
Д.Д. Лещенко,
канд. физ.-мат. наук, Одесская государственная академия холода, Одесса, Украина.

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТРЕХОСНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТА СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

With the use of the averaging method, we investigate the evolution of rotations of a nearly dynamically-spherical three-axis satellite. We assume that the satellite is subjected to light-pressure torque and its shape is a surface of revolution. The coefficient of the light-pressure torque is approximated by a trigonometric polynomial. The first integral of the system of first-approximation equatins for the nutation and the proper rotation angles is found.

Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Допустим, что форма космического аппарата представляет собой тело вращения. В этом случае для момента сил светового давления $\vec{M}$, действующего на спутник, имеет место формула

$$\vec{M} = (a_c(\varepsilon_s) R_0^2/R^2)\, \vec{e}_r \times \vec{k} \qquad (1)$$

Здесь $\vec{e}_r$ - единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, $\vec{k}$ - единичный орт оси симметрии, ε_s- угол между направлениями $\vec{e}_r$ и $\vec{k}$, R - текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 - фиксированное значение R, например, в начальный момент времени, $a_c(\varepsilon_s)$ - коэффициент момента сил светового давления.

Далее полагаем $a_c=a_c(\cos\varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos\varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1\cos\varepsilon_s + \ldots + a_N\cos^N\varepsilon_s \qquad (2)$$

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции U записываются в переменных L, ρ, σ, φ, ψ, θ. Здесь L - величина вектора кинетического момента, положение которого в перигейной системе координат OXYZ определяется углами ρ, σ; φ, ψ, θ - углы Эйлера. К этой системе уравнений необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии ν со временем.

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A=J_0+\varepsilon A',\ B=J_0+\varepsilon B',\ C=J_0+\varepsilon C' \qquad (3)$$

где $0<\varepsilon<<1$ - малый параметр. Предположим также, что $a_0\sim\varepsilon$, $a_1\sim\varepsilon$, ..., $a_N\sim\varepsilon$, т.е. моменты сил светового давления имеют тот же порядок величины ε, что и гироскопические моменты.

Независимое усреднение по ψ, ν проводим для нерезонансного случая. После ряда преобразований находим, что усредненные уравнения первого приближения для определения φ и θ, описывающиедвижение вектора кинетического момента $\vec{L}$ относительно тела, приводятся к виду (в медленном времени ξ)

$$\theta' = \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \qquad (4)$$

$$\varphi' = \cos\theta(\mu-\sin^2\varphi) - 2\delta_l\beta^{-1}L_0^{-2}(\sin\theta)^{-1}\partial U(\theta,\rho_0)/\partial\theta$$

$$\xi = L_0\beta t,\ \mu=-\gamma/\beta,\ \beta=A^{-1}-B^{-1},\ \gamma=B^{-1}-C^{-1}$$

$$\delta_l = \frac{a_{2l+1}R_0^2(1-e^2)^{3/2}}{2(l+1)P^2},\ \partial U/\partial\theta = \sum_{l=0}^{Q}\sum_{m=0}^{l+1}\sum_{k=0}^{m} A_{lmk}\times$$

$$\times(\sin\rho)^{2(l+1-m+k)}(\cos\rho)^{2(m-k)}(\cos\theta)^{2(l-m)+1}\times(\sin\theta)^{2m-1}[m-(l+1)\sin^2\theta],$$

$$A_{lmk} = C_{2(l+1)}^{m}\times C_m^k\,\frac{(2m-1)!!(2k-1)!![2(l+1-m)-1]!!}{(2m)!![2(k+l+1-m)]!!}$$

Здесь e и P - эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, величины L_0 и ρ_0 - это значения L и ρ в начальный момент времени.

Для системы (4) имеет место первый интеграл

$$c = \sin^2\theta(\mu-\sin^2\varphi) - 4\delta_l\beta^{-1}L_0^{-2}f(\theta,\rho_0) \qquad (5)$$

$$f(\theta,\rho_0) = \sum_{l=0}^{Q}\sum_{m=0}^{l+1}\sum_{k=0}^{m} A_{lmk}\Big[\frac{m}{2}\sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^{i}\times\frac{(-1)^i(\sin\theta)^{2(m+1)}}{m+i} - \frac{1}{2}(l+1)\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{l-m}\frac{(-1)^i(\sin\theta)^{2(m+i+1)}}{m+i+1}\Big](\sin\rho_0)^{2(l+1-m+k)}(\cos\rho_0)^{2(m-k)}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = \sum_{k=0}^{Q} a_{2k}\cos^{2k}\varepsilon_s + a_3\cos^3\varepsilon_s \qquad (6)$$

В этом случае уравнения для определения φ и θ, как следует из (40, принимают вид (остаются члены, обусловленные a_3):

$$\theta' = \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \qquad (7)$$

$$\varphi' = \cos\theta(\mu_1-\sin^2\varphi-\alpha\sin^2\theta)$$

$$\mu_1 = -\gamma/\beta-\alpha S,\ \alpha = \frac{3a_3R_0^2}{64L_0^2P^2\beta}(1-e^2)^{3/2}(8-40\sin^2\rho_0+35\sin^4\rho_0)$$

$$S=\frac{4\sin^2\rho_0(4-5\sin^2\rho_0)}{8-40\sin^2\rho_0+35\sin^4\rho_0}$$

Для системы (7) находим первый интеграл

$c_1=\sin^2\theta(\mu_1-\sin^2\varphi-\alpha/2\,\sin^2\theta)=\sin^2\theta_0(\mu_1-\sin^2\varphi_0-\alpha/2\,\sin^2\theta_0)=\mathrm{const}$

Проведен качественный анализ фазовой плоскости (θ,φ). Определены стационарные точки уравнений (7). Рассмотрены различные характерные случаи выбора параметров μ_1, α. Приведены фазовые портреты усредненной системы, построенные численно. Выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

И. М. Ананьевский,

канд. физ.-мат. наук, Институт проблем механики РАН, Москва, Россия.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

A feedback control law based on the linear feedback with time- varying gains has been developed for general Lagrange systems with uncertain dynamic parameters. The algorithm for varying the gains provides driving the system to a prescribed terminal state in a finite time and meeting the control constraints.

Рассматривается механическая система, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Предполагается, что матрица кинетической энергии системы неизвестна и на систему действуют неконтролируемые ограниченные внешние силы (такая ситуация имеет место, например, если неизвестна масса груза, переносимого манипулятором). Пусть $q\in R^n$ - вектор обобщенных координат системы, $p=\dot{q}$ - вектор обобщенных скоростей, S и u - n-мерные векторы внешних возмущений и управляющих сил соответственно, $T(q,p)=\frac{1}{2}\langle A(q)p,p\rangle$ - кинетическая энергия системы. Уравнения движения системы в форме Лагранжа имеют вид $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{\partial T}{\partial q}=S+u$.

(1)

Предположим, что положительно определенная симметрическая матрица $A(q)\in C^1$ неизвестна, ее собственные числа лежат на отрезке $[m,M]$, $0<m\le M$, а частные производные равномерно ограничены по норме, т.е.

$\forall z\in R^n\ \ mz^2\le\langle A(q)z,z\rangle\le Mz^2$,

$$\left|\frac{\partial A(q)}{\partial q_i}\right|\le D,\ D\succ 0,\ i=1,\dots,n.$$

Внешние силы S также считаются неизвестными, на векторы S и u наложены ограничения

$|S|\le S_0$, $S_0>0$, (2)

$|u|\le U$, $U>0$, (3)

Пусть даны константы m, M, D, U. Требуется привести систему в заданное терминальное положение $(\bar{q},0)$ за конечное время. При этом вдоль траектории движения должны выполняться ограничения (3).

Будем искать управление в форме линейной обратной связи по обобщенным координатам и скоростям

$$u=-ap-b(q-\bar{q}),$$

где a,b - кусочно-постоянные функции. Известно, что если a,b - положительные постоянные, то в отсутствие внешних возмущений при любом $\bar{q}$ положение равновесия $(\bar{q},0)$ замкнутой системы (1) асимптотически устойчиво в целом. Однако закон управления, основанный на линейной обратной связи с постоянными коэффициентами, имеет существенный недостаток: вдали от терминального положения управляющие силы не удовлетворяют ограничениям (3), а вблизи терминального положения управляющие силы малы, т.е. ресурсы управления не используются в полной мере, что приводит к бесконечному времени движения. Для того чтобы привести систему (1), в которой $S\equiv 0$, в терминальное положение $(\bar{q},0)$ за конечное время, в [1] разработан алгоритм изменения коэффициентов усиления a,b. В соответствии с алгоритмом эти коэффициенты кусочно-постоянны и возрастают по мере приближения траектории к точке $(\bar{q},0)$. В данной работе закон управления, использующий линейную обратную связь с кусочно-постоянными коэффициентами, применен для управления системой, на которую действуют неконтролируемые внешние возмущения.

Пусть даны начальные условия $q(0)=q_*$, $p(0)=p_*$ и константы m, M, D, U. Сформулируем такой закон изменения коэффициентов обратной связи a, b в управлении

$u=-ap-bq$, (4)

чтобы система (1),(4) приходила в положение (0,0) за конечное время и вдоль траектории выполнялись ограничения (3). Предположение о нулевых координатах терминального состояния не ограничивает общности, так как в качестве вектора обобщенных координат с самого начала можно выбрать вектор $q-\bar{q}$.

Рассмотрим функцию $W(q,p)=2Mp^2+(4M^2p^4+U^2q^2)^{1/2}$ и определим совокупность эллипсоидов $W(q,p)=W_k$, $k\in Z$, где $W_k=W_0/2^k$, $D_1=\sqrt{n}D/2$, $W_0=MU/4D_1$.