

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМАМ
МАШИНОВЕДЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ им. А.А. БЛАГОНРАВОВА
(Нижегородский филиал)
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»
(Национальный исследовательский университет)

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ
IX ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
им. Ю.И. Неймарка

Нижний Новгород, 24 – 29 сентября 2012 года

Конференция проводится при финансовой поддержке
Российской академии наук и РФФИ (проект 12-08-06076-г)

Нижний Новгород
2012

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ И СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Д.Д. Лещенко¹, А.Л. Рачинская², Ю.С. Щетинина²

¹Одесская государственная академия строительства и архитектуры
65029, Одесса, Украина, ул. Дирихсона, 4, e-mail: leshchenko_d@ukr.net

²Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
65082, Одесса, Украина, ул. Дворянская, 2,
e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua, powtampik@gmail.com

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически симметричного спутника со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, под действием моментов сил гравитации и сопротивления среды. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом считаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Проведены аналитическое исследование и численный анализ. Установлен эффект убывания модуля кинетического момента спутника. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат.

Рассматривается движение динамически симметричного спутника относительно центра масс с учетом моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Тело содержит полость, целиком заполненную жидкостью большой вязкости.

Для решения задачи введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 параллельна вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 параллельна нормали к плоскости орбиты. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ [2]. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} : ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3, y_3 и направлена так, что векторы y_1, y_2, y_3 образуют правую тройку [1], ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1, x_2). Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} .

Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Рассматривается динамически симметричный спутник ($A_1 = A_2$). Предполагается [2], что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0 / \omega \sim A_1 \omega_0 / G \ll 1$. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости $\varepsilon^2 : \|I\| / G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$ [3], где $\|I\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени. Также учитывается, что полость заполнена жидкостью большой вязкости [4], т.е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$),

$$\tilde{P} = P \operatorname{diag}(1,1,1), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{5259}, \quad (1)$$

где \tilde{P} – тензор, зависящий только от формы полости; ρ , ϑ – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, a – радиус полости.

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e . Зависимость истинной аномалии v от времени t дается соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0(1+e \cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1-e^2)^3}{l_0^3}}, \quad (2)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, Q – период обращения, e – эксцентриситет орбиты, μ – гравитационная постоянная.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i , $A_i (i=1,2,3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i . Проекции L_i складываются из гравитационного момента L_i^g , момента сил внешнего сопротивления L_i^r и момента сил вязкой жидкости в полости тела L_i^p .

Проекции гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r на ось Oy_1 имеют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} L_1^g &= \frac{3\omega_0^2(1+e \cos v)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \\ L_1^r &= -G \left(\frac{I_{11}\alpha_{11}\alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{12}\alpha_{11}\alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{13}\alpha_{11}\alpha_{33}}{A_3} \right), \\ S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \cos(v-\lambda) \cos \delta, \quad \beta_2 = \sin(v-\lambda), \quad \beta_3 = \cos(v-\lambda) \sin \delta.$$

Проекции моментов указанных сил на остальные оси записываются аналогично.

Проекции момента сил вязкой жидкости в полости тела с учетом внешних силовых факторов на оси $Oy_i (i=1,2,3)$ определяются согласно [4]:

$$\begin{aligned} L_i^p &= \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^2} \left\{ r^2 A_3 (p\alpha_{i1} + q\alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 + q^2) \alpha_{i3} \right\} + \left(-\frac{Pq}{A_3} J_3 - \frac{P}{A_1} \left[-qJ_3 + k_1 + l_1 - \frac{A_3 r}{A_1} (J_2 - m') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{A_1 q}{A_3} J_3 \right] \right) \alpha_{i1} + \left(\frac{Pp}{A_3} J_3 - \frac{P}{A_1} \left[pJ_3 + k_2 + l_2 + \frac{A_3 r}{A_1} (J_1 - m') - \frac{A_1 p}{A_3} J_3 \right] \right) \alpha_{i2} + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{P}{A_1} (q(J_1 - m') - p(J_2 - m')) - \frac{P}{A_3} (k_3 + l_3) \right) \alpha_{i3},$$

где

$$k_i = (I_{i1}q - I_{i2}p) \left[r - \frac{(\alpha_{33}(\alpha_{31}p + \alpha_{32}q))}{\sin^2 \theta} \right], \quad m' = (A_1 - A_3) \left(-\frac{3\gamma_{31}\gamma_{33}\mu}{R^3} \right),$$

$$l_i = \frac{G(\alpha_{32}p - \alpha_{31}q)}{\sin \theta} \left(\frac{I_{i2} \cos \varphi \cos \theta}{A_1} - \frac{I_{i3} \sin \theta}{A_3} + \frac{I_{i1} \cos \theta \sin \varphi}{A_1} \right),$$

$$J_i = I_{i1}p + I_{i2}q + I_{i3}r, \quad \gamma_{3i} = \alpha_{1i}\beta_1 + \alpha_{2i}\beta_2 + \alpha_{3i}\beta_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

R – расстояние от центра масс спутника до центра притяжения.

Гравитационная постоянная пропорциональна квадрату угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\mu \sim \varepsilon^2$. С учетом рассмотренных ранее предположений о малости сопротивления среды и о том, что полость заполнена жидкостью большой вязкости с точностью до величин второго порядка малости, проекции момента сил вязкой жидкости в полости тела на оси Oy_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^2} \left\{ r^2 A_3 (p\alpha_{i1} + q\alpha_{i2}) - A_1 r (p^2 + q^2) \alpha_{i3} \right\}.$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи будем применять метод усреднения [5].

В случае невозмущенного движения Эйлера–Пуансо (при $\varepsilon = 0$), когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ , ψ – линейные функции, а угол θ – величина постоянная [6]. В невозмущенном движении G , δ , λ , v – постоянные величины.

Для возмущенного движения углы φ , ψ являются быстрыми переменными, а переменные G , δ , λ , v , θ – медленными. Проводим усреднение системы (3) уравнений для медленных переменных G , δ , λ , θ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ . После усреднения по ψ и φ получим:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -G \left[\frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right], \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left[-\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{2A_3} + \frac{PG^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) \right] \cos \theta \sin \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos v)^3}{G (1 - e^2)^3} \sin(v - \lambda) \cos(v - \lambda) \sin \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos v)^3}{G (1 - e^2)^3} \cos^2(v - \lambda) \cos \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (4) и уравнение для истинной аномалии (1). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(v, \delta, \lambda),$$

$$\dot{v} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos v)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}. \tag{5}$$

Здесь Δ, Λ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (4), δ, λ –

медленные переменные, а v – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения [7] к данным уравнениям, получим

$$\frac{d\delta}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{2G(1-e^2)^{3/2}} (A_1 - A_3)(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta). \quad (6)$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента \mathbf{G} от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Рассмотрим первые два уравнения системы (4). Их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dG^2}{dt} &= [-a + b \cos 2\theta] G^2, \\ 2 \frac{d\theta}{dt} &= [hG^2 - b] \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3}, \quad b = \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} - \frac{I_{33}}{A_3}, \quad h = \frac{P(A_1 - A_3)}{A_1^3 A_3}.$$

Система уравнений (7) имеет первый интеграл

$$hG^2 - b \ln|G^2| = b \ln|\sin 2\theta| - a \ln|\tan \theta| + C, \quad C = \text{const}. \quad (8)$$

Исследуем поведение сферического угла в малой полуокрестности стационарных точек $\theta^\circ = 0$ и $\theta^\circ = \pi/2 + \delta\theta$ второго уравнения системы (4) при разных значениях центральных моментов инерции: $A_1 > A_3, A_1 < A_3$.

В первом случае $\theta^\circ = \delta\theta > 0$ имеем:

$$\delta\theta = \delta\theta_0 \exp \left[-bt - h \int_0^t G^2 dt \right]. \quad (9)$$

Из (9) следует, что при $A_1 > A_3$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно возрастает при $b < 0, h > 0$, а при $b > 0, h > 0$ – монотонно убывает. При $A_1 < A_3$ (вытянутое тело) вариация $\delta\theta$ убывает при $b > 0, h < 0$.

Рассмотрим второй случай: $\theta^\circ = \pi/2 + \delta\theta, \delta\theta < 0$. Имеем:

$$\delta\theta = \delta\theta_0 \exp \left[bt - h \int_0^t G^2 dt \right]. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при $A_1 > A_3$ вариация $\delta\theta$ монотонно возрастает, так как $b > 0, h > 0$, а при $b < 0, h > 0$ – монотонно убывает. При $A_1 < A_3$ (вытянутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает ($b > 0, h < 0$).

Систему (4) можно численно проинтегрировать. Характерными параметрами задачи будут G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени.

Безразмерные величины определяются равенствами:

$$\tilde{t} = \Omega_0 t, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}, \quad \tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{P} = \frac{P \Omega_0^2}{G_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{I}_{ii} = \frac{I_{ii}}{G_0}.$$

Получим для безразмерных переменных систему вида:

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \tilde{G} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\tilde{A}_1} (\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}) + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \cos^2 \theta \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon^2 \left[-\frac{\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} + \frac{\tilde{P}\tilde{G}^2}{\tilde{A}_1^3 \tilde{A}_3} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\varepsilon^2 \tilde{N} \cos \delta}{2\tilde{G}h(e)}, \\ \tilde{N} &= (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрирование системы (11) проводится для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$ при начальных условиях: $G(0) = 1$, $\delta(0) = \pi/4$ рад, $\lambda(0) = \pi/4$ рад, $\theta(0) = \pi/6$ рад, и значениях главных центральных моментов инерции тела $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_3$, $\tilde{A}_1 = 4.175$, $\tilde{A}_3 = 1.67$.

Было рассмотрено два расчетных случая для различных значений коэффициентов сопротивления: $\tilde{I}_{11} = 2.322$, $\tilde{I}_{22} = 1.31$, $\tilde{I}_{33} = 1.425$ и $\tilde{I}_{11} = 2.6$, $\tilde{I}_{22} = 3.0$, $\tilde{I}_{33} = 0.5$. Исследуется орбита с эксцентриситетом $e = 0$ – круговая орбита.

Результаты численного интегрирования в первом расчетном случае при $\tilde{I}_{11} = 2.322$, $\tilde{I}_{22} = 1.31$, $\tilde{I}_{33} = 1.425$ представлены на рис. 1–4. В этом случае величина в квадратных скобках второго уравнения системы (11) будет положительной. Графики построены для трех разных значений безразмерного коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости тела: $\tilde{P} = 0.5$, $\tilde{P} = 20$, $\tilde{P} = 100$, которые на рисунках отмечены кривыми 1, 2 и 3 соответственно.

Изменение величины вектора кинетического момента представлено на рис. 1. Численный анализ показывает, что увеличение влияния момента сил вязкой жидкости в полости тела приводит к торможению тела с меньшим градиентом.

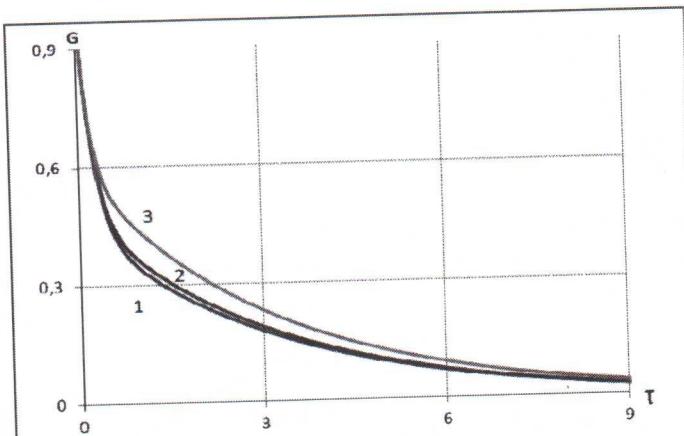


Рис. 1. График изменения величины вектора кинетического момента

Функция $\theta = \theta(t)$ (рис. 2) монотонно возрастает и угол θ стремится к предельному значению $\pi/2$. Стоит отметить, что при существенном влиянии момента сил вязкой жидкости в полости тела (кривая 3 рис. 2), процесс возрастания угла нутации происходит быстрее. Следовательно, это позволяет сделать вывод, что наличие в теле полости с вязкой жидкостью ускоряет нутацию спутника. При этом поворот вектора кинетического момента вокруг оси вертикали к плоскости орбиты замедляется (кривая 3, рис. 3).

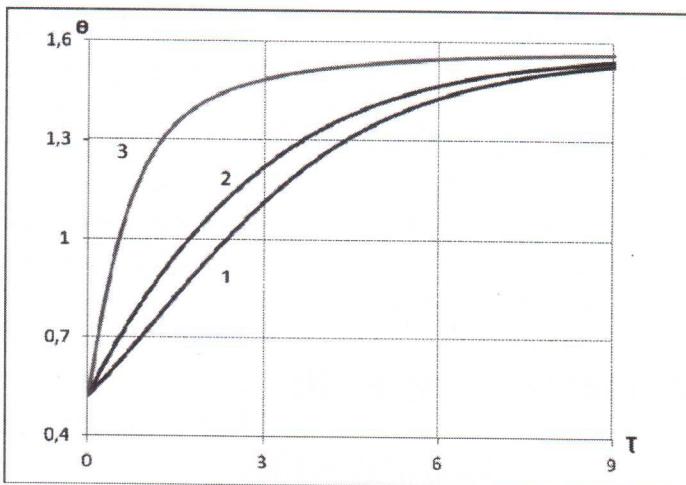


Рис. 2. Изменение угла нутации

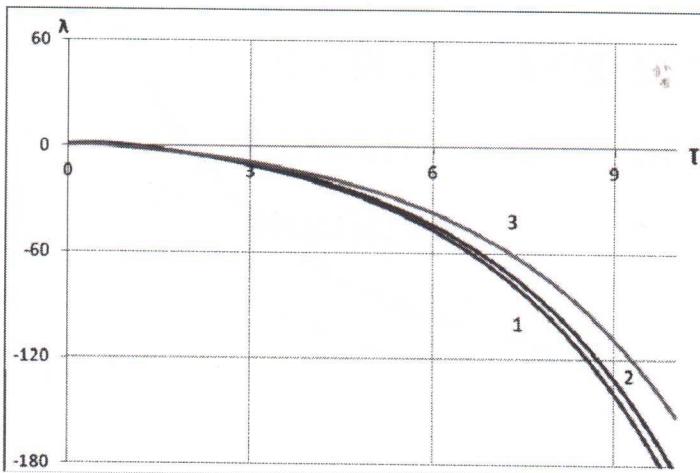


Рис. 3. Изменение угла ориентации вектора кинетического момента

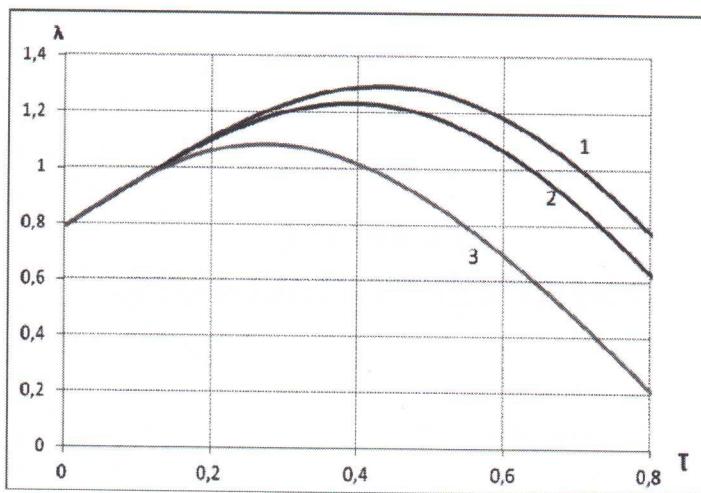


Рис. 4. Фрагмент графика изменения угла ориентации вектора кинетического момента

На рис. 5–7 представлено изменение параметров во втором расчетном случае при $\tilde{I}_{11} = 2.6$, $\tilde{I}_{22} = 3.0$, $\tilde{I}_{33} = 0.5$. При этом величина в квадратных скобках второго уравнения

системы (11) будет отрицательной. Поэтому на некотором начальном участке, соответствующем достаточно большим значениям \tilde{G} (см. рис. 5) при значительном влиянии момента сил вязкой жидкости в полости, угол θ стремится к $\pi/3$ (рис. 6, кривая 3). Однако с течением времени, когда \tilde{G} становится достаточно малым, твердое тело стремится к вращению вокруг оси A_1 . При слабом влиянии момента сил вязкой жидкости функция $\theta = \theta(t)$ начинает монотонно убывать (рис. 6, кривая 1), тогда как функция λ монотонно возрастает (рис. 7, кривая 1). Это происходит из-за того, что во втором расчетном случае выражение $(1 - 3\sin^2 \theta/2)$ для функции λ остается положительным на всем интервале времени. В первом расчетном случае угол θ увеличивается и проходит критическое значение $\theta^* \approx 0,96$ рад, поэтому знак выражения \tilde{N} в (11) меняется, а, следовательно, функция λ монотонно убывает (рис. 4).

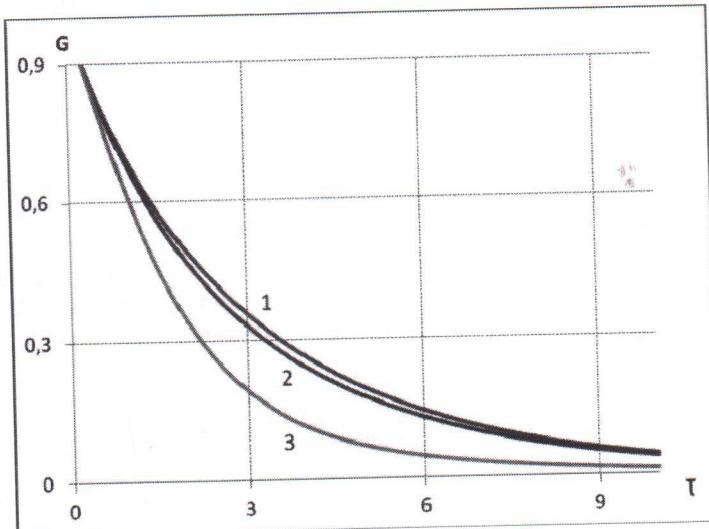


Рис. 5. График изменения величины вектора кинетического момента

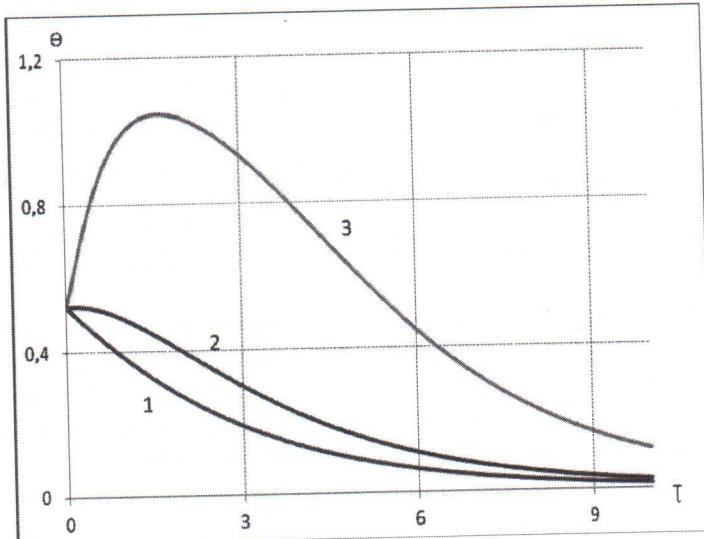


Рис. 6. Изменение угла нутации

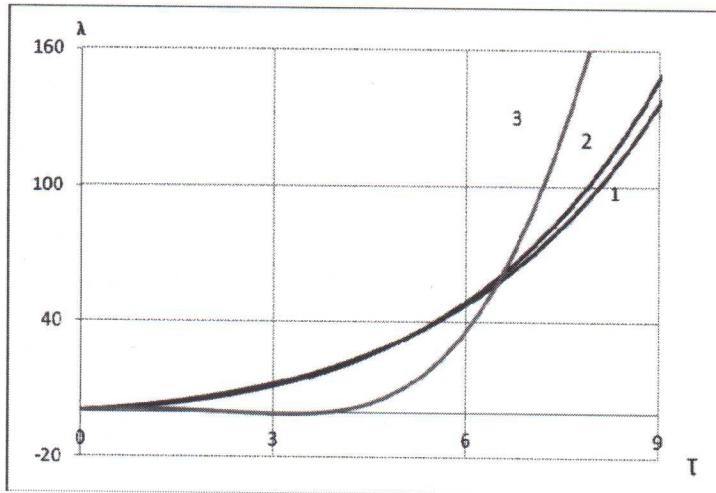


Рис. 7. Изменение угла ориентации вектора кинетического момента

Если в системе (11) положить $\tilde{P} = 0$ (полость с жидкостью отсутствует), то результат численного расчета полностью совпадает с [8]. В случае отсутствия влияния сопротивления были получены результаты, соответствующие исследованиям в [7].

Таким образом, исследовано движение динамически симметричного спутника относительно центра масс под действием совместного влияния гравитационного притяжения, линейного сопротивления и момента сил вязкой жидкости в полости тела. Аналитически и численно установлены основные свойства вращений.

Список литературы

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, №3. С. 474-483.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. №3. С. 5-13
4. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физ. 1965. Т. 5, №6. С. 1049-1070.
5. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
7. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. 2002. – Т. 66, №2. С. 165-176.
8. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. 2006. Вып. 36. С. 58-63.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 126-139.