ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2018, № 5, с. 3 – 8

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62-50

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ВРАЩЕНИЙ ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ, СВЯЗАННОЙ С ТЕЛОМ ДЕМПФЕРОМ С КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ[1]

Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко

Россия, Москва, ИПМех РАН, Украина, Одесса,

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

e-mail: kumak@ipmnet.ru, kushpil.t.a@gmail.com, leshchenko_d@ukr.net

Поступила в редакцию 08.05.18 г. После доработки 25.05.18 г.

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений динамически симметричного твердого тела под действием малого управляющего момента сил в эллипсоидальной области значений с неравными близкими значениями полуосей эллипсоида. Такая задача считается задачей квазиоптимального управления. Предполагается, что тело содержит подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на тело извне действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Задача синтеза квазиоптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного тела в сопротивляющейся среде исследована аналитически и численно. С помощью методики усреднения по фазе прецессионного движения проведено приближенное решение. Определены качественные свойства квазиоптимального движения, приведены графики.

DOI: 10.31857/S000233880002841-4

Введение. Развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в том, что тела не являются абсолютно твердыми, а близки к идеальным моделям. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе методов сингулярных возмущений, усреднения и других асимптотических методов нелинейной механики. Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в динамических уравнениях Эйлера для фиктивного твердого тела. Исследованию движения твердых тел с внутренними степенями свободы посвящены, например, работы [1 – 8].

Анализу неуправляемых движений твердого тела в среде с сопротивлением уделялось большое внимание [3, 5, 9 – 11]. Проблема управления вращениями «квазитвердых» тел посредством сосредоточенных (приложенных к жесткому корпусу или несущему твердому телу) моментов сил, менее исследована [4, 5, 12].

Рассматривается задача квазиоптимального (близкого к оптимальному) торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной точечной массой, прикрепленной к точке на оси симметрии. Считается, что при относительном движении на точку действует возвращающаяся упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости (квадратичное трение). На тело также действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды.

1. Построение модели. Рассматриваются управляемые вращательные движения динамически симметричного твердого тела, соединенного в точке на оси симметрии с подвижной массой относительно малых линейных размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил сопротивления среды.

На основании подхода [4] асимптотически приближенные уравнения управляемых вращательных движений в системе координат, связанной с телом (динамические уравнения Эйлера), записываются в виде

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10343).

$$\dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^v + \mathbf{M}^r. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{M}^u$ – вектор управляющего внешнего момента сил, $\mathbf{M}^v$ – вектор внутреннего возмущающего момента сил, обусловленный упругостью и квадратичным трением демпфера, $\mathbf{M}^r$ – момент сил сопротивления среды [9 – 11]. Вектор $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент тела, где $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – постоянный тензор инерции невозмущенного тела, $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости, определяемый его проекциями на связанные оси. Модуль кинетического момента тела имеет вид

$$G = |\mathbf{G}| = \left[A_1^2(p^2+q^2) + A_3^2 r^2\right]^{1/2} \equiv \left[A_1^2\omega_\perp^2 + A_3^2 r^2\right]^{1/2}, \; A_1 \neq A_3, \;\; \omega_\perp^2 = p^2 + q^2.$$

Величина управляющего момента сил предполагается малой порядка ε. Компоненты управляющего момента сил представлены в виде произведений $b_i u_i$, $i = 1,2,3$ [4, 13]:

$$M_i^u = b_i u_i, \;\; u_i = -G_i G^{-1}, \; i = 1,2,3, \; |\mathbf{u}| \le 1. \tag{1.2}$$

где постоянные выражения b_i имеют размерность момента силы и достаточно близки, они характеризуют эффективность системы управления по каждой из связанных осей, u_i – безразмерные управляющие функции, подлежащие определению.

С целью упрощения решения задачи оптимального управления в систему (1.1) внесено структурное ограничение. Считается, что момент сил сопротивления среды пропорционален кинетическому моменту тела [3, 9, 10]

$$\mathbf{M}^r = -\lambda \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \tag{1.3}$$

где λ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и формы тела и имеющий размерность угловой скорости.

Приближенная система уравнений управляемого движения (1.1) в проекциях на главные центральные оси инерции тела с учетом (1.2), (1.3) имеет вид [2-5, 9, 10, 13]

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p} + (A_3 - A_1)qr = -b_1 A_1 p G^{-1} + FG^2 qr + Spr^6\omega_\perp - \lambda A_1 p, \\ &A_1\dot{q} + (A_1 - A_3)pr = -b_2 A_1 q G^{-1} - FG^2 pr + Sqr^6\omega_\perp - \lambda A_1 q, \\ &A_3\dot{r} = -b_3 A_3 r G^{-1} - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_\perp^3 - \lambda A_3 r, \;\; 0 < A_3 \le 2A_1, \;\; A_3 \neq A_1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Отметим, что при $b_1 = b_2 = b_3 = b$, где параметр b может быть функцией времени, управление (1.2) является оптимальным. Если величины b_i близки, то указанный закон будет квазиоптимальным. Введенные в (1.4) обозначения F, S выражаются через параметры системы следующим образом [2, 3]:

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-3}A_3, \;\; S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|A_1^{-4}A_3^4, \;\; d = 1 - A_3 A_1^{-1}. \tag{1.5}$$

Коэффициенты F, S характеризуют моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – радиус-вектор точки крепления подвижной массы, которая находится на оси динамической симметрии данного тела. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \mu/m = \Lambda\Omega^3$, $\Omega \gg \omega_0$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания; c – жесткость, μ – коэффициент квадратичного трения, ω_0 – модуль начального значения угловой скорости.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ_1 и Ω таковы, что свободные колебания точки, вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела в этом случае близко к движению Эйлера-Пуансо, а относительные колебания, вынуждаемые этим движением, будут малыми.

Неравенство $\Omega \gg \omega_0$ позволяет ввести малый параметр в (1.5) и считать возмущающие моменты малыми с целью применения метода усреднения. При этом возможность начального переходного процесса не исключается.

Ставится задача квазиоптимального по быстродействию торможения вращений:

$$\boldsymbol{\omega}(T) = 0,\ T \to \min_{|\mathbf{u}|\le 1}. \tag{1.6}$$

Параметры b_i предполагаются близкими ($b_i \approx b,\ \ |b_i - b| \ll b$).

2. Асимптотический подход к решению задачи квазиоптимального торможения. Вначале обезразмерим задачу. Для определенности выбираем момент инерции тела относительно оси x_1 — $A_1 = A_2$ и величину порядка начальной скорости — ω_0 в качестве характерных параметров рассматриваемой задачи. Введем безразмерные коэффициенты инерции $\tilde{A}_i = A_i / A_1$ и безразмерное время $\tau = \omega_0 t$.

Система (1.4) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -\left(\tilde{A}_3 - 1\right)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\frac{\tilde{b}_1\tilde{p}}{\tilde{G}} + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{p}\tilde{r}^6\tilde{\omega}_\perp - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p},\\
\frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -\left(1 - \tilde{A}_3\right)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\frac{\tilde{b}_2\tilde{q}}{\tilde{G}} - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{q}\tilde{r}^6\tilde{\omega}_\perp - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q},\\
\frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\varepsilon\frac{\tilde{b}_3\tilde{r}}{\tilde{G}} - \varepsilon\tilde{S}\tilde{A}_3^{-2}\tilde{r}^5\tilde{\omega}_\perp^3 - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь с учетом сделанных допущений введены обозначения:

$$\begin{gathered}
\varepsilon\tilde{F} = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2,\ \ \varepsilon\tilde{S} = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}(1-\tilde{A}_3)\left|1-\tilde{A}_3\right|A_1^{-1}\tilde{A}_3^4\omega_0^6,\\
\varepsilon\tilde{b}_i = b_i / A_1\omega_0^2,\ \varepsilon\tilde{\lambda} = \lambda/\omega_0,\ \tilde{G} = G/A_1\omega_0,\ \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем использовать безразмерные переменные, опуская ~.

Используем общее порождающее решение системы (2.1) при $\varepsilon = 0$:

$$p = a\cos\psi,\quad q = a\sin\psi,\quad a > 0,\quad r = \mathrm{const} \ne 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\psi = \left(A_3 - 1\right)r\tau + \psi_0$ — фаза колебаний экваториальной составляющей вектора угловой скорости.

Подставим (2.3) в третье уравнение системы (2.1). Для первых двух уравнений (2.1) учитываем, что $a^2 = p^2 + q^2$ и $\dot{a} = \dot{p}\cos\psi + \dot{q}\sin\psi$. Усредним полученную систему уравнений для a и r по фазе ψ. С введением медленного аргумента $\theta = \varepsilon\tau$ после усреднения система примет вид

$$\begin{aligned}
a' &= -\frac{a}{2}\left[G^{-1}\left(b_1 + b_2\right) - 2Sr^6a + 2\lambda\right],\\
r' &= -r\left(b_3G^{-1} + SA_3^{-2}r^4a^3 + \lambda\right),\qquad ' = d/d\theta.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Среднее выражений, содержащих множитель F, равно нулю. Отметим, что при $b_1 = b_2 = b_3 = b$ уравнения для a и r интегрируются полностью и данная задача оптимального управления аналитически решена в [5,12].

3. Приближенный анализ. Исследуем частный случай

$$0.5(b_1 + b_2) = b_3 = b. \tag{3.1}$$

Домножим первое уравнение (2.1) на p, второе — на q, а третье — на $A_3^2 r$ и сложим. Проведя усреднение, получим следующие уравнение:

$$G' = -b - \lambda G. \tag{3.2}$$

Начальное и конечные условия имеют вид

$$G(0) = G^0,\ G\left(T, \theta_0, G^0\right) = 0,\ \ T = T\left(\theta_0, G^0\right). \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.2) с учетом условий (3.3) записывается следующим образом:

$$G(\theta) = -\frac{b}{\lambda} + \left(G^0 + \frac{b}{\lambda}\right)\exp(-\lambda\theta),\ \ \Theta = \frac{1}{\lambda}\ln\left(G^0\frac{\lambda}{b} + 1\right). \tag{3.4}$$

Заметим, что величина $\Theta \to \infty$ при $G^0/b \to \infty$ для различных λ; в свою очередь $\Theta \to 0$ при $G^0\lambda/b \to 0$ (λ - любое) или при $\lambda \to \infty$.

Для системы (2.4) при условии (3.1) воспользуемся заменой переменных: $r = \eta G,\ a = \alpha G$. В этом случае уравнения системы (2.4) принимают вид

$$\alpha' = S\alpha^2\eta^6 G^7,\ \ \ \eta' = -A_3^{-2} S\alpha^3\eta^5 G^7. \tag{3.5}$$

Разделим первое уравнение на второе и получим

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = -\frac{A_3^2\eta}{\alpha}.$$

Находим первый интеграл C_1:

$$\eta^2 = 2C_1 - A_3^{-2}\alpha^2,\ C_1 = \frac{1}{2}A_3^{-2}. \tag{3.6}$$

Подставим η^2 из (3.6) в первое уравнение системы (3.5):

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = SA_3^{-6}G^7\left(1 - \alpha^2\right)^3\alpha^2,\ \ \ G_0 = 1. \tag{3.7}$$

При подстановке выражения для G (3.4) в уравнение (3.7) для α последнее интегрируется и его решение записывается в виде [14]

$$A_3^6\left[-\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{4\left(1-\alpha^2\right)^2}+\frac{7\alpha}{8\left(1-\alpha^2\right)}+\frac{15}{16}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|\right]=$$
$$=S\left[-\frac{b^7}{\lambda^7}\theta-\frac{7b^6}{\lambda^7}b_*\exp(-\lambda\theta)+\frac{21b^5}{2\lambda^6}b_*^2\exp(-2\lambda\theta)-\right.$$
$$-\frac{35b^4}{3\lambda^5}b_*^3\exp(-3\lambda\theta)+\frac{35b^3}{4\lambda^4}b_*^4\exp(-4\lambda\theta)-\frac{21b^2}{5\lambda^3}b_*^5\exp(-5\lambda\theta)+ \tag{3.8}$$
$$\left.+\frac{7b}{6\lambda^2}b_*^6\exp(-6\lambda\theta)-\frac{1}{7\lambda}b_*^7\exp(-7\lambda\theta)\right]+C_2,$$
$$b_*=G_0+\frac{b}{\lambda}=1+\frac{b}{\lambda}.$$

Вторая постоянная интегрирования C_2 определяется из начального условия ($\theta=0$, $\alpha=\alpha_0$) и записывается как

$$C_2=\left[-\frac{1}{\alpha_0}+\frac{\alpha_0}{4(1-\alpha_0^2)^2}+\frac{7\alpha_0}{8(1-\alpha_0^2)}+\frac{15}{16}\ln\left|\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right|\right]A_3^6-$$
$$-S\left[-\frac{7b^6}{\lambda^7}b_*+\frac{21b^5}{2\lambda^6}b_*^2-\frac{35b^4}{3\lambda^5}b_*^3+\frac{35b^3}{4\lambda^4}b_*^4-\frac{21b^2}{5\lambda^3}b_*^5+\frac{7b}{6\lambda^2}b_*^6-\frac{1}{7\lambda}b_*^7\right].$$

4. Численный расчет. Для решения системы (2.4) были проведены численные исследования для перенормированных начальных условий $G_0=1$, $A_3=1.2$, $a_0=0.35$, $r_0=\left(1-a_0^2\right)^{1/2}/A_3$ и двух значений перенормированного коэффициента сопротивления $\lambda=1.2$; 1.8; коэффициентов управляющего момента $b_1=1.625$, $b_2=1$, $b_3=1.25$, причем $0.5(b_1+b_2)\neq b_3$, коэффициента $S=1$. Параметры выбраны таким образом, чтобы удовлетворять условиям: $A_3\le 2$, $a_0<r_0$. Для построения графика модуля кинетического момента использовалось выражение $G=|\mathbf{G}|=\left(a^2+A_3^2r^2\right)^{1/2}$.

На рис. 1, 2 представлены графики изменения функций a, r, G при значениях $\lambda=1.2$ (рис. 1) и $\lambda=1.8$ (рис. 2). Из графиков видно, что при увеличении коэффициента сопротивления торможение твердого тела происходит быстрее (рис. 2). Время торможения в первом расчетном случае равно $T\simeq 0.55$, а во втором $T\simeq 0.49$.

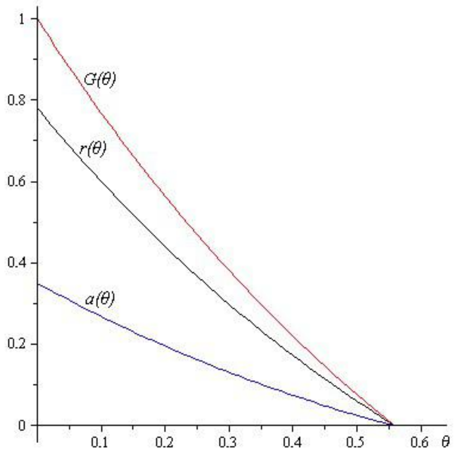

Рис. 1

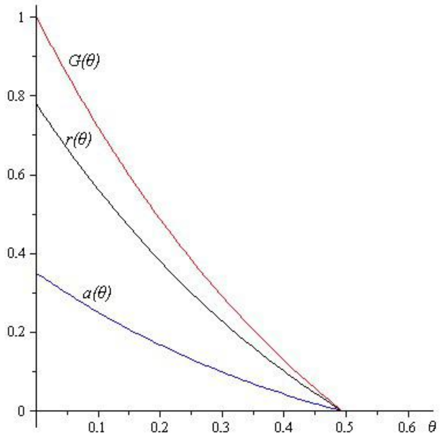

Рис. 2

Заключение. Исследована задача квазиоптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, связанной с телом демпфером с квадратичной диссипацией в среде с сопротивлением. В рамках асимптотического подхода получена усредненная система уравнений, для принятых числовых значений безразмерных параметров определены время быстродействия, а также графики изменения кинетического момента и величин a, r экваториальной и осевой компонент вектора угловой скорости квазитвердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. №4. С.33–44.
2. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. №5. С.29–34.
3. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 2017. 241p.
4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368с.
5. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я.С.* Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: Одесский национальный ун-т им. И.И. Мечникова, 2013. 288с.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824с.
7. *Thomson W.T.* Introduction to Space Dymamics. N.Y.: Dover, 1986. 317p.
8. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Щетинина Ю.С.* Квазиоптимальное торможение вращений твердого тела с подвижной массой в среде с сопротивлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. №2. С. 16–21.
9. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
10. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. II. М.: Наука, 1983. 544с.
11. *Leimanis E.* The General Problem of The Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1965. 337p.
12. *Акуленко Л.Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д.* Оптимальное торможение вращений симметричного твердого тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением // Вестник Одесск. нац. ун-та. Математика и механика. 2009. Т.14. Вып. 20. С.135–144.
13. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384с.
14. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228с.