УДК 5393

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОКРЫТИЙ ТЕЛ С УЧЕТОМ ИЗНОСА И ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Александров В.М. *(Московский государственный университет, г. Москва)*, **Гавдзинский В.Н.** *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*, **Мальцева Е.В.** *(Одесский экономический университет, г. Одесса)*

Рассмотрены квазистационарные плоские задачи несвязной термоупругости для шероховатых покрытий жестких тел с учетом тепловыделения от трения и износа. При весьма общей зависимости коэффициента трения, контактного термосопротивления, закона износа и закона смятия шероховатостей от давления получено относительно контактного давления нелинейное интегральное уравнение Вольтерра. В частном случае решение его найдено с помощью асимптотических методов. В итоге определены контактные температуры, контактное давление и закономерность их изменения во времени. Исследовано явление термосиловой неустойчивости, являющееся причиной заедания и катастрофического износа в триботехнических узлах.

1. Пусть упругие шероховатые слои (покрытия), имеющие различные толщины $h_i (i = 1,2)$, а также различные механические и теплофизические характеристики, нанесены на недеформируемые подложки. Такие два тела сближены на величину k так, что толщина пакета слоев равна $h_1 + h_2 - k$. Далее будем считать, что $k << \min(h_1, h_2)$ и имеет порядок перемещения в линейной теории упругости. В момент времени $t = 0$ одно из тел начинает скользить относительно другого в направлении оси z или оси x со скоростью V. Динамическими эффектами будем пренебрегать.

На границе между слоями возникают силы трения.

$$\tau = k(q)q \qquad (1.1)$$

где $q(t)$ – контактное давление, медленно меняющееся со временем t, $k(q)$ – коэффициент трения, зависящий в общем случае от давления.

Силы трения вызывают изнашивание слоев. Далее будем предполагать, что изменение толщины слоев вследствие износа невелико и сравнимо с упругими перемещениями. Эти же силы совершают в единицу времени работу

$$Q = V\tau \tag{1.2}$$

которая, как показано в [1], практически вся переходит в тепло. Поэтому должна быть рассмотрена задача теплопроводности для тел с покрытиями при наличии источников тепла в зоне их контакта *(y=0)*.

Поскольку *q(t)* изменяется медленно, то процесс теплопроводности в слоях 1 и 2 можно считать квазистационарным. Примем также, что температура подложки слоя 2 равна температуре окружающей среды, ее можно принять за начало отсчета и положить равной 0. Температуру подложки слоя 1 обозначим $T_0 (T_0 \geq 0)$, а температуру поверхностей слоев и области контакта – через T_1^* и T_2^*. Тогда для температур в слоях с учетом того, что все величины в задаче зависят только от *t* и *y*, имеем

$$T_1 = T_1^*(1-\frac{y}{h_1}) + T_0\frac{y}{h_1}, \qquad T_2 = T_2^*(1+\frac{y}{h_2}) \tag{1.3}$$

Для определения контактных температур удовлетворим с помощью (1.3) условиям неидеального теплового контакта при *y=0*

$$\lambda_2 T_2' = V\tau, \qquad \lambda_2 T_2' + \lambda_1 T_1' = 2[r(q)]^{-1}(T_1 - T_2) \tag{1.4}$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности материалов слоев 1 и 2, *r(q)* – контактное термосопротивление, зависящее в общем случае от давления. Смысл его в связи с так называемым «третьим теплом» разъяснен в работе [1]. В результате подстановки (1.3) в (1.4) имеем

$$\begin{gathered} T_1^* = \left[Vkqh_1(\lambda_2 r + 2h_2) + 2\lambda_1 T_0(\lambda_2 r + h_2)\right]\Delta^{-1}, \\ T_2^* = \left[Vkqh_2(\lambda_1 r + 2h_1) + 2h_2\lambda_1 T_0\right]\Delta^{-1}, \\ \Delta = 2(\lambda_1\lambda_2 r + h_2\lambda_1 + h_1\lambda_2). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Нужно потребовать, чтоб T_1^* и T_2^* в любой момент времени не достигали температур плавления $T_{1П}$ и $T_{2П}$ материалов соответствующих слоев. Это условие накладывает некоторые ограничения на значения величин V и T_0.

Запишем условие механического контакта слоев 1 и 2

$$v_2(-h_2,t) - v_1(h_1,t) + v_2(t) - v_1(t) = k\,, \tag{1.6}$$

где $v_1(h_1,t)$ и $v_2(-h_2,t)$ – перемещение жестких подложек в направление оси у, вызванные деформированием упругих слоев 1 и 2, $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – перемещение жестких подложек в том же направлении в результате износа слоев и смятии шероховатостей. На основании уравнений линейной несвязанной термоупругости [2] с учетом выражений для температур (1.3), а также граничных условий $v_1(0,t) = v_2(0,t) = 0$, $\sigma_{y1}(0,t) = \sigma_{y2}(0,t) = -q(t)$ где σ_y – нормальное напряжение и *q(t)* – контактное давление между слоями, найдем

$$v_1(h_1,t) = -\frac{qh_1}{G_1\delta_1} + \frac{1}{2}\beta_1 h_1 (T_0 + T_1^*)$$

$$v_2(-h_2,t) = -\frac{qh_2}{G_2\delta_2} - \frac{1}{2}\beta_2 h_2 T_2^* \tag{1.7}$$

$$\delta_i = 2(1-\nu_i)(1-2\nu_i)^{-1}, \qquad \beta_i = \alpha_i(1-\nu_i)(1-\nu_i)^{-1}$$

причем G_i и ν_i – упругие постоянные материалы слоев, α_i – их коэффициенты линейного расширения. Разность $v_2(t) - v_1(t)$ можно представить в виде [3,4]

$$v_2(t) - v_1(t) = V\int_0^t f(q)d\tau + qg(q) \tag{1.8}$$

где в общем случае *f(q)* и *g(q)*– некоторые нелинейные функции давления, определяющие соответственно характер износа и закон деформирования шероховатостей.

Подставляя в (1.6) выражения (1.7), (1.8) и (1.5), получим следующее интегральное уравнение для определения контактного давления

$$[\gamma_1(q) - V\gamma_2(q)]q - T_0\varsigma(q) + V\int_0^t f(q)d\tau = k\ , \qquad (1.9)$$

где введены обозначения

$$\gamma_1(q) = h_2(G_2\delta_2)^{-1} + h_1(G_1\delta_1)^{-1} + g(q)\ ,$$
$$\gamma_1(q) = k\left[\beta_2 h_2^2(\lambda_1 r + 2h_1) + \beta_1 h_1^2(\lambda_2 r + 2h_2)\right](2\Delta)^{-1}, \qquad (1.10)$$
$$\varsigma(q) = (\beta_2 h_2^2\lambda_1 + \beta_1 h_1^2\lambda_2 + 2\beta_1 h_1 h_2\lambda_1 + 2\beta_1 h_1\lambda_1\lambda_2 r)\Delta^{-1}\ .$$

Для зависимостей *k(q)*, *r(q)*, *f(q)* и *g(q)* часто принимают выражения

$$k = k_0(Aq^{\alpha} + 1 + Bq^{-\beta})\ ,$$
$$r = Cq^{-\gamma}\ ,\quad f = Dq^{\delta}\ ,\quad g = Eq^{\varepsilon}\ , \qquad (1.11)$$

где $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε – экспериментально определенные положительные постоянные, причем $\alpha < 1$, $\beta \le 1$, $\gamma \approx 1$, $\delta \ge 1$ и $-1 < \varepsilon \le 1$.

Интегральное уравнение (1.9) очевидно эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\left[\gamma_1(q) - V\gamma_2(q) - V\gamma_2'(q)q - T_0\varsigma'(q)\right]q' + Vf(q) = 0 \qquad (1.12)$$

при начальном условии

$$\left\{[\gamma_1(q) - V\gamma_2(q)]q - T_0\varsigma'(q)\right\}_{t=0} = k \qquad (1.13)$$

Последнее в общем случае является трансцендентным уравнением относительно *q(0)*. Существование решения этого уравнения такого, что *q(0)>0*, является условием термосиловой устойчивости [5]. Это условие накладывает еще одно ограничение на значение величин V и

T_0. Выполнение упомянутого условия обеспечивает затухание $q(t)$ при $t \to \infty$. После нахождения $q(0)$ из (1.13) решение уравнения (1.12) может быть, например, осуществлено на ЭВМ методом Рунге-Кутта. Затем по формулам (1.5) могут быть найдены контактные температуры слоев.

2. Рассмотрим частный случай. Пусть в (1.11) $A = B = \alpha = \beta = \varepsilon = 0$, $\delta = \gamma = 1$. Тогда уравнению (1.9) можно придать вид

$$\left(\gamma_1 - V\frac{a+bq}{c+dq}\right)q + VD\int_0^t q\,d\tau = k + T_0\frac{m+nq}{c+dq}, \qquad (2.1)$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} a = 2^{-1}k_0C(\beta_2 h_2^2\lambda_1 + \beta_1 h_1^2\lambda_2), \\ b = k_0 h_1 h_2(\beta_2 h_2 + \beta_1 h_1), \\ c = 2\lambda_1\lambda_2 C, \quad d = 2(h_2\lambda_1 + h_1\lambda_2), \quad m = 2\beta_1 h_1\lambda_1\lambda_2 C, \\ n = \beta_2 h_2^2\lambda_1 + 2\beta_1 h_1 h_2\lambda_1 + \beta_1 h_1^2\lambda_2. \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Построим асимптотическое решение уравнения (2.1) при малом относительном времени t. Для этого будем искать q в форме разложения

$$q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i. \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), раскладывая слева и справа все члены по степеням t, а, затем, приравнивая члены при одинаковых степенях, получим для определения первых трех a_i, следующие соотношения

$$a_0\left(\gamma_1-\frac{VA_*}{C_*}\right)-\frac{T_0M_*}{C_*}=\kappa,\qquad Pa_1+VDa_0=0,$$

$$Pa_2+\frac{1}{2}VDa_1-\frac{a_1^2V}{C_*}\left(b-\frac{A_*d}{C_*}\right)\left(1-\frac{A_*d}{C_*}\right)+\frac{T_0a_1^2d}{C_*^2}\left(n-\frac{M_*d}{C_*}\right)=0, \tag{2.4}$$

$$A_*=a+ba_0,\qquad C_*=c+da_0,\qquad M_*=m+na_0,$$

$$P=\gamma_1-\frac{VA_*}{C_*}-\frac{Va_0}{C_*}\left(b-\frac{A_*d}{C_*}\right)-\frac{T_0}{C_*}\left(n-\frac{M_*d}{C_*}\right).$$

Здесь первое соотношение является нелинейным алгебраическим уравнением относительно a_0. Единственное решение этого уравнения такое, что $a_0>0$, существует при условиях

$$\gamma_1 d>Vb,\qquad \gamma_1 c>Va+T_0n+\kappa d. \tag{2.5}$$

Эти условия в рассматриваемом случае являются условиями термосиловой устойчивости. Второе и третье соотношения (2.4) служат для последовательного определения a_1 и a_2. Возможность построения дальнейших членов $(i\geq 4)$ асимптотического решения (2.3) с одновременным уточнением предыдущих очевидна.

Построим асимптотическое решение уравнения (2.1) при большом относительном времени t. Для этого придадим уравнению (2.1) следующую форму

$$[F+Gql(q)]q+VD\int_0^t q\,d\tau=H, \tag{2.6}$$

где введены обозначения

$$F=\gamma_1-\frac{Va}{c}+\frac{T_0}{c}\left(\frac{md}{c}-n\right),\qquad H=\kappa+\frac{T_0m}{c},$$

$$G=\frac{V}{c}\left(\frac{ad}{c}-b\right)-\frac{T_0d}{c^2}\left(\frac{md}{c}-n\right),\qquad l(q)=\left(1+\frac{d}{c}q\right)^{-1}. \tag{2.7}$$

Заметим, что в силу второго условия (2.5) величина $F>0$, величина G может иметь любой знак в зависимости от параметров задачи.

Будем решать уравнение (2.6) методом последовательных приближений с учетом того факта, что $q \to 0$ при $t \to \infty$. Именно, первое приближение найдем из уравнения с отброшенным вторым слагаемым в квадратной скобке (2.6). Нетрудно убедиться, что тогда

$$q_1 = \lambda e^{-\mu t}, \qquad \lambda = HF^{-1}, \qquad \mu = VDF^{-1}. \tag{2.8}$$

Второе приближение найдем из уравнения

$$(F + Gq_1)q_2 + VD\int_0^t q_2 d\tau = H. \tag{2.9}$$

Сведем его к эквивалентному при соответствующем начальном условии дифференциальному уравнению. Далее будем иметь

$$q_2 = E(F + G\lambda)^{2G\lambda - 1}(F + G\lambda e^{-\mu t})^{-2G\lambda} e^{-\mu t}. \tag{2.10}$$

Возможность построения следующих приближений для решения уравнения (2.6) при больших t очевидна.

Далее с помощью (2.3) и (2.10) по формулам (1.5) соответственно для малых и больших t могут быть найдены контактные температуры T_1^* и T_2^*. Обратим внимание, что при $t = 0$ контактные температуры оказываются максимальными, это дефект квазистационарной постановки задачи теплопроводности. Однако относительное время выхода контактных температур на максимальные значения обычно весьма мало, затем температуры T_1^* и T_2^* начинают медленно уменьшаться до значений T_0 и 0 за счет стремления к нулю контактного давления q и стремления к бесконечности контактного термосопротивления r.

3. Пусть жесткий круглый сердечник с кольцевым упругим покрытием толщины $h_1 = \rho_1 - R_1$ и жесткая круглая обойма с кольцевым упругим покрытием толщины $h_2 = R_2 - \rho_2$ ($\rho_1 - \rho_2 = \kappa$) собраны с натягом и взаимодействуют по поверхности контакта $r = R$

($\rho_2 < R < \rho_1$). Будем считать, что натяг $\kappa << \min(h_1, h_2)$ и т.д. по аналогии с задачей, рассмотренной в п.1. В момент времени $t = 0$ сердечник с покрытием начинает скользить относительной обоймы с покрытием в направлении оси z со скоростью V (вариант 1) или начинает вращаться вокруг оси z с угловой скоростью ω так, что в области контакта относительная скорость взаимодействующих поверхностей покрытий $V = \omega R$ (вариант 2). Условие механического контакта здесь будет иметь вид

$$v_2(R,t) - v_1(R,t) + v_2(t) - v_1(t) = \kappa, \tag{3.1}$$

где $v_2(R,t)$ и $v_1(R,t)$ – перемещения точек поверхностей покрытий в области контакта в направлении оси r. Если еще допустить, что толщины покрытий h_1 и h_2 малы по сравнению с R, то, рассуждая как в п.1, получим для контактных температур формулы (1.5), а относительно контактного давления q – уравнение (1.9).

Рассмотрим еще один случай, когда сердечник отсутствует и пустотелая круглая труба, посаженная с натягом κ внутрь обоймы с покрытием, скользит в направлении оси z со скоростью V (вариант 1) или вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω (вариант 2). Будем считать, что внутренняя поверхность трубы нагрета до температуры T_0 и свободна от нормальных усилий, а толщины h_1 и h_2, как и выше, малы по сравнению с R. В этом случае для контактных температур снова будут иметь место формулы (1.5) и, кроме того, $v_2(R,t)$ в (3.1) будет определяться второй формулой (1.7). Для $v_1(R,t)$ получим

$$v_1(R,t) = -\frac{(1-v_1)qR^2}{2G_1h_1}\left(1 + \frac{h_1}{2R} + \frac{h_1^2}{4R^2}\right) + \frac{qR}{2G_1} + \frac{1}{2}(1-v_1)\beta_1 R \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\Delta}[VkqP_1(r) + 2T_0Q_1(r)] + \frac{h_1}{3\Delta^2 R}[VkqP_2(r) + 2T_0Q_2(r)]\right\},$$

$$P_1(r) = h_1(\lambda_2 r + 2h_2), \qquad Q_1(r) = 2\lambda_1\lambda_2 r + 2h_2\lambda_1 + h_1\lambda_2, \tag{3.2}$$

$$P_2(r) = 5\lambda_1\lambda_2^2 r^2 h_1 + 15\lambda_1\lambda_2 r h_1 h_2 - 3\lambda_1\lambda_2 r h_2^2 + 2\lambda_2^2 r h_1^2 +$$

$$+ 10\lambda_1 h_1 h_2^2 - 6\lambda_2 h_1 h_2^2 + 4\lambda_2 h_1^2 h_2,$$

$$Q_2(r) = -\lambda_2(5\lambda_1\lambda_2 r h_1 + 5\lambda_1 h_1 h_2 + 3\lambda_1 h_2^2 + 2\lambda_2 h_1^2).$$

Подставляя в (3.1) указанное выражение для $v_2(R,t)$, а также (1.8) и (3.2), вновь придем относительного контактного давления q к уравнению (1.9). В последнем теперь

$$\gamma_1(q)=\frac{h_2}{G_2\delta_2}+\frac{(1-\nu_1)R^2}{2G_1h_1}(1+\frac{h_1}{2R}+\frac{h_1^2}{4R^2})+\frac{R}{2G_1}+g(q),$$

$$\gamma_2(t)=\frac{1}{2\Delta}k\beta_2h_2^2(\lambda_1r+2h_1)+(1-\nu_1)k\beta_1R[\frac{1}{2\Delta}P_1(r)+\frac{h_1}{6\Delta^2R}P_2(r)] \quad (3.3)$$

$$\varsigma(q)=\frac{1}{\Delta}\beta_2\lambda_1h_2^2+(1-\nu_1)\beta_1R[\frac{1}{\Delta}Q_1(r)+\frac{h_1}{3\Delta^2R}Q_2(r)].$$

Вопрос об условии термосиловой устойчивости здесь решается также, как описано в п.1, но ограничения на значения величин V и T_0 оказываются более жесткими.

Литература

1. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения. Трение и износ, 1992, т.13, №1.

2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970.

3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел. ДАН СССР, 1983, т.271, №4.

4. Александров В.М. Контактные задачи в трибологии. В кн.: «Механика и научно-технический прогресс». Т.3, Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988.

5. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids/ Proc. Roy. Soc., 1969, A.312.