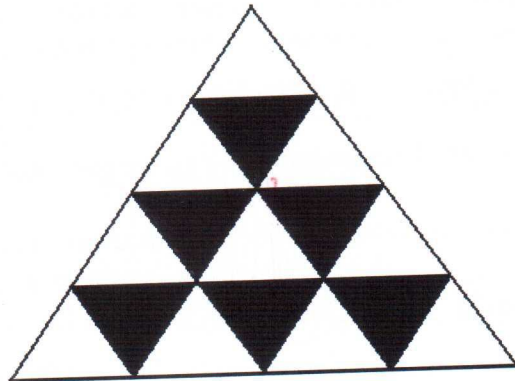


National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
Institute of Mechanics of NAS of Ukraine  
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine  
Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine  
Kiev National Economic University named after V. Hetman



**XIX International Conference**

**DYNAMICAL SYSTEM MODELLING  
AND STABILITY INVESTIGATION**



**MODELLING  
&  
STABILITY**

**PROCEEDINGS OF CONFERENCE REPORTS**  
Kyiv, Ukraine

May 22-24, 2019

Лещенко Дмитрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор,  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина,  
e-mail: leshchenko\_d@ukr.net;

Акуленко Леонид Денисович, доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник,  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,  
e-mail: gavrikov@ipmnet.ru;

Палий Екатерина Сергеевна, ассистент,  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина,  
e-mail: eschernyakova@gmail.com

## ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СФЕРИЧЕСКОМУ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Лещенко Д.Д., Акуленко Л.Д., Палий Е.С.

**Ключевые слова:** сфероид, полость, вязкая жидкость, твердое тело, усреднение.

**AMS Subject Classification:** 70E15, 70E05, 70F15, 34C29, 76A02

Рассматривается движение относительно центра масс сфероида с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Момент сил, действующих на тело со стороны вязкой жидкости в полости, определен по методике, развитой в работах [1, 2].

Рассмотрим свободное движение в пространстве твердого тела с вязкой жидкостью относительно центра инерции. Тензор  $P$  задается в виде  $P_{ij} = P_0 \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $P_0 > 0$ . Данный вид тензор  $P$  имеет в случае сферической полости, для которой согласно [1, 2] значение  $P_0 = 8\pi b^7/525$ , где  $b$  – радиус полости. Через  $A, B, C$  обозначены главные центральные моменты инерции системы, через  $p, q, r$  – проекции абсолютной угловой скорости  $\omega$  на главные центральные оси инерции. Уравнения движения в проекциях на главные центральные оси инерции (точка – производная по времени) имеют вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \frac{\rho P_0}{\nu_{ABC}} p \left[ C(A - C)(A + C - B)r^2 + B(A - B)(A + B - C)q^2 \right] \quad (1)$$

Остальные уравнения получаются из (1) циклической перестановкой символов  $A, B, C$  и  $p, q, r$ .

Рассмотрен случай, когда главные центральные моменты инерции твердого тела близки друг к другу и представлены в виде:

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр.

При  $\varepsilon = 0$  уравнения (1) описывают движение сферически симметричного тела.

Также предполагается, что:

$$|A - B| = O(\varepsilon^2 J_0) \quad (3)$$

После формальных преобразований системы (1) с учетом соотношений (2), (3) получена возмущенная система типа Эйлера вида:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_p(p, q, r), \quad p(0) = p_0 \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{A'}{J_0} \left( -1 + \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) rp + \varepsilon f_q(p, q, r), \quad q(0) = q_0 \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{J_0} (A' - B') qp + \varepsilon f_r(p, q, r), \quad r(0) = r_0 \end{aligned} \quad (4)$$



Здесь  $r$  – медленная переменная. Система дифференциальных уравнений (4) – существенно нелинейная система, в которой частота зависит от медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ . В (4) введены возмущения:

$$\varepsilon f_p(p, q, r) = \frac{\rho P_0 p}{\nu J_0^3} \{ A' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] r^2 + \varepsilon J_0 (A' - B') q^2 \}$$

$$\varepsilon f_q(p, q, r) = \frac{\rho P_0 q}{\nu J_0^3} \{ B' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] r^2 - \varepsilon J_0 (A' - B') p^2 \}$$

$$\varepsilon f_r(p, q, r) = \frac{\rho P_0 r}{\nu J_0^3} \{ B'(\varepsilon A' - J_0) q^2 + A'(\varepsilon B' - J_0) p^2 \}$$

Решение невозмущенной системы (4) при  $\varepsilon = 0$ ,  $1/\nu = 0$  имеет вид:

$$p = a \sin(\omega\tau + \varphi), \quad q = a \sqrt{\frac{A'}{B'}} \cos(\omega\tau + \varphi) \quad (5)$$

Здесь  $a = \sqrt{p_0^2 + \left(\frac{\dot{p}_0}{\omega}\right)^2}$  – амплитуда (медленная переменная),  $\varphi$  – фаза,  $\omega = \frac{r_0}{J_0} \sqrt{A'B'}$ ,  $A'B' > 0$  по предположению.

Проведен переход от медленных переменных  $(p, q, r)$  к новым медленным переменным  $(a, \varphi, r)$  путем замены переменных:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a \omega \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r \quad (6)$$

После ряда преобразований и усреднения полученной системы по фазе  $\varphi$  находим систему для медленных переменных  $x, y$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\eta x(\alpha x + \beta y), \\ \dot{y} &= \eta \gamma x y \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $x = a^2$ ,  $y = r^2$ ,  $\eta = \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3}$ , а также:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{8B' J_0} (A' - B')^2 \\ \beta &= \frac{1}{2} J_0 (A' + B') - \varepsilon (A'^2 + A'B' + B'^2) \\ \gamma &= \frac{1}{2} \varepsilon (A'^2 + A'B') - J_0 A' \end{aligned}$$

Отметим, что в системе (7)  $x, y$  – медленные переменные. Разделим первое уравнение системы (7) на второе; получим скалярное уравнение, допускающее элементарное аналитическое интегрирование:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\alpha x}{\gamma y} + \frac{2\beta}{\gamma}$$

Для этого обозначим:  $z = \frac{x}{y}$ . Имеем параметры  $\tilde{\alpha} = 2\alpha/\gamma$ ,  $\tilde{\beta} = 2\beta/\gamma$  и выражение для производной  $z' = dz/dy$ .

Получим линейное уравнение для переменной  $x$ :  $\frac{dx}{dy} = yz' + z$ , в котором:

$$yz' = y \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\theta}$$

Здесь введен аргумент  $\theta = \ln y$ .

С учетом введенных ранее обозначений имеет место выражение:

$$yz' + z = \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}$$

В результате преобразований получим линейное неоднородное уравнение элементарного вида:

$$\frac{dz}{d\theta} = (\tilde{\alpha} - 1)z + \tilde{\beta} \quad (8)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$z = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 e^{(\tilde{\alpha} - 1)\theta}, \quad C_1 = \text{const} \quad (9)$$

Раньше было получено уравнение вида:  $\frac{dx}{dy} = \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}$ , после интегрирования которого, находим первый интеграл:

$$x = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} y + C_1 y^{\tilde{\alpha}}, \quad C_1 = \text{const} \quad (10)$$

После ряда преобразований получено уравнение, допускающее разделение переменных  $y, \tau$  и интегрирование в квадратурах:

$$\dot{y} = \eta \gamma y^2 \left( \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 y^{\tilde{\alpha} - 1} \right)$$

В силу выбранных значений параметров у системы (7) в первом случае коэффициенты имеют вид:  $\eta = 0.0224$ ,  $\alpha = 0.375$ ,  $\beta = -25$ ,  $\gamma = -30$ , и начальные условия:  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ .

Во втором расчетном случае рассматриваются те же начальные условия и коэффициенты:  $\eta = 0.6048$ ,  $\alpha = 0.00625$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = -2.5$ .

Численный анализ, проведенный на интервале  $[0; 10]$ , показывает, что в обоих случаях  $y(t) = r^2$  убывает: в первом – асимптотически приближаясь к стационарному значению 0.397, а во втором – к нулю. Функция  $x(t) = a^2$  в первом случае убывает, асимптотически приближаясь к нулю. Во втором – возрастает, достигая значения 1.6 на интервале  $[0; 10]$ .

Таким образом, исследовано движение близкого к динамически сферическому твердого тела (сфероида) с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса.

Получена уточненная в квадратическом приближении по малому параметру система уравнений движения в стандартной форме. Проанализирована задача Коши для системы, определенной после усреднения. Эволюция движения твердого тела на бесконечном интервале времени описывается решениями, полученными асимптотически, аналитически и численно.

Исследуемая в работе модель представляет определенный естественнонаучный интерес для динамики фигуры Земли [3].

1. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.

2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Cham: Springer, 2017. – 241 p.

3. Сидоренков Н.С. Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Наука; Физматлит, 2002. 384 с.