УДК 521.1

РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКОГО ДО ДИНАМІЧНО СФЕРИЧНОГО, З ПОРОЖНИНОЮ, ЗАПОВНЕНОЮ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Акуленко Л. Д.[1], Лещенко Д. Д.[2], Палій К. С.[2]
[1]*Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН*
[2]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: На супутник або космічний апарат у своєму русі відносно центра мас діють моменти сил різної фізичної природи. Ці рухи можуть бути зумовлені наявністю рідини в порожнинах в тілі (наприклад, рідке паливо або окислювач в резервуарах ракети). Тому виникає потреба в дослідженні задач динаміки тіл з порожнинами, що містять в'язку рідину, для проведення розрахунку руху космічних апаратів відносно центра мас, а також у питаннях їх орієнтації та стабілізації.

Проблеми динаміки тіл з порожнинами, що містять в'язку рідину, відносяться до класичних задач механіки. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, представляють значно більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини, та досліджені значно менше. Важливий внесок у розв'язок цих задач внесли роботи Ф. Л. Черноуська [1, 2]. Ці дослідження показали, що розв'язання задач динаміки тіла з однорідною в'язкою рідиною можна поділити на дві частини - гідродинамічну та динамічну - що може значно спростити початкову задачу.

Розглядається рух відносно центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла (сфероїда) з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса, який описується системою диференційних рівнянь з урахуванням в асимптотичному наближенні моментів сил в'язкої рідини в порожнині тіла. Визначення моментів сил, що діють на тіло зі сторони в'язкої рідини в порожнині, було запропоновано в роботах Ф. Л. Черноуська. Отримано систему рівнянь руху в стандартній формі, уточнену в квадратичному наближенні за малим параметром. Проаналізовано задачу Коші для системи, визначеної після усереднення. Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, отриманими в результаті асимптотичних, аналітичних і чисельних розрахунків на нескінченному інтервалі часу.

У нашій роботі ми досліджуємо модель, яка представляє певний природничо-науковий інтерес до динаміки фігури Землі.

Ключові слова: в'язка рідина, порожнина, тверде тіло, усереднення.

MOTION OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL RIGID BODY WITH A CAVITY FILLED WITH A VISCOUS FLUID

L. Akulenko[1], D. Leshchenko[2], E. Palii[2]
[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS*
[2]*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: A satellite or a spacecraft in its motion about the center of mass is affected by the moments of forces of various physical nature. These motions may have various causes, for example, the presence of fluid in the cavities in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in the tanks of a rocket). Therefore, there is a need to study the problems of the dynamics of bodies with cavities containing a viscous fluid, to calculate the motion of spacecrafts about the center of mass, as well as their orientation and stabilization.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-17-24

The problems of the dynamics of the bodies with the cavities containing a viscous fluid are among the classical problems of mechanics. The problems of the dynamics of a rigid body with cavities, containing a viscous fluid, are significantly more difficult than in the case of ideal fluid and much less investigated. An important contribution to the solution of these problems has been made by the works of F. L. Chernousko [1, 2]. These studies showed that solving the problems of dynamics of a body with a homogeneous viscous fluid can be subdivided into two parts – the hydrodynamic and dynamic ones – which can greatly simplify the initial problem.

We investigated the motion about its center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body (spheroid) with a cavity filled with a viscous fluid at small Reynolds numbers, which is described by the system of differential equations, considering the asymptotic approximation of the moments of the viscous fluid in the cavity. The determination of the motions of forces acting on the body from side of the viscous fluid in the cavity was proposed in the works of F. L. Chernousko. We obtained the system of equations of motion in the standard form which refined in square-approximation by small parameter. The Cauchy problem for a system determined after averaging was analyzed. The evolution of the motion of a rigid body is described by the solutions which obtained as a result of asymptotic, analytical and numerical calculations over an infinite time interval.

In our paper we are investigating the model which represents a certain natural-scientific interest for the dynamics of figure of the Earth.

Keywords: viscous fluid; cavity; rigid body; averaging.

1 ВСТУП

Супутник у своєму русі відносно центра мас зазнає впливу моментів сил, зумовлених рухом деяких мас всередині тіла. Ці рухи можуть бути пов'язані з наявністю рідини у порожнинах, розташованих в тілі.

Важливий внесок у розв'язок задач динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, внесли роботи Ф. Л. Черноуська зі співавторами [1, 2]. В них отримано асимптотичний розв'язок, який описує еволюцію руху тіла, з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, на великому інтервалі часу.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В роботі О. І. Кобріна [3] досліджено початкову ділянку обертання тіла з порожниною, що містить рідину великої в'язкості. Стаття [4] присвячена вивченню впливу в'язкої рідини в порожнині на обертання тіла навколо заданої осі. В роботі [5] за допомогою асимптотичного методу вивчається рух за інерцією твердого тіла з еліпсоїдальною порожниною, заповненою в'язкою рідиною. У статтях [6, 7, 9] та книзі [8] досліджуються швидкі обертання відносно центра мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією моментів сил гравітації, світлового тиску та опору середовища. В роботі [10] побудовано годограф вектора кінетичного моменту твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, та проведено чисель ний аналіз зміни цього вектора. У статті [11] представлені аналітичні та чисельні результати, отримані під час дослідження системи, що складається з твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В роботі [12] запропоновано підхід для моделювання динаміки твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. В [13] виведені та досліджені рівняння руху системи n зв'язаних твердих тіл з порожнинами, заповненими в'язкою рідиною.

Розглянемо рух твердого тіла з в'язкою рідиною відносно центра інерції. Тут $O_1y_1y_2y_3$ – система координат, що рухається поступально, з початком, зв'язаним з центром інерції системи. Тензор P задається у вигляді $P_{ij} = P_0\delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $P_0 > 0$. Такий вигляд тензор P має у випадку сферичної порожнини , для якої згідно [1, 2] $P_0 = 8\pi a^7/525$, де a – радіус порожнини. Позначимо головні центральні моменти інерції системи A, B, C; p, q, r – проекції кутової швидкості ω на головні центральні осі інерції. Рівняння руху запишемо в проекціях на головні центральні осі інерції (крапка – похідна за часом):

$$A\dot{p} + (C-B)qr = \frac{\rho P_0}{\nu ABC} p\left[C(A-C)(A+C-B)r^2 + B(A-B)(A+B-C)q^2\right]. \tag{1}$$

Інші рівняння одержуються з (1.1) циклічною перестановкою букв A, B, C и p, q, r.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли головні центральні моменти інерції твердого тіла близькі один до одного та можуть бути представлені у вигляді:

$$A = J_0 + \varepsilon A',\quad B = J_0 + \varepsilon B',\quad C = J_0, \tag{2}$$

де $0 < \varepsilon << 1$ – малий параметр.

Крім того, припустимо, що:

$$\left|A'-B'\right| = O(\varepsilon J_*),\ \left|A-B\right| = O(\varepsilon^2 J_*),\ J_* \sim J_0 . \tag{3}$$

Тоді, згідно (1.2), (1.3), маємо:

$$A-B=\varepsilon(A'-B')=\varepsilon^2 J_*,\ A-C=\varepsilon A',\ B-C=\varepsilon B' . \tag{4}$$

Після перетворень системи (1) з урахуванням (2)–(4) отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp}{d\tau}=\frac{B'}{J_0}\left(1-\varepsilon\frac{A'}{J_0}\right)qr+\varepsilon f_p(p,q,r),\ p(0)=p_0;\\
&\frac{dq}{d\tau}=\frac{A'}{J_0}\left(-1+\varepsilon\frac{B'}{J_0}\right)rp+\varepsilon f_q(p,q,r),\ q(0)=q_0;\\
&\frac{dr}{d\tau}=-\frac{\varepsilon}{J_0}\left(B'-A'\right)qp+\varepsilon f_r(p,q,r),\ r(0)=r_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут r – повільна змінна. Система рівнянь (5) – суттєво нелінійна система, причому в ній частота залежить від повільного часу $\tau=\varepsilon t$. В системі (5) позначено:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon f_p(p,q,r)=\frac{\rho P_0 p}{\nu J_0^3}\left\{A'\left[J_0-\varepsilon(A'+2B')\right]r^2+(A'-B')\left[J_0-\varepsilon(A'-B')\right]q^2\right\};\\
&\varepsilon f_q(p,q,r)=\frac{\rho P_0 q}{\nu J_0^3}\left\{(B'-A')\left[J_0-\varepsilon(B'-A')\right]p^2+B'\left[J_0-\varepsilon(2A'+B')\right]r^2\right\};\\
&\varepsilon f_r(p,q,r)=\frac{\rho P_0 r}{\nu J_0^3}\left\{B'\left[-J_0+\varepsilon(2A'-B')\right]q^2+A'\left[-J_0+\varepsilon(2B'-A')\right]p^2\right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв’язок незбуреної системи (5) при $\varepsilon=0{,}1/\nu=0$ записується наступним чином:

$$p=a\sin(\varphi),\ q=a\sqrt{\frac{A'}{B'}}\cos(\varphi). \tag{7}$$

Тут $a=\sqrt{p_0^2+(p_0/\omega)^2}$ – амплітуда, φ– фаза, $\omega=r_0/J_0\sqrt{A'B'}$.

Проведемо перехід від повільних змінних (p,q,r) до нових повільних змінних (a,φ,r) за допомогою заміни:

$$p=a\cos\varphi,\ q=\frac{J_0 a\omega\sin\varphi}{B'r},\ \ r=r. \tag{8}$$

Продиференціюємо вирази (8) з урахуванням незбуреності системи. Одержуємо систему у стандартній формі:

$$\dot a\cos\varphi-\dot a\sin\varphi=-\frac{ar\sqrt{A'B'}\sin\varphi}{J_0}+\varepsilon\frac{A'\sqrt{A'B'}}{J_0^2}ar\sin\varphi+\frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3}\times$$

$$\times\left\{a^2\frac{A'}{B'}(A'-B')\left[J_0-\varepsilon(A'-B')\right]\sin^2\varphi+r^2A'\left[J_0-\varepsilon(A'+2B')\right]\right\};$$

$$-\dot{a}\sin\varphi - a\left(\dot{\varphi} - \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0}r\right)\cos\varphi = \varepsilon\frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2}\sqrt{\frac{A'}{B'}}ar\cos\varphi - \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3}a\sin\varphi\left\{a^2\times\right.$$
$$\left.\times(B'-A')\left[J_0-\varepsilon(B'-A')\right]\cos^2\varphi + r^2B'\left[J_0-\varepsilon(2A'+B')\right]\right\}; \tag{9}$$
$$\dot{r} = -\frac{A'-B'}{J_0}\sqrt{\frac{A'}{B'}}a^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3}A'a^2r\left\{\varepsilon(2A'-B')\sin^2\varphi + \right.$$
$$\left.+\varepsilon(2B'-A')\cos^2\varphi - J_0\right\}.$$

Розв’яжемо рівняння (9) відносно $\dot{a}$ та $\dot{\varphi}$. Підставимо вирази (8) у третє рівняння системи (5) для r. Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\dot{a} = \varepsilon\frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2}ra\sin\varphi\cos\varphi(A'-B') + \frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3}\left\{a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\frac{(A'-B')^2}{B'}\left[J_0-\varepsilon(A'+B')\right]+\right.$$
$$\left.+r^2\left[A'(J_0-\varepsilon A')\cos^2\varphi - 2\varepsilon A'B' + B'(J_0-\varepsilon B')\sin^2\varphi\right]\right\};$$
$$\dot{\varphi} = \omega(r) - \varepsilon\frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2}r(A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi) + \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3}\cos\varphi\sin\varphi\left\{r^2[-J_0(A'+B')+\right.$$
$$\left.+2\varepsilon(A'^2-B'^2)\right] - \varepsilon J_0(A'-B')a^2\left(\frac{A'}{B'}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\Bigg\} \tag{10}$$
$$\dot{r} = (B'-A')\sqrt{\frac{A'}{B'}}\frac{a^2}{J_0^2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\rho P_0 A'}{\nu J_0^3}ra^2\left\{\varepsilon(2A'-B')\sin^2\varphi + \varepsilon(2B'-A')\cos^2\varphi - J_0\right\}.$$

Тут $\omega(r) = \sqrt{A'B'}r/J_0$.

Після усереднення системи (10) по фазі φ знаходимо:

$$\dot{a} = \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3}a(\alpha a^2 + \beta r^2), \quad \dot{r} = \frac{\rho P_0}{2\nu J_0^3}ra^2\gamma, \tag{11}$$

де

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{8B'}(A'-B')^2\left[J_0-\varepsilon(A'+B')\right], \ \beta = \frac{1}{2}A'(J_0-\varepsilon A') - 2\varepsilon A'B' + \frac{1}{2}B'(J_0-\varepsilon B'),$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon(A'^2 + A'B') - J_0A'.$$

Систему (11) запишемо у вигляді:

$$\dot{x} = 2\eta\, x(\alpha x + \beta y), \ \dot{y} = \eta\gamma xy, \tag{12}$$

де $x = a^2$, $y = r^2$, $\eta = 2\rho P_0/\nu J_0^3$. Системою рівнянь (12) зручно скористатись для проведення чисельних розрахунків дослідження.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У ситемі рівнянь (12) x, y – повільні змінні. Поділивши ліву та праву частини першого рівняння системи (12) на відповідні частини другого, одержуємо:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\alpha}{\gamma}\frac{x}{y} + \frac{2\beta}{\gamma}. \tag{13}$$

Позначимо $z = x/y,\ \tilde{\alpha} = 2\alpha/y,\ \tilde{\beta} = 2\beta/y,\ z' = dz/dy$. Оскільки $x = yz$, то

$$\frac{dx}{dy} = yz' + z, \tag{14}$$

де $yz' = ydz/dy = dz/d\theta,\ \theta = \ln y$.

З урахуванням вище введених позначень $yz' = -z + \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}$. В підсумку отримаємо лінійне неоднорідне рівняння вигляду:

$$\frac{dz}{d\theta} = (\tilde{\alpha} - 1)z + \tilde{\beta}. \tag{15}$$

Його розв'язок записується наступним чином:

$$z = \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\alpha}} + C_1 e^{(\tilde{\alpha}-1)\theta}\ . \tag{16}$$

Після інтегрування одержуємо:

$$x = \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\alpha}} y + C_1 y^{\tilde{\alpha}}. \tag{17}$$

Підставимо вираз (17) у друге рівняння системи (12) та знаходимо:

$$\dot{y} = \eta\gamma y^2\left(\frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\alpha}} + C_1 y^{\tilde{\alpha}-1}\right).$$

Останнє рівняння допускає розділення змінних $y,\ \tau$ та інтегрування в квадратурах.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Система (12) з врахуванням обраних значень вхідних параметрів має наступні коефіцієнти: $\eta = 0,0045,\ \alpha = 0,38,\ \beta = -55,\ \gamma = -1,5$ та задані початкові умови: $x(0) = 1,\ y(0) = 1$.

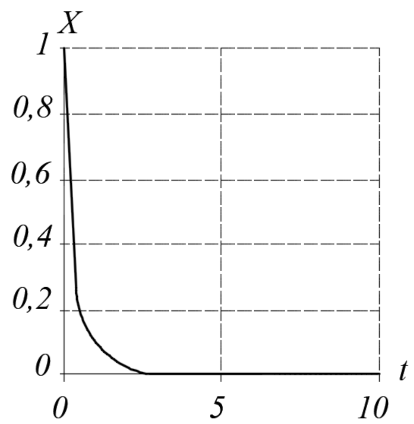

Рис. 1. Графік змінення квадрату амплітуди

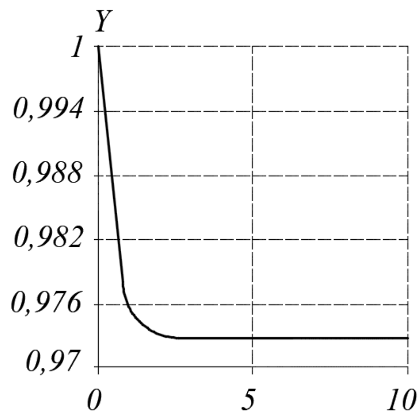

Рис. 2. Змінення квадрату осьової складової проекції вектора кутової швидкості

Отримано, що графіки функцій $x = a^2$ та $y = r^2$ спадають (рис. 1, рис. 2), асимптотично наближуючись до нуля та стаціонарного значення 0,97 відповідно.

7 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження руху близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, цілком заповненою в’язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса отримано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після аналізу системи, що визначена за допомогою метода усереднення, знайдено чисельний розв’язок задачі Коші. Еволюція руху твердого тіла на нескінченному інтервалі часу описується розв’язками, отриманими аналітично, асимптотично та чисельно, які можуть бути використані при дослідженні орієнтації та стабілізації руху космічного апарату відносно центра мас.

Література

1. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid / F. L. Chernousko. – Washington.: NASA, 1972. – 204 c.
2. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. – Springer, 2017. – 260 p. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
3. Kobrin A. I. On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field / A. I. Kobrin // J. Appl. Math. Mech. – 1969. – 33 (3). – 418–427.
4. Smirnova E. P. Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with fluid / E. P. Smirnova // J. Appl. Math. Mech. – 1974. – 38 (6). – P. 931–935.
5. Baranova E. U. Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid / E. U. Baranova, V. G. Vil’ke // Moscow University Mechanics Bulletin. – 2013. – 68 (1). – P. 15–20. doi:10.3103/s0027133013010032
6. Акуленко Л. Д. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – 37. – С. 126–139.
7. Akulenko L. D. Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces / L. D. Akulenko, Y. S. Zinkevich, D. D. Leshchenko, A. L. Rachinskaya // Cosmic Research. – 2011. – 49(5). – P. 440–451. doi: 10.1134/s0010952511050017
8. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. – Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова. - О.: ОНУ, 2013. – 287 с.
9. Leshchenko D. Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque / D. Leshchenko, L. Akulenko, A. Rachinskaya, Yu. Shchetinina // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2015. – 6 (3). – P. 383–391.
10. Rachinskaya A. L. Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid / A. L. Rachinskaya // Cosmic Research. – 2015. – 53(6). – P. 476–480. doi.org/10.1134/s00109525150600052
11. Disser K. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid / K. Disser, G. R. Galdi, G. Mazzone, P. Zunino // Arch. Rational Mech. – 2016. – 221. – P. 487–526. doi 10.1007/s00205-016-0966-2
12. Ramodanov S. M. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid / S. M. Ramodanov, V. V. Sidorenko // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2017. – 95. – P. 42–46. doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2017.05.006
13. Кононов Ю. Н. О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 2000. – №30. – С. 207–216.

References

1. Chernousko, F. L. (1972). The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Washington: NASA, 204.
2. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260. doi 10.1007/978-3-319-53928-7

3. Kobrin, A. I. (1969). On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field. J.Appl. Math. Mech., 33 (3), 418–427.
4. Smirnova, E. P. (1974). Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with fluid. J.Appl. Math. Mech., 38 (6), 931–935.
5. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. (2013). Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. Moscow University Mechanics Bulletin, 68(1), 15–20. doi:10.3103/s0027133013010032
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Evolution of rotations of a satellite with cavity filled with viscous fluid. Mekh. Tverd. Tela, 37, 126–139.
7. Akulenko, L. D., Zinkevich, Y. S., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2011). Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. Cosmic Research, 49 (5), 440–451, doi: 10.1134/s0010952511050017
8. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Y. S. (2013). Perturbed and Controlled Rotations of a Rigid Body. O.: Mechnikov Odessa National University, 287.
9. Leshchenko, D., Akulenko, L., Rachinskaya, A., Shchetinina, Yu. (2015). Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque. Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, 6 (3), 383–391.
10. Rachinskaya, A. L. (2015). Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. Cosmic Research, 53(6), 476–480. doi.org/10.1134/s00109525150600052
11. Disser, K., Galdi, G. R., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. Arch. Rational Mech. Anal., 221, 487–526. doi 10.1007/s00205-016-0966-2
12. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. International Journal of Non-Linear Mechanics, 95, 42–46, doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2017.05.006
13. Kononov, Y. N. (2000). On the motion of a system of connected rigid bodies with cavities containing fluid. Mekh. Tverd. Tela, 30, 207–216.

Акуленко Леонід Денисович
Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
l.akulenko@bk.ru,
ORCID: 0000-0003-3209-1472
Лещенко Дмитро Давидович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Палій Катерина Сергіївна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
ESChernyakova@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-5553-2405

Для посилань:
Акуленко Л. Д. Рух твердого тіла, близького до динамічно сферичному, з порожниною, заповненою в'язкою рідиною / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Е. С. Палий // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 17-24.

For references:
Akulenko, L., Leshchenko, D., Palii, E. (2019). Motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 17-24.