УДК 514.765.1+512.813.4

МОДЕЛІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ТЕНЗОР ВЕЙЛЯ

Кіосак В. А.[1], Лесечко О. В.[1]
[1] *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: При моделюванні фізичних чи інших об’єктів одним з основних методів є відображення, тобто встановлення взаємно однозначної відповідності між точками многовидів в деякій спільній по відображенню системі координат.

Природним є прагнення збереження в моделі певних, важливих для даного дослідження, властивостей. З іншого боку, модель повинна мати "технологічні" переваги, бути більш зручною для дослідження. При цьому важливим є збереження деяких властивостей чи об’єктів прообразу в образі.

Одним з об’єктів, інваріантних відносно вибору системи координат, що характеризують простір афінної зв’язності, є його тензор проективної кривини Вейля. У роботі знайдені умови, достатні для того, щоб при відображенні простору афінної зв’язності A_n на простір афінної зв’язності $\bar{A}_n$ зберігався тензор Вейля. Ці умови є ознакою того, що при відображенні зберігаються всі компоненти тензора Вейля, хоча накладені вони на деякі компоненти інших тензорів.

Тензор проективної кривини Вейля за необхідністю зберігається при геодезичних відображеннях, відповідностях при яких образ та прообраз мають спільні геодезичні лінії. Але умова збереження тензора проективної кривини Вейля не є достатньою для того, щоб при відображенні зберігались геодезичні лінії. Тобто, збереження тензора проективної кривини Вейля більш широке поняття ніж геодезичні відображення.

З другого боку, при моделюванні динамічної системи за допомогою псевдоріманових просторів в них повинні виконуватися умови Леві-Чевіти. При відсутності зовнішніх сил це відображення буде геодезичним відображенням. В роботі наведені умови, при виконанні яких при присутності зовнішніх сил тензор проективної кривини Вейля зберігається. Знайдені вимоги, які накладають на деякі компоненти тензора кривини, для того, щоб у образа і прообраза співпадали всі компоненти тензора Вейля.

Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій, методами тензорного аналізу, без обмежень на знак метрики, для просторів, розмірність яких більше двох.

Отримані результати можуть бути застосовані при моделюванні динамічних систем за умови присутності зовнішніх сил

Ключові слова: відображення, динамічна модель, механічна система, тензор Вейля, тензор Рімана.

MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS PRESERVING THE WEYL TENSOR

V. Kiosak[1], O. Lesechko[1]
[1]*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Modeling physical or other objects, one of the main methods is the reflection, it is maching reciprocation between the points of manifolds in some common system of coordinates.

It is natural to retain certain, important for this research properties in the model. On the other hand, the model should have "technological" advantages, be more convenient for the research. At the same time, it is important to retain some properties or objects of the prototype.

Models are complete when there are all the objects of this type, or they are incomplete ones when the conditions are imposed on some of them.

One of the objects, invariant over the choice of coordinate system, characterizing the space of affine connectedness, is its tensor of Weil projective curvature. In the paper, the conditions are found out which are sufficient to hold down Weil tensor under the reflection of affinely connected space A_n in affinely connected space $\bar{A}_n$. These conditions are the criteria in order to be sure that a certain mapping preserves every component of Weyl tensor, even if they are posed on certain components of other tensors

The tensor of Weil projective curvature is necessarily held out under the geodesic mapping, the compossibilities where the object and the prototype have common geodesic lines. But preserving condition of the tensor of Weil projective curvature is not sufficient for the geodetic lines to be retained during the mapping. So preserving of the tensor of Weil projective curvature is wider concept than geodesic mappings.

On the other hand, when modeling a dynamical system using pseudo-Riemannian spaces, Levi-Civita conditions must be fulfilled in them. In the absence of external forces, this reflection will be a geodesic mapping. In the article, the conditions are given in which, in the presence of external forces, the tensor of Weil projective curvature is retained. The requirements, that impose on some components of the tensor of the curvature, are found in order to coincide all the components of the Weil tensor in the object and the prototype.

The research is conducted locally, in the class there are enough differentiable functions, by the methods of tensor analysis, without restrictions on the metric sign, for the spaces which dimensions are more than two.

The obtained results can be applied in the simulation of dynamic systems on condition that the external forces are present

Keywords: dynamic model; mappings; mechanic system; Riemannian tensor; Weyl tensor.

1. ВСТУП

При моделюванні фізичних чи інших об’єктів одним з основних методів є відображення, тобто встановлення взаємно однозначної відповідності між точками многовидів в деякій спільній по відображенню системі координат.

Природним є прагнення збереження в моделі певних, важливих для даного дослідження, властивостей. З іншого боку, модель повинна мати «технологічні» переваги, бути більш зручною для дослідження. При цьому важливим є збереження повних властивостей чи об’єктів прообраза в образі.

Моделі бувають повними, коли зберігаються всі об’єкти даного типу, чи неповними – коли умови накладаються на деякі з них. Існують і такі, в яких обмеження частини об’єктів веде до певних властивостей всіх об’єктів іншого типу.

Одним з тензорних об’єктів, що характеризують простір афінної зв’язності є тензор Вейля проективної кривини.

В роботі знайдені умови, які накладають на деякі компоненти тензора кривини, для того, щоб у образа і прообраза співпадали всі компоненти тензора Вейля.

Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій, методами тензорного аналізу, без обмежень на знак метрики, для просторів, розмірність яких більше двох.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Побудова класичної теорії відображень бере свій початок в середині XIX сторіччя в працях італійського геометра Є. Бельтрамі, який розглянув відображення поверхонь на площину такі, що геодезичні лінії переходять в прямі. З розвитком тензорного аналізу та його застосуванням в диференціальній геометрії були отримані базові фундаментальні результати в роботах Т. Леві-Чевіти, Г. Вейля, Т. Томаса[1-3].

В теорії відображень працювала велика кількість вчених, як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати як геодезичні лінії афіннозв’язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, при якому зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких – це вектор узагальнених зовнішніх сил [4].

З часом відбулась спеціалізація відображень та були сформовані три основні напрямки:

1) вивчення основних закономірностей відображень;

2) для заданого узагальненого простору та спеціального відображення пошук відповіді на питання: дозволяє чи не дозволяє він відображення;

3) для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов’язує.

Тензор, що не змінюється при відображенні, називають інваріантним відносно даного відображення. Інваріантом геодезичних відображень є тензор проективної кривини Вейля. Геодезичні відображення – це відображення із збереженям геодезичних ліній. Інваріантність тензора Вейля – це необхідна умова при геодезичних відображеннях. Існують приклади псевдориманових просторів, у яких співпадають тензори Вейля, але вони не допускають один на одного геодезичних відображень.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є знаходження умов, яким повинні задовольняти внутрішні об’єкти просторів для того, щоб при їх відображенні зберігався тензор Вейля. Отримані результати застосувати до інтерпретації рівнянь Леві-Чевіти, що характеризують динамічну систему, а саме, знайти достатні умови, яким повинен задовольняти вектор зовнішніх сил, щоб при відображенні зберігався тензор Вейля.

4 ПРО МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай A деяка механічна система з n ступенями свободи. Тоді, як відомо [4], кінетичну енергію системи в узагальнених координатах $q^1, q^2, ..., q^n$ записують таким чином

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q^1, q^2, ..., q^n) \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} .$$

Тут g_{ij} − метричний тензор псевдоріманового простору V_n; для однойменних індексів діє згода Ейнштейна про сумування.

Диференціальне рівняння руху системи має вид:

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} = X^i ,$$

де X^i− контраваріантні координати узагальненої сили X_i, $X^i = g^{\alpha i} X_i$, g^{ij} − елементи оберненої матриці до g_{ij}, Γ^h_{ij} − символи Христоффеля V_n.

Природно, моделювати цю систему за допомогою механічної системи $\bar{A}$ з тим же ступенем свободи n та з кінетичною енергією

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}$$

і рівнянням руху системи

$$\frac{d^2 q^i}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \bar{X}^i .$$

Для того, щоб виписані вище системи рівнянь визначали одні й ті ж траєкторії руху, але, взагалі то з різним розподілом параметрів t та τ вздовж цих траєкторій, для метрик та сил повинні виконуватись певні умови. Ці умови для просторів зі знаковизначеною метрикою були знайдені Т. Леві-Чевітою. Вони зберігаються і для псевдориманових просторів в виді:

для символів Хрістоффеля

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j A_n + \delta^i_k A_j + X^i C_{jk} , \tag{1}$$

тут δ^i_j − символи Кронекера, A_i − деякий вектор, C_{ij} −симетричний тензор;

для узагальненої сили

$$\bar{X}^i = \mu^2 X ,$$

де μ – функція від $q^1, q^2, ..., q^n$.

А також вздовж траєкторії системи повинна виконуватись рівність

$$\frac{d\ln f}{dt}+2\left(A_{\alpha}\frac{dg^{\alpha}}{dt}\right)=0\ ,$$

для функції f такої, що

$$f\left(q^{i},\frac{dq^{i}}{dt}\right)=\mu(q^{i})\left(1+C_{\alpha\beta}\frac{dq^{\alpha}}{dt}\frac{dq^{\beta}}{dt}\right)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Зауважимо, що f має механічний зміст: $f=\dfrac{dt}{d\tau}$.

Для подальшого розгляду перейдемо до вивчення відображень більш загальних просторів, а саме просторів афінної зв'язності.

5 ПОЛОВИННІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Простором афінної зв'язності A_n розмірності n називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки абсолютний диференціал вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^{h}(x)=\Gamma_{ji}^{h}(x)\,.$$

Простір A_n належить класу C^r $(A_n\in C^r)$, якщо $\Gamma_{ij}^{h}(x)\in C^r$.

Розглянемо два простори афінної зв'язності. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називається відображенням. Тоді в спільній за відображенням системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{h}(x)-\Gamma_{ij}^{h}(x)=P_{ij}^{h}(x)\,,$$

де Γ_{ij}^{h}, $\bar{\Gamma}_{ij}^{h}$ – об'єкти афінної зв'язності просторів A_n і $\bar{A}_n$ відповідно. Далі об'єкти $\bar{A}_n$ будемо позначати рискою.

Об'єкт $\overset{\lambda}{\Gamma}{}_{ij}^{h}$, побудований за правилом

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}_{ij}^{h}=\Gamma_{ij}^{h}(x)+\frac{\lambda}{\lambda+1}P_{ij}^{h}(x),$$
$$\lambda=const>0\,, \tag{2}$$

задає зв'язність деякого простору афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$ [1-2].

Відображення простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$ називають укороченим відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат має місце рівняння (2).

Якщо $\lambda=1$, то таке відображення називається укороченим навпіл або половинним, а сама зв'язність – середньою.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34

Якщо простори A_n та $\bar{A}_n$ дозволяють відображення, що відповідає тензору деформації P_{ij}^h, тоді існує половинне відображення, для якого тензори Рімана, Річчі та Вейля задовольняють умовам

$$\bar{R}_{.ijk}^h = R_{.ijk}^h + \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^h,$$
$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \overset{c}{\nabla}_j P_{\alpha i}^\alpha,$$
$$\bar{W}_{ijk}^h = W_{ijk}^h + \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^h - \frac{1}{n-1}\left(\delta_k^h\left(\overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \overset{c}{\nabla}_j P_{\alpha i}^\alpha\right) - \delta_j^h\left(\overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ki}^\alpha - \overset{c}{\nabla}_k P_{\alpha i}^\alpha\right)\right).$$

Тут $\overset{c}{\nabla}$ − знак коваріантної похідної по середній зв’язності.

Тензор Вейля W_{ijk}^h визначається як

$$W_{ijk}^h \overset{def}{=} R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1}(\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}).$$

Зауважимо, що зазначені умови носять лише необхідний характер.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів $\bar{A}_n$ та A_n, пов’язаних відображенням через P_{ijk}^h, тобто P_{ijk}^h − деформація тензорів Рімана при відображенні

$$\bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h \overset{def}{=} P_{ijk}^h. \tag{3}$$

Зауважимо, що тензор P_{ijk}^h задовольняє умовам

$$P_{ijk}^h + P_{ikj}^h = 0, \tag{4}$$

та

$$P_{ijk}^h + P_{jki}^h + P_{kij}^h = 0. \tag{5}$$

Доведено наступні теореми.

Теорема 1. Якщо в довільній системі координат тензор P_{ijk}^h такий, що $P_{223}^1 = 0$ (або $P_{234}^1 = 0$ для $n > 3$), то цей тензор записується таким чином

$$P_{ijk}^h = \delta_i^h(P_{jk} - P_{kj}) + \delta_j^h P_{ik} - \delta_k^h P_{ij}, \tag{6}$$

де P_{ij} − деякий тензор.

Зауважимо, оскільки при доведенні теореми використовувалися лише алгебраїчні властивості P_{ijk}^h, то тому вона справедлива для довільного тензору, який задовольняє умовам (5).

Теорема 2. Якщо в довільній системі координат тензор P_{ijk}^h такий, що $P_{223}^1 = 0$ (або $P_{234}^1 = 0$ для $n > 3$), то при цьому відображенні зберігається тензор проективної кривини Вейля.

Останні теореми дозволяють сформулювати наступний наслідок.

Наслідок 1. Якщо у просторів афінної зв’язності співпадають значення компонент тензорів Рімана R_{223}^1 (або R_{234}^1 для $n > 3$) та $\bar{R}_{223}^1$ (або $\bar{R}_{234}^1$), то при відображенні їх один на одного зберігається тензор проективної кривини Вейля.

Повернемось до розгляду рівнянь (1). Для них

$$P^i_{jk} = \delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j + X^i C_{jk} .$$

Коваріантна похідна по середній зв'язності буде

$$\overset{c}{\nabla}_h P^i_{jk} = \delta^i_j \overset{c}{\nabla}_h A_k + \delta^i_k \overset{c}{\nabla}_h A_j + X^i \overset{c}{\nabla}_h C_{jk} + C_{jk} \overset{c}{\nabla}_h X^i .$$

Тоді

$$P^i_{jkh} = \overset{c}{\nabla}_h P^i_{jk} - \overset{c}{\nabla}_k P^i_{jh} = \delta^i_j \left(\overset{c}{\nabla}_h A_k - \overset{c}{\nabla}_k A_h \right) + \delta^i_k \overset{c}{\nabla}_h A_j - \delta^i_h \overset{c}{\nabla}_k A_j +$$

$$+ X^i \left(\overset{c}{\nabla}_h C_{jk} - \overset{c}{\nabla}_k C_{jh} \right) + C_{jk} \overset{c}{\nabla}_h X^i - C_{jh} \overset{c}{\nabla}_k X^i .$$

Умова $P^1_{234} = 0$ приймає вид:

$$X^1 \left(\overset{c}{\nabla}_4 C_{23} - \overset{c}{\nabla}_3 C_{24} \right) + C_{23} \overset{c}{\nabla}_4 X^1 - C_{24} \overset{c}{\nabla}_3 X^1 = 0 \; . \tag{7}$$

Остання умова дозволяє сформулювати ще один наслідок.

Наслідок 2. Якщо тензор C_{ij} та вектор X^i із рівнянь (1) задовольняють умовам (7), то при відображенні псевдоріманових просторів V_n та $\bar{V}_n$ тензор Вейля є інваріантним.

Продемонструємо за допомогою прикладу, як застосувати отримані результати.

Відомо, що проєктивно симетричні (або відповідно проєктивно рекурентні) псевдоріманові простори V_n $(n > 2)$ є симетричними (або рекурентними).

За допомогою прикладу показано, що це не поширюється на простори афінної зв'язності [5].

Як контрприклад побудовано простір афінної зв'язності A_n, зв'язність Γ^h_{ij} якого в деякій системі координат $x^1, x^2, \ldots x^n$ визначається так: $\Gamma^h_{ij} = \phi^h \delta^1_i \delta^1_j$,

де $\phi^h = a x^h + b D^{h\alpha}_{\alpha} - x^1 (a+b) \delta^h_1$; $(D^h_i \neq \delta^h_i)$ − деякі сталі, причому $D^1_i = \delta^1_i, a, b$ − функції від x^i.

Вказане A_n не буде проективно пласким якщо $b \neq 0$. У випадку, коли $b \neq const,\ a \neq kb(k - const)$, простір A_n буде проективно рекурентним, відмінним від рекурентного. Якщо $b \neq const,\ a \neq const$, то A_n буде проективно симетричним, відмінним від симетричного.

Нехай середня зв'язність має аналогічну будову, тобто $\overset{c}{\Gamma}{}^h_{ij} = \phi^h \delta^1_i \delta^1_j$, тоді рівняння (7) приймуть вид:

$$X^1 (\partial_4 c_{23} - \partial_3 c_{24}) + c_{23} \partial_4 X^1 - c_{24} \partial_3 X^1 = 0 .$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язування диференціального рівняння в частинних похідних.

6 ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

6.1. Доведення теореми 1. При перетворенні системи координат

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34

$$x'^h = x'^h(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

компоненти тензора P^h_{ijk} перетворюються за законом

$$P'^h_{ijk} = P^\alpha_{\beta\gamma\delta} P^h_\alpha B^\beta_i B^\gamma_j B^\delta_k, \tag{8}$$

де $P^h_i \overset{def}{=} \partial_i x'^h$, $\quad \|B^h_i\| \overset{def}{=} \|P^h_i\|^{-1}$.

Переконаємось, що якщо $P^1_{223} = 0$ (або $P^1_{234} = 0$) в будь-якій системі координат, то відповідно

$$P^h_{iij} = 0 \tag{9}$$

та

$$P^h_{ijk} = 0 \tag{10}$$

в будь-якій системі координат для взаємно відмінних індексів *i, j, k, h*.

Розглянемо наступні перетворення координат

$$x'^p = x^p + r x^q; \quad x'^s = x^s; \quad p \neq s. \tag{11}$$

Тут p та q – взаємно відмінні індекси, r – довільна стала. Тоді P^h_i та B^h_i в рівняннях (8) записуються в виді:

$$P^h_i = B^h_i = \delta^h_i, \quad P^p_q = -B^p_q = r,$$

за умовою або $h \neq p$, або $i \neq q$. Обчислимо компоненти тензора P^h_{ijk} в новій системі координат, що визначається (11)

$$P'^h_{pqk} = P^h_{pqk} + r\, P^h_{qqk}. \tag{12}$$

Тоді

$$P'^h_{ppk} = P^h_{ppk} + r\,(P^h_{pqk} + P^h_{qpk}) + r^2 P^h_{qqk}, \tag{13}$$

для $P'^q_{pjk} = P^q_{pjk} + r\,(P^q_{qjk} - P^p_{pjk}) - r^2 P^p_{qqk}$, також

$$P'^q_{ipk} = P^q_{ipk} + r\,(P^q_{iqk} - P^p_{ipk}) - r^2 P^p_{iqk}, \tag{14}$$

і, наостанок,

$$P'^q_{ppk} = P^q_{ppk} - r\,(P^p_{ppk} - P^q_{qpk} - P^q_{qpk}) - r^3 P^p_{qqk} + r^2 (P^q_{qqk} - P^p_{pqk} - P^p_{qpk}). \tag{15}$$

В останніх формулах всі, різні за написом, індекси відмінні. За індексами *p* та *q* тут та в подальшому в цьому доведенні згоду Ейнштейна про сумування не застосовуємо. Враховуючи (12), переконаємось, що з (10) випливає (9).

Доведемо зворотне. Нехай виконуються рівняння (9), тобто $P^h_{iik} = 0$ в будь-якій системі координат при взаємно відмінних індексах h, i, k. Тоді з (13) отримаємо

$$P^h_{ijk} + P^h_{jik} = 0,$$

де i, j, k, h взаємно відмінні індекси.

Альтернуючи останнє за індексами k та j, враховуючи властивості (4) та (5) тензора P^h_{ijk}, отримаємо (10). Далі з (12) та (14) знайдемо

$$P^q_{qjk} = P^p_{pjk}, \quad P^q_{iqk} = P^p_{ipk},$$

де $p, q \neq k, j$. Із останнього випливає, що для всіх індексів $j, k, p (p \neq j, k)$

$$P^p_{pjk} = B_{jk}, \; P^p_{ipk} = P_{ik}. \tag{16}$$

Тут B_{jk}, P_{ik}, − деякі геометричні об'єкти. Враховуючи (10), (16), а також те, що r – стала, із (15) отримаємо

$$P^p_{ppk} = B_{pk} + P_{pk}, \tag{17}$$

для довільних індексів $p \neq k$.

Тепер переконаємося, що (9), (10), (16), (17) мають вид $P^h_{ijk} = \delta^h_i B_{jk} + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}$, де i, j, k, h − довільні індекси.

Циклюючи за індексами i, j, k, отримаємо $B_{jk} = P_{jk} - P_{kj}$.

Таким чином, умови (6) виконуються. Тепер зауважимо, що P_{jk} − є тензором типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Згортаючи (6), переконаємось в цьому.

Дійсно,

$$P_{kj} = (1/(n^2 - 1))(n P^\alpha_{jk\alpha} + P^\alpha_{kj\alpha}).$$

В останньому, права частина – тензорний вираз, а тому P_{kj} − теж тензор.

Таким чином, теорему доведено.

6.2. Доведення теореми 2. Нехай тензор P^h_{ijk} задовольняє умовам теореми 1. Тоді, враховуючи (3) та (6), можемо записати

$$\bar{P}^h_{ijk} = P^h_{ijk} + \delta^h_i (P_{jk} - P_{kj}) + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}.$$

Згортаючи, для тензорів Річчі A_n та $\bar{A}_n$, отримаємо $\bar{R}_{ij} = R_{ij} + P_{ji} - n P_{ij}$.

Для еквіафінних просторів переконаємось, що тензор P_{ij} симетричний, і останні формули перепишуться в виді:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij}; \; \bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-1) P_{ij}.$$

Враховуючи це, будемо мати

$$\bar{R}^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k \bar{R}_{ij} - \delta^h_j \bar{R}_{ik}) = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}).$$

Таким чином

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk},$$

де $\bar{W}^h_{ijk}, W^h_{ijk}$ − тензори проективної кривини Вейля A_n та $\bar{A}_n$ відповідно.

Очевидно, що аналогічні результати можна отримати і для нееквіафінних просторів, а також поширити їх на келерові простори та інші простори зі спеціальними структурами.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34

7 ВИСНОВКИ

Показано, як можна побудувати модель динамічної системи з відмінним від нуля вектором зовнішніх сил таку, що її тензор Вейля є інваріантним.

Достатня умова зведена до рівняння в коваріантних похідних по середній зв'язності простору афінної зв'язності.

Питання класифікації та ефективних тензорних ознак пар просторів з спільним тензором Вейля, що не допускають один на одного геодезичні відображення, залишається відкритим і актуальним.

Література

1. Kiosak V. Mappings of Spaces with Affine Connection / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko // 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Proceedings, Bratislava – 2018. – P. 563–569.
2. Norden A. P. Spaces of affine connection / A. P. Norden. – M.: Nauka, 1976. – 432 p.
3. Matveev V. S. Projectively Invariant Objects and the Index of the Group of Affine Transformations in the Group of Projective Transformations // Bulletin of the Iranian Mathematical Society – 2018. – 44 (2). – P. 341–375.
4. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств / А. С. Солодовников. // Успехи математических наук. – 1956. – №4. – С. 45–116.
5. Микеш Й. Проективно-симметрические и проективно-рекуррентные пространства аффинной связности / Й. Микеш // Тр. геом. сем. – 1981. – 13. – С. 61–62.

References

1. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018. Mappings of Spaces with Affine Connection, Bratislava, 563–569.
2. Norden, A. P. (1976). Spaces of affine connection. M.: Nauka, 432.
3. Matveev, V. S. (2018). Projectively Invariant Objects and the Index of the Group of Affine Transformations in the Group of Projective Transformations. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 44(2), 341–375.
4. Solodovnikov, A. S. (1956). Proektivnyie preobrazovaniya rimanovyih prostranstv. Uspehi matematicheskih nauk, XI, 4(70), 45–116.
5. Mikesh, I. (1981). Proektivno-simmetricheskie i proektivno-rekurrentnye prostranstva affinnoi svyaznosti. TR. Geom. Sem., 13, 61–62.

Кіосак Володимир Анатолійович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
kiosakv@ukr.net,
ORCID:0000-0002-7433-6709
Лесечко Олександр Васильович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
a.lesechko@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-2352-6174

Для посилань:
Кіосак В. А. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля / В. А. Кіосак, О. В. Лесечко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 25–34.

For references:
Kiosak, V., Lesechko, O. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 25–34.