УДК 624.012.454

К РАСЧЕТУ МАССИВНО-КОНТРФОРСНЫХ ПЛОТИН НА ОСЕВЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Слободянюк В.П. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Приведены результаты теоретических исследований поведения секции массивно-контрфорсной плотины при сейсмических воздействиях, направленных вдоль оси плотины.

Расчетной схемой отдельно стоящей секции массивно-контрфорсной плотины либо ее стенки является пластина переменной толщины сложной формы, на которой выполняются граничные условия двух видов. На участках Γ_r (не обязательно смежных) контура области Ω, которую занимает пластина, выполняются граничные условия "упругая заделка" с коэффициентом упругости K_r, а на остальных из общего количества q участках $\Gamma_{q\ r}$ выполняются граничные условия свободного края [1].

Для определения динамических характеристик секции плотины указанного типа с целью использования их в расчетах сейсмостойкости всего сооружения применялся вариационный метод Релея-Ритца. Координатные последовательности строились с помощью R – функций, введенных В.Л. Рвачевым [2]. Такой подход позволяет построить уравнения границ $\omega_1 = \omega_2 = 0$ и $\omega_2 = \omega_{q\ r} - \omega_q = 0$, описывающие участки всего контура Γ_r и $\Gamma_{q\ r}$, где выполняются вышеописанные условия. В настоящей работе использовалась следующая система R – функций:

$$\begin{gathered} \bar{f} = -f \\ f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \\ f_1 \vee_0 f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \end{gathered} \qquad (1)$$

Отрицание, конъюнкция и дизъюнкция соответственно. Кроме этого, будут использоваться дифференциальные операторы, зависящие от формы области: дифференцирование по нормали, $D_k^{(e)}$ касательной $T_k^{(e)}$ и смешанные $D_kT_m^{(e)}$. Индекс e показывает, к какой части контура области Ω относится данный оператор.

Уравнение, описывающее собственные колебания пластин переменной толщины, имеет вид:

$$\Delta(D\Delta W)-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)=-\frac{\gamma h}{g}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2)$$

где: D – цилиндрическая жесткость пластины.

$$D(x,y)=\frac{Eh^3(x,y)}{12\cdot(1-\nu)} \quad (3)$$

W – функция прогибов срединной поверхности,

E – модуль Юнга,

$h\ (x, y)$ – толщина пластины,

γ – объемный вес материала пластины,

g – ускорение силы тяжести,

ν – коэффициент Пуассона.

Условия на границе Γ_1, уравнение которой $\omega = 0$, могут быть записаны в виде:

$$W\big|_{\Gamma_1}=0, \qquad \left[\Delta W-\left(\frac{1-\nu}{\rho}-K_r\right)\frac{\partial W}{\partial n}\right]\Bigg|_{\Gamma_1}=0 \quad (4)$$

А на остальной части границы Γ_2 , уравнение которой $\omega_2 = 0$,

$$\left[\Delta W-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial n}\right)\right]\Bigg|_{\Gamma_2}=0 \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}\Delta W+(1-\nu)\left(\frac{\partial^3 W}{\partial n\partial \tau^2}-\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial n}\right)\right]\Bigg|_{\Gamma_2}=0 \quad (6)$$

где: Δ – оператор Лапласса,

n, τ – внутренняя нормаль и касательная к контуру,

ρ – радиус кривизны контура.

Из анализа построенных и проектируемых плотин указанного типа следует, что продольное сечение контрфорса представляет собой выпукло-вогнутый многоугольник с максимальным числом вершин, равным 16. Отсюда следует, что $\rho = \infty$ и граничные условия значительно упрощаются.

Представим общее решение уравнения (2) в виде функционального ряда:

$$W=\omega_1\Phi_0+\omega_1^2\omega_2^4\Phi_1+\omega_1^3\omega_2^2\Phi_2+\omega_1^3\omega_2^3\Phi_3 \quad (7)$$

Функции Φ_i (i = 1, 2, 3) определяются из граничных условий (4) – (6), если подставить в них выражение (7). Пуская несложные математические выкладки, запишем выражения для этих функций:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2\left(\omega_1^4 + \omega_2^4\right)}\left\{\Phi_0\left[D_2^{(1)}\omega_1 + T_2^{(1)}\omega_1 + K_r\right] + 2D_1^{(1)}\Phi_0\right\} = F_1\Phi_0 \qquad (8)$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2\left(\omega_1^3 + \omega_2^3\right)}\left\{D_2^{(2)}\left(\omega_1\Phi_0\right) + \nu T_2^{(2)}\left(\omega_1\Phi_0\right)\right\} = F_2\Phi_0 \qquad (9)$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{6\left(\omega_1^3 + \omega_2^3\right)}\left\{D_3^{(2)}\left(\omega_1\Phi_0\right) + (2-\nu)D_1T_2^{(2)}\left(\omega_1\Phi_0\right) + 6D_1^{(2)}\left(\omega_1^3\Phi_2\right) + \right.$$

$$\left. + \omega_1^3\Phi_2\left[3D_2^{(2)}\omega_2 + (2-\nu)T_2^{(2)}\omega_2\right]\right\} = F_3\Phi_0 \qquad (10)$$

где F_1, F_2, F_3 – дифференциальные операторы.

Теперь функцию (7) можно записать так:

$$W = \omega_1\Phi_0 + \omega_1^2\omega_2^4F_1\Phi_0 + \omega_1^3\omega_2^2F_2\Phi_0 + \omega_1^3\omega_2^3F_3\Phi_0 = R\Phi_0 \qquad (11)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям независимо от вида функции Φ_0, что используется для приближенного решения поставленной задачи. Представим функцию Φ_0 в виде ряда полиномов Чебышева:

$$\Phi_0^m(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}T_i(x)T_j(y) \qquad (12)$$

где: $T_i(x)$, $T_j(y)$ – полная система полиномов Чебышева,

a_{ij} – неизвестные коэффициенты, которые найдутся из условия минимума функционала Релея-Ритца на множестве функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Приближенные решения уравнения (1) имеют вид

$$W_m(x,y) = R\Phi_0^m(x,y) \qquad (13)$$

Если подставить это выражение в функционал Релея-Ритца и взять первую производную по коэффициентам a_{ij} (для нахождения минимума), то получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}\left\{\iint_\Omega D(x,y)\left[\Delta W_{ij}\Delta W_{ts} - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 W_{ts}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 W_{ts}}{\partial x^2} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 2\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 W_{ts}}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\right\} = \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij}\lambda^2\iint_\Omega hW_{ij}W_{ts}dxdy - k\int_{\Gamma_1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial h}\cdot\frac{\partial W_{ts}}{\partial h}d\ell;$$

$$(t+s) = 0,1;\ldots m \qquad (14)$$

Так как система однородная, то ее решение существует при условии равенства нулю определителя, откуда найдутся первые m собственных частот контрфорса, которые соответствуют m формам собственных колебаний.

По предлагаемой методике были выполнены расчеты Андижанской массивно-контрфорсной плотины, для которой имеются обширные данные натурных наблюдений и результаты экспериментальных исследований. Частота первой формы колебаний секции плотины, упруго заделанной в основание ($E_{пл} / E_{осн} = 4$) и верховый оголовок ($E_{пл} / E_{ог} = 0,1$), равна 88,4 гц, что примерно на 30% меньше экспериментально установленной 114,12 гц. Эта разница может быть объяснена тем, что при выполнении экспериментов, основание и оголовки моделировались жестким защемлением, а учет упругости смягчает работу секции при осевом сейсме, делая формы колебаний более "полнее", что приводит к уменьшению динамических напряжений примерно на 40% при учете первых двух форм колебаний.

Литература

1. Бахтин Б.М., Шаблинский Г.Э. Исследование некоторых особенностей работы массивно-контрфорсных плотин при сейсмических нагрузках. – Строительство и архитектура, 1972, №7, с. 99-103.
2. Рвачев В.Л. и др. Метод Р – функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Киев, Наукова думка, 1973, 121с.