УДК 539.3

ЭЙЛЕР И ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ

Кобринец В.М., к.т.н проф.,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г Одесса

В 1744г. Леонард Эйлер обратился к проблеме устойчивости упругих стержней и на много лет определил ее. Он является основоположником расчета стоек, стержней, колонн, стержневых систем, пластин и оболочек в сопротивлении материалов и строительной механике.

Во времена Эйлера не было такого понятия, как начальные несовершенства. Изготовить прямолинейную стойку и загрузить ее центрально считалось нормой. Поэтому рассматриваются идеальные стойки, стержни с прямолинейной осью и загруженные продольной сжимающей силой строго в центре тяжести. Материал сжатых элементов считается однородным и идеально упругим. Сила прикладывается статически.

Потеря устойчивости по Эйлеру состоит в следующем. Когда сила достигает критического значения, прямолинейная форма упругого равновесия перестает быть устойчивой и наряду или смежно с ней появляется новая искривленная форма упругого равновесия. Такое раздвоение форм называется *бифуркацией*.

Цель данного исследования – это проверка постановки задачи Эйлера на корректность.

1. Устойчивость положения абсолютно жесткой стойки.

Этой задачи Эйлер не рассматривал, но другие авторы рассчитывали ее в постановке Эйлера. Я.Г. Пановко [1] решает модельную задачу (рис. 1) и определяет Эйлеровую силу $P_{кр}$.

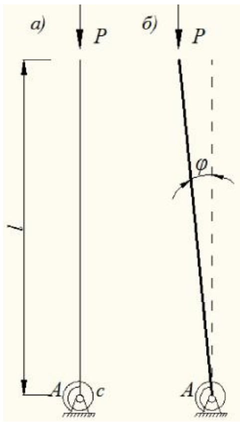

Рис. 1 *Модельная или эталонная система с одной степенью свободы*:
а – схема стойки с упругим шарниром; *б – определение угла возмущения*

Рассмотрим возмущенное состояние (рис. 1, б). Запишем уравнение равновесия относительно *A*. Плечо силы *P* по малости угла равно $l\varphi$.

$$Pl\varphi - c\varphi = 0. \qquad (1)$$

Решение 1: $\varphi = 0$ удовлетворяет (1) при любой силе *P*.

Решение 2: φ мало, но не $\neq 0$, тогда

$$P_{кр.1} = \frac{c}{l}. \qquad (2)$$

Пановко Я.Г. полагает, что формулой (2) задача решена.

Определим $P_{кр}$ с учетом угла отклонения φ.

Уравнение равновесия $Pl \sin\varphi - c\varphi = 0$, отсюда

$$P_{кр.2} = \frac{c\varphi}{l \sin\varphi}, \quad P_{кр.2} = P_{кр.1} \frac{\varphi / 57{,}296}{\sin\varphi}. \tag{3}$$

Рассмотрим потерю устойчивости формы. При составлении уравнения продольного изгиба Эйлер использовал дифференциальное уравнение упругой линии. Момент продольного изгиба $M(x) = -Py(x).$ Уравнение записывается при линеаризованном выражении кривизны.

$$EY \frac{d^2 y(x)}{dx} = -Py(x),$$

отсюда

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0, \quad \alpha^2 \frac{P}{EY}. \tag{4}$$

Уравнение однородное, это признак отсутствия внешних воздействий. Лучше P заменить на N.

$$\alpha^2 = \frac{N}{EY}. \tag{5}$$

Решение уравнения (4)

$$y(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x. \tag{6}$$

Граничные условия

$$C_1 \sin\alpha l = 0, \quad C_2 = 0.$$

Из этого условия определить C_1 невозможно. Эйлер предполагает, если $C_1 \neq 0$, значит потеря устойчивости произошла. Тогда $\sin\alpha l = 0$. Отсюда $\alpha l = \pi n$. Следовательно $\alpha = \pi n$.

$$N_{н.с.} = \frac{n^2 \pi^2 EY}{l^2}. \tag{7}$$

$N_{н.с.}$ — несущая способность, а не критическая внешняя сила $P_{кр}$.

Очевидно, что несущая способность, конечно, зависит от учета сдвига, пластичности, физической нелинейности.

При определении произвольной константы C_1 Эйлер использовал нулевые граничные условия.

Думается, условия нужно принять по углу наклона упругой линии. Производная от $y(x) = C_1 \sin\alpha x$: $y'(x) = \alpha C_1 \sin\alpha x$. При $x = 0$ $\alpha C_1 = y_0$, отсюда

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{\alpha}. \qquad (8)$$

Функция выгиба

$$y(x) = \frac{\varphi_0}{\alpha}\sin \alpha x, \qquad (9)$$

Закон выгиба — это синусоида. Проверка по $y'(x) = \varphi_0 \cos \alpha x$ на опорах при $x = 0$ и l. По симметрии $\dot{y}(0) = \dot{y}(l)$ $\varphi_0 = \varphi_0 \cos \alpha l$, следовательно, $\cos \alpha l = 1$, тогда $\alpha l = \pi$, и получим $P_{кр} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, как у Эйлера.

Почему $P_{кр}$ у Эйлера получилась такой же? Эйлер принял условие, что $C_1 \neq 0$, тем самым заставил идеальную стойку потерять устойчивость.

Определим выпучивание, если задать начальную погибь по первой характеристической кривой.

$$y_0(x) = a_0 \sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (10)$$

Угол поворота

$$y_0'(x) = \frac{\pi}{l} a_0 \cos\frac{\pi x}{l}. \qquad (11)$$

При $x = 0$

$$y_0'(0) = \varphi_0 = \frac{\pi a_0}{l}. \qquad (12)$$

Определим α при $P_э = \frac{\pi^2 EY}{l^2}$ по (5):

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_э}{EY}} = \sqrt{\frac{\pi^2 EY}{EY\, l^2}} = \frac{\pi}{l}. \qquad (13)$$

Подставим (12) и (13) в (9).

$$y(x) = \frac{\varphi_0}{\alpha}\sin x\alpha \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\pi a_0 l}{l\cdot\pi}\sin\frac{\pi\cdot l}{l\cdot 2} = a_0. \qquad (14)$$

$y^{max} = a_0$ — такая же амплитуда получается при свободных колебаниях, когда $y(t=0) = y_0$, а $v(t=0) = 0$.

Вот мнение А.А. Пиковского [4] о критических силах Эйлера: «…критические нагрузки 1-го рода являются обычно верхним пределом несущей способности стержневых систем со сжатыми элементами». Но обычно несущая способность является верхней оценкой сил.

Для сравнения запишем

$$P^{II}_{п.с} = \frac{48EI\,[f]}{l^3}. \qquad (15)$$

Если начальную погибь задать в виде

$$y_0(x) = f_0 \sin\frac{\pi \cdot x}{l},$$

тогда стрела выгиба шарнирно-опертой стойки определяется по формуле [5]

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_{кр}}{P} - 1}. \qquad (16)$$

Если f приравнять к нормативному допускаемому прогибу $[f]$, тогда P нужно заменить на $N^{II}_{н.в.}$, а $P_{кр}$ — это $P_{кр.э}$ или $N^{I}_{э.н.с}$.

Если сохранить привычную терминологию, тогда из (2) получим

$$P_{кр}(f) = \frac{P_{кр.э}}{l^2\left(1 + \frac{f_0}{[f]}\right)} = \frac{\pi^2 EY\,[f]}{l^2\left([f] + f_0\right)}. \qquad (17)$$

При сопоставлении (1) и (4) видна их полная идентичность.

Если $f_0 = [f]$ $P_{кр} = 0,5P_э$.

При неизбежном эксцентриситете f по (17)

$$f = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{e_0}{\frac{P_{кр}}{P} - 1}.$$

$$P_{кр}(e_0) = \frac{P_{кр.э}}{1 + \frac{4}{\pi}\frac{e_0}{[f]}}. \qquad (18)$$

Если $e_0 = 0$, $P_{кр}(e_0) = \frac{P_{кр.э}}{2,2732} = 0,44\,P_{кр.э}$.

Эксцентриситет влияет более активно.

Выводы

1. Если неизбежные несовершенства исчезающе малы и их можно не учитывать, тогда $P_{кр}$ определяется как для идеальных конструкций по Эйлеру, но определить выгиб нельзя.

2. Начальные несовершенства – это спусковой механизм потери устойчивости реальных стержней, стоек, колонн.

3. Неизбежное f_0 и e_0 и допускаемые нормативные должны разрабатываться ведущими научно-исследовательскими организациями и быть представлеными в соответствующих разделах СНиП.

4. При $P_{кр\cdot э}$ продольный изгиб считается бесконечно мал, но для реальных стержней это не так.

5. Эйлеровы $P_{кр\cdot э}$ всегда больше $P_{кр}$.

Литература

1. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. - М.: «Наука», 1985. - 287с.

2. Барданов Ю.М., Вильга М.Я., Какосимиди Н.Ф. Расчет сжатых стержней на устойчивость. - Одесса: Минвуз УССр , 1979. - 93с.

3. Тимошенко С.П., Гере Д.Ж Механика материалов. - М.: Изд-во «Мир», 1976. - 669с.

4. Вольмир А.С Устойчивость упругих систем. - М.: Гос. Изд-во физ. Мат. Литературы, 1963. - 879с.

5. Пиковский А.А. Статика стержневых систем с сжатыми элементами. - М.: Гос. Изд-во физ.мат. литературы, 1961. - 394с.

EULER AND STABILITY PROBLEMS

We discuss the correctness of the Euler stability problems.