

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ
ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ОХЛАЖДЕНИИ**

Жданов А.А., к.т.н., доц.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры г. Одесса

Цилиндрические вертикальные хранилища, заполненные сыпучим материалом (зерном, например) испытывают температурные климатические воздействия, описанные в [1]. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической металлической тонкостенной оболочки кусочно-постоянной (по высоте) толщины, покоящейся изнутри на упругом Винклеровском основании с кусочно-постоянным коэффициентом постели, вызванное осесимметричным охлаждением оболочки, исследовано в [2]. В данной работе в продолжение [2] исследуется аналогичная задача но с кусочно-линейным коэффициентом постели (рис.1,б).

Основные уравнения безмоментной теории тонких цилиндрических оболочек имеют вид [3,4]:

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \alpha_t t, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \alpha_t t, \quad (1)$$

где u, v, w – компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки (положительные направления показаны на рис. 2, \mathfrak{z});

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации срединной поверхности в осевом и в окружном направлениях, соответственно;

α, β – безразмерные координаты точек срединной поверхности:

$\alpha = \frac{x}{R}$, β – угловая координата;

t – температурный перепад стенки, $t = t_0$;

R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки;

E, ν, α – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки.

Функция коэффициента постели основания для i -го пояса имеет вид

$$k_i(\alpha) = k_i + \tilde{k}_i \alpha, \quad k_i(\beta) = k_{i+1}, \quad (2)$$

где k_i и k_{i+1} – значения коэффициента постели в начале координат i -го и $i+1$ -го поясов оболочки; \tilde{k}_i – приращение коэффициента постели основания на единицу длины пояса оболочки.

С учетом осесимметричности задачи все производные по β равны нулю и уравнения принимают следующий вид.

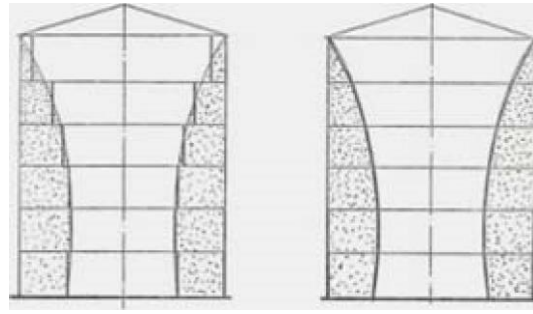
Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} N_{1i} &= \frac{Eh_i}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{du_{oi}}{d\alpha} + \nu w_{oi} - (1+\nu)\alpha_t Rt_0 \right], \\ N_{2i} &= \frac{Eh_i}{(1-\nu^2)R} \left[w_{oi} + \nu \frac{du_{oi}}{d\alpha} - (1+\nu)\alpha_t Rt_0 \right], \\ S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения равновесия в перемещениях для i -го пояса имеют вид

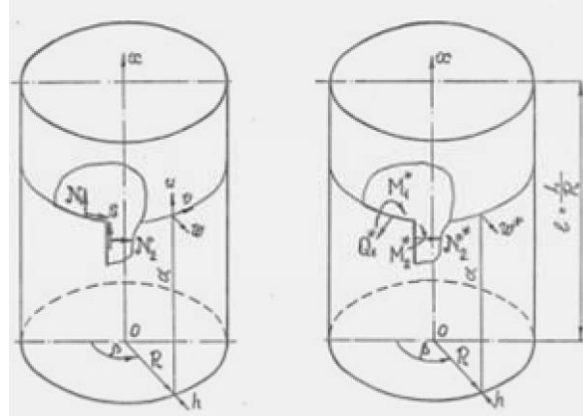
$$\frac{d^2 u_{oi}}{d\alpha^2} + \nu \frac{dw_{oi}}{d\alpha} = 0, \quad (4)$$

$$\nu \frac{du_{oi}}{d\alpha} + w_{oi} = (1+\nu)\alpha_t Rt_0 - \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh_i} (k_i + \tilde{k}_i \alpha) w_{oi}. \quad (5)$$



а) б)

Рис. 1- Варианты аппроксимации коэффициента постели:
а-кусочно-постоянной функцией; б- кусочно-линейной функцией



а) б)

Рис. 2- Положительные направления усилий и перемещений:
а-безмоментное напряженно-деформированное состояние;
б-состояние краевого эффекта

Принтегрировав (3) по α , получим

$$\frac{d u_{oi}}{d \alpha} = -\nu w_{oi} + C_{ii}, \quad (6)$$

С учетом (6) из (5) следует, что

$$w_{oi}(\alpha) = \frac{\alpha t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{R^2}{E h_i} (k_i + \tilde{k}_i \alpha)} - \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \frac{C_{ii}}{1 + \frac{R^2}{E h_i} (k_i + \tilde{k}_i \alpha)}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6) и выполнив интегрирование по α , получим

$$u_{oi}(\alpha_i) = -\nu \frac{\alpha_t R t_o}{1-\nu} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{R^2}{E h_i} \left(k_i + \tilde{k}_i \alpha_i \right) \right| + C_{1i} \left(k_i + \frac{\nu^2}{(1-\nu^2)} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{R^2}{E h_i} \left(k_i + \tilde{k}_i \alpha_i \right) \right| \right) + C_{2i} \quad (8)$$

Произвольные постоянные интегрирования C_{1i} и C_{2i} определяются из тангенциальных граничных условий (ТГУ) на краях оболочки и условий стыковки поясов. Для рассматриваемого варианта аппроксимации функции коэффициента постели упругого основания эти условия принимают вид:

ТГУ:

$$C_{1i} \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_i R^2}{E h_i} \right| + C_{2i} = \nu \frac{\alpha_t R t_o}{1-\nu} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_i R^2}{E h_i} \right|; \quad (9)$$

Стыковка поясов:

$$\left. \begin{aligned} & C_{1i} \left(k_i + \frac{\nu^2}{(1-\nu^2)} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_{i+1} R^2}{E h_i} \right| \right) + C_{2i}^- \\ & - C_{1i+1} \frac{\nu^2}{(1-\nu^2)} \frac{E h_{i+1}}{\tilde{k}_{i+1} R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_{i+1} R^2}{E h_{i+1}} \right| - C_{2i+1}^+ = \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$= \nu \frac{\alpha_t R t_o}{1-\nu} \frac{E h_i}{\tilde{k}_i R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_{i+1} R^2}{E h_i} \right| - \nu \frac{\alpha_t R t_o}{1-\nu} \frac{E h_{i+1}}{\tilde{k}_{i+1} R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_{i+1} R^2}{E h_{i+1}} \right|; \quad (11)$$

$$C_{1i} \frac{E h_i}{(1-\nu^2) R} - C_{1i+1} \frac{E h_{i+1}}{(1-\nu^2) R} = \frac{E \alpha_t o}{(1-\nu)} (h_i - h_{i+1});$$

ТГУ:

($i = 1, 2, 3, \dots, m-1$)

$$\begin{aligned} & C_{1m} \left(\frac{E h_m}{(1-\nu^2) R} - l_m + \frac{\nu^2}{(1-\nu^2)} \frac{E h_m}{\tilde{k}_m R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_{m+1} R^2}{E h_m} \right| \right) + C_{2m} = \\ & = \frac{N}{H} + \frac{E h_m}{(1-\nu^2) R} (1+\nu) \alpha_t R t_o + \nu \frac{\alpha_t R t_o}{1-\nu} \frac{E h_m}{\tilde{k}_m R^2} \ln \left| 1 + \frac{k_m R^2}{E h_m} \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

где N_1^H - предварительное натяжение оболочки в осевом направлении;

\mathcal{G} - коэффициент жесткости упругого закрепления оболочки в осевом (продольном) направлении на крае $\alpha = 1_m$.

Матрица системы неоднородных линейных уравнений (8-11) имеет ленточную структуру с похожими коэффициентами при неизвестных C_{jk} (с м (15) в [2]). Решение этой системы можно получить, следуя описанным в [2] процедурам, оно полностью определяет безмоментное состояние оболочки при её осесимметричном охлаждении.

В стыках поясов значения коэффициента постели для соседних поясов совпадают, но толщины стенки поясов оболочки различны, потому в стыках поясов возникает разрыв непрерывности радиальных перемещений и углов поворота. Для удовлетворения нетангенциальным граничным условиям воспользуемся теорией простого краевого эффекта. Использование полученных в [2] решений позволяет, с учетом (2), достаточно легко преодолеть все трудности преобразований. Эти решения в нашем случае выражаются через радиальное перемещение (13) и имеют вид:

$$w_{oi}^*(\alpha) = e^{g_{oi}^* \alpha} \left[C_{ii}^* \cos g_{oi}^* (\alpha - 1) + C_{zi}^* \sin g_{oi}^* (\alpha - 1) \right] + e^{-g_{oi}^* \alpha} \left(C_{3i}^* \cos g_{oi}^* \alpha + C_{4i}^* \sin g_{oi}^* \alpha \right), \quad (13)$$

$$\text{где } 4g_{oi}^{*4} = \frac{12R^4(1-\nu^2)}{R^2 h_i^2} + \frac{k_{i+1} R^4}{D_i}; \quad 4g_{oi}^{*4} = \frac{12R^4(1-\nu^2)}{R^2 h_i^2} + \frac{k_i R^4}{D_i}; \quad (14)$$

$$D_i = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Усилия краевого эффекта определяются по следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} N_{oii}^* &= 0, & N_{ozi}^* &= \frac{Eh_i}{R} w_{oi}^*, & M_{oii}^* &= -\frac{D_i}{R^2} \frac{d^2 w_{oi}^*}{d\alpha^2}, \\ M_{ozi}^* &= \nu M_{oii}^*, & Q_{oii}^* &= \frac{D_i}{R^3} \frac{d^3 w_{oi}^*}{d\alpha^3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Положительные направления усилий, изгибающих моментов и перемещений краевого эффекта показаны на рис. 2,б

Заключение

1. Исследовано напряженно-деформированное состояние вертикальной цилиндрической оболочки покоящейся изнутри на упругом винклеровском основании при осесимметричном охлаждении оболочки.

2. Результирующее напряженное состояние оболочки определяется суммой усилий безмоментного состояния (3) и краевого эффекта (15).

Литература

1. Жданов А.А Влияние солнечной радиации на температурные поля вертикальных цилиндрических хранилищ сыпучих материалов. – ВІСНИК ОДАБА. Вип. 56. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2014. – с249-255.
2. Жданов А.А Цилиндрическая металлическая оболочка на упругом основании при температурном климатическом воздействии. – ВІСНИК ОДАБА. Вип. 57. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2015. – с152 – 160.
3. Гольденвейзер А.Л Теория упругих тонких оболочек.– М.: Гостехтеориздат, 1953. – 544 с
4. Власов В.З Общая теория оболочек и её приложение в технике. М.-Л Гостехтеориздат, 1949. – 784 с

A CYLINDRICAL METAL SHELL ON AN ELASTIC FOUNDATION AXISYMMETRIC IN COOLING

On the basis of the membrane theory of thin cylindrical shells and a simple edge effect explicitly received the decision of the stress-strain state of cylindrical shell resting on the inside on an elastic Winkler base at axisymmetric cooling shell.