УДК 620.193.4:624.012.45

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПРОСТАНСТВЕННОГО ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК И РАМ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

Фомин В.М., к.т.н., проф.,
Одесская государственная академия строительства архитектуры, г. Одесса

В [1] был предложен алгоритм построения системы дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонной балки в приращениях угловых перемещений с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона при пошаговом методе решения:

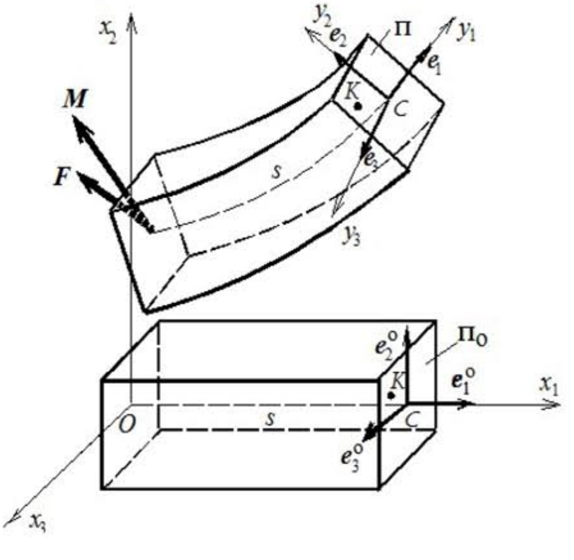
$$\sum_{r=1}^{3}[X_{i,r}(s)d\xi_r'' + Y_{i,r}(s)d\xi_r' + Z_{i,r}(s)d\xi_r] + \sum_{k=1}^{3}\widetilde{U}_{1,k}(s)dF_k = 0 \qquad (1)$$

$(i = 1,2,3)$ с граничными условиями на левом конце

$$\sum_{r=1}^{3}V_{i,r}d\xi_r(0) + \sum_{r=1}^{3}V_{i,r+3}d\xi_r'(0) + \sum_{k=1}^{3}W_{i,k}dF_k + dM_i = 0 \ (i = 1,2,3), \qquad (2)$$

где s – дуговая координата поперечного сечения балки, $d\boldsymbol{\xi}$ – вектор с элементами

$$d\xi_1 = d\phi,\ d\xi_2 = d\psi,\ d\xi_3 = d\theta$$



($d\phi, d\psi, d\theta$ - приращения углов Крылова, определяющие изменение ориентации системы координат y_1, y_2, y_3 (y_2, y_3 – главные центральные оси инерции сечения) относительно неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3, вызванные приращениями силы $\boldsymbol{F}$ и момента $\boldsymbol{M}$, приложенных к левому концу балки, рис.1). Недостающие три граничных условия определяются условиями закрепления балки.

Из равенств [1]

$$dx'_{C,i} = d\alpha_{1,i} \ \ (i = 1,2,3)$$

($x_{C,i}$ $(i=1,2,3)$ - координаты центра тяжести сечения, $\alpha_{k,i}$ $(i,k=1,2,3)$ – направляющие косинусы векторов $\boldsymbol{e}_{k,i}$ $(i,k=1,2,3)$) следует, что

$$dx'_{C,2}=d\phi, dx'_{C,3}=-d\psi\,. \tag{4}$$

С учетом (4) уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}X_{i,1}(s)dx'''_{C,2}-X_{i,2}(s)dx'''_{C,3}+X_{i,3}(s)d\theta''+Y_{i,1}(s)dx''_{C,2}-\\-Y_{i,2}(s)dx''_{C,3}+Y_{i,3}(s)d\theta'+Z_{i,1}(s)dx'_{C,2}-Z_{i,2}(s)dx'_{C,3}+\\+Z_{i,3}(s)d\theta=\sum_{m=1}^{3}\tilde{\tilde{U}}_{i,m}dQ_m(0)\ (i=1,2,3),\end{gathered} \tag{5}$$

где $\tilde{\tilde{U}}_{i,m}=\sum_{k=1}^{3}\tilde{U}_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$, а граничные условия (3) – в таком:

$$\begin{gathered}V_{i,1}dx'_{C,2}(0)-V_{i,2}dx'_{C,3}(0)+V_{i,3}d\theta(0)+V_{i,4}dx''_{C,2}(0)-\\-V_{i,5}dx''_{C,3}(0)+V_{i,6}d\theta'(0)=\sum_{m=1}^{3}\tilde{W}_{i,m}dQ_m(0)-dM_i(0)\ (i=1,2,3),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\tilde{W}_{i,m}=\sum_{k=1}^{3}W_{i,k}\alpha_{k,m}(0)$.

Пусть $z_{j,k}(s)$ $(j=1,2,3;k=1,2,...,8)$ - фундаментальная система решений задачи Коши для однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (5), т.е. $z_{1,k}(s)=dx_{C,2}(s)$, $z_{2,k}(s)=dx_{C,3}(s)$, $z_{3,k}(s)=d\theta(s)$ $(k=1,2,...,8)$ при выполнении следующих условий:

$$y_k=\delta_{j,k},$$

где $\delta_{j,k}$ - символ Кронекера, а

$$\begin{gathered}y_1=dx_{C,2}(0), y_2=dx'_{C,2}(0), y_3=dx''_{C,2}(0), y_4=dx_{C,3}(0),\\y_5=dx'_{C,3}(0), y_6=dx''_{C,3}(0), y_7=d\theta(0), y_8=d\theta'(0).\end{gathered} \tag{7}$$

Обозначим через $z_{ч,j,m}(s)$ $(j,m=1,2,3)$ - множество частных решений $dx_{ч,C,2}(s), dx_{ч,C,3}(s), \theta_ч(s)$ системы (5) при нулевых начальных условиях и при столбце правых частей, состоящем из элементов $\tilde{\tilde{U}}_{i,m}$ $(m=1,2,3)$.

Для приближенного построения этих решений балка разбивается на ряд сегментов, в пределах каждого из которых коэффициенты $X_{i,j}(s), Y_{i,j}(s), Z_{i,j}(s)$ считаются постоянными и равными $X_{i,j}(s_m), Y_{i,j}(s_m), Z_{i,j}(s_m)$ (s_m – дуговая координата начала сегмента, m – его номер) соответственно. Применяя теорию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, находим решения $dx_{C,2}(s), dx_{C,3}(s), d\theta(s)$ на первом сегменте при соответствующих начальных условиях. Затем эти решения вместе с их производными продолжаются непрерывно на последующие участки.

Решения однородной системы (5), а также их производные могут быть выражены через фундаментальные решения задачи Коши таким образом:

$$dx_{C,2} = \sum_{j=1}^{8} y_j z_{1,j}, dx'_{C,2} = \sum_{j=1}^{8} y_j z'_{1,j}, dx''_{C,2} = \sum_{j=1}^{8} y_j z''_{1,j},$$

$$dx_{C,3} = \sum_{j=1}^{8} y_j z_{2,j}, dx'_{C,2} = \sum_{j=1}^{8} y_j z'_{2,j}, dx''_{C,2} = \sum_{j=1}^{8} y_j z''_{2,j}, \tag{8}$$

$$d\theta = \sum_{j=1}^{8} y_j z_{3,j}, d\theta'(s) = \sum_{j=1}^{8} y_j z'_{3,j},$$

Для нахождения dM_i и dQ_i $(i = 1,2,3)$ используются формула (21)[1]:

$$dM_i = \sum_{r=1}^{3} (M_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{r=1}^{3} (M_i)_{r+3}^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^{3} (M_i)_k^{(4)} dF_k,$$

$$dQ_i = \sum_{r=1}^{3} (Q_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{r=1}^{3} (Q_i)_{r+3}^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^{3} (Q_i)_k^{(4)} dF_k \ (i = 1,2,3). \tag{9}$$

Для каждого из стержней рамы можно записать следующее равенство:

$$\boldsymbol{dw}(s) = \boldsymbol{dw}_{одн}(s) + \boldsymbol{dw}_{ч}(s). \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{dw}_{одн}$ - вектор с элементами

$$dw_{одн,1} = dx_{C,2}, dw_{одн,2} = dx'_{C,2}, dw_{одн,3} = dx''_{C,2},$$

$$dw_{одн,4} = dx_{C,3}, dw_{одн,5} = dx'_{C,3}, dw_{одн,6} = dx''_{C,3}, \tag{11}$$

$$dw_{одн,7} = d\theta, dw_{одн,8}(s) = d\theta',$$

полученными из решения однородной системы (5), а $\boldsymbol{dw}_ч$ - вектор с теми же элементами, полученными из частного решения $dx_{ч,C,2}$, $dx_{ч,C,3}(s), d\theta_ч(s)$ системы (5) при нулевых начальных условиях. Тогда

$$dw_{ч,j} = \sum_{m=1}^{3} z_{ч,j,m} dQ_m(0) \quad (j, m = 1,2,3) \tag{12}$$

Представим $\boldsymbol{dw}_{одн}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{dw}_{одн} = \boldsymbol{Adw}(0), \tag{13}$$

т.е.

$$dw_{одн,i} = \sum_{j=1}^{8} A_{ij} dw_j(0).$$

Здесь

$$A_{1,j} = z_{1,j}, A_{2,j} = z'_{1,j}, A_{3,j} = z''_{1,j}, A_{4,j} = z_{2,j}, A_{5,j} = z'_{2,j},$$
$$A_{6,j} = z''_{2,j}, A_{7,j} = z_{3,j}, A_{8,j} = z'_{1,j} \ (j = 1,2,...,8).$$

Таким образом, $\boldsymbol{dw}$ представляется в следующем виде:

$$\boldsymbol{dw} = \boldsymbol{Adw}(0) + \boldsymbol{dw}_ч, \tag{14}$$

что совместно с (10) представляет собой основу алгоритма метода граничных элементов.

Литература

1. Фомин В.М. Построение дифференциальных уравнений пространственного изгиба железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона// Вісник КНУТД. №1 (106) – Киев, 2016. – с. 43 – 50.

MODIFICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF NONLINEAR PROLEMS OF SPATIAL BENDING OF REINFORCED CONCRETE BEAMS AND FRAMES TAKING INTO ACCOUNT PLASTICITY OF CONCRETE

In solving static and dynamic problems for reinforced concrete frames based on nonlinear and plastic properties of materials in order to achieve sufficient accuracy, you need to make a partition of the elements of reinforced concrete frames on the large number of small finite elements because of dependence of deformation properties of concrete from its stress-strain state, what leads to the system of resolving equations of finite element method of high order. Therefore there is a need to use alternative methods, such as the boundary element method, application of which requires presence of bending differential equations.

An algorithm for constructing the matrix of fundamental functions of the Cauchy problem for the mentioned above system of differential equations as well as the matrix-column of special particular solutions, defined by a given load, which are necessary for the application of the boundary element method to studying the static and dynamic problems of reinforced concrete beams and frames bending taking into account the above mentioned parameters has been proposed.