УДК 624.04

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Балдук П.Г., к.т.н., проф., Сурьянинов Н.Г. , д.т.н., проф.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Дифференциальное уравнение устойчивости прямоугольной ортотропной пластины в общем случае имеет вид [1]

$$D_1 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = q(x,y), \quad (1)$$

где

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};$$

$$D_3 = D_1\mu_{xy} + 2D_k = D_2\mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона; $N_x(y); N_{xy}; N_y(x)$ — усилия в срединной плоскости (рис. 1); $q(x,y)$ — поперечная нагрузка.

При $D_1 = D_2 = D_3 = D$ уравнение (1) переходит в уравнение устойчивости изотропной пластинки.

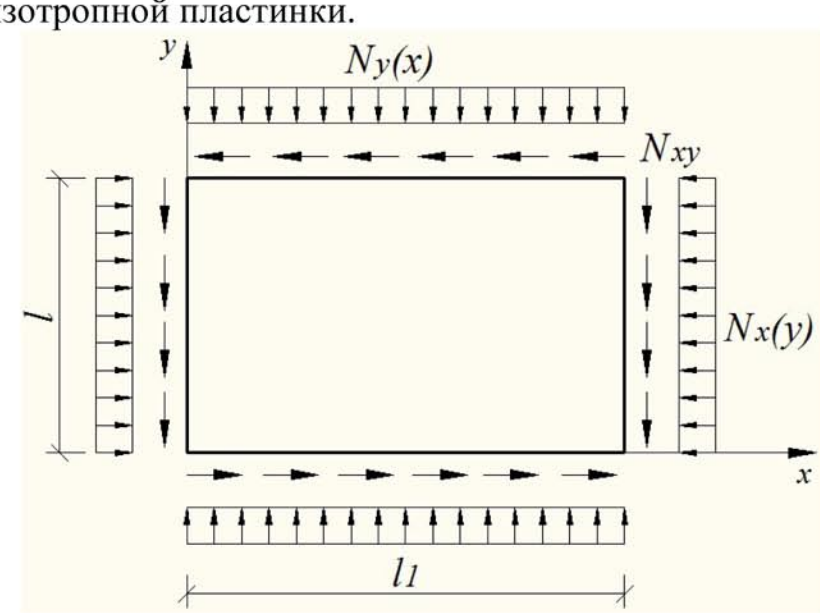

Рис. 1. Усилия в срединной плоскости

Используя вариационный метод Канторовича-Власова, представим прогиб пластинки в виде

$$w(x,y) = W(y)X(x), \tag{2}$$

где функция поперечного распределения прогибов $X(x)$ может быть выбрана одним из двух способов — статическим или динамическим [2].

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} &D_1 W X^{IV} + 2D_3 W'' X'' + D_2 W^{IV} X + N_x(y) W X'' + \\ &+2N_{xy} W' X' + N_y(x) W'' X = q(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Умножим обе части (3) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x:

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{1V} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{1V} \int_0^{l_1} X^2 dx + N_x(y) W \int_0^{l_1} X'' X dx +$$

$$+2W' \int_0^{l_1} N_{xy} X' X dx + W'' \int_0^{l_1} N_y(x) X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x,y) X dx.$$

Введем обозначения:

$$\int_0^{l_1} D_2 X^2 dx = A; \quad \int_0^{l_1} [D_3 X'' + N_y(x) X] X dx = B; \quad \int_0^{l_1} 2N_{xy} X' X dx = K;$$

$$\int_0^{l_1} [D_1 X^{IV} + N_x(y) X''] X dx = C; \quad \int_0^{l_1} q(x,y) X dx = q(y),$$

тогда

$$W^{1V} A + W'' B + W' K + W C = q(y).$$

Будем считать, что

$$B/(2A) = r^2; \quad K/A = f^3; \quad C/A = s^4,$$

и окончательно получим:

$$W^{1V} + 2r^2 W'' + f^3 W' + s^4 W = \frac{1}{A} q(y). \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение (4) описывает одномерную модель устойчивости прямоугольной ортотропной пластины.

Вид фундаментальных функций задачи зависит от корней характеристического уравнения

$$t^4 + 2r^2 t^2 + f^3 t + s^4 = 0,$$

которое можно решить численно или в каком-либо математическом пакете.

Литература

1. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: в 3 т. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.

2. Дащенко А.Ф. Численно–аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.

ON THE STABILITY OF RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLATES

The differential stability equation containing two variables is given by the Kantorovich-Vlasov method to an equation that describes a one-dimensional model of stability of a rectangular orthotropic plate.