УДК 550.34

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Крутій Ю.С., д.т.н., проф., Вандинський В.Ю., магістрант
Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса

Важливою проблемою є дослідження на згинні коливання різного роду будівель та споруд з урахуванням поздовжньої сили. На жаль, у більшості видань [1–5], де розглядаються коливання споруд та їх елементів, для спрощення поздовжня сила вважається постійною уздовж висоти.

Однак в реальних конструкціях поздовжні сили в різних перерізах приймають різні значення. Зокрема, до прикладів таких конструкцій належать колони каркасних будівель, промислові висотні споруди у вигляді димових труб, водонапірних башт, багатоцільові сталеві опори, які застосовуються в лініях електропередач, опорах вітрових генераторів, антенах різних конструкцій та ін.

Однією з поширених розрахункових схем при дослідженнях згинних коливань перерахованих вище конструкцій є стрижень постійного перерізу, що знаходиться під дією змінної поздовжньої сили, в ролі якої виступає власна вага споруди. Математичною моделлю такого фізичного явища буде диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами [3, 6, 7].

Через складнощі визначення точного розв'язку даного рівняння, дослідження ведуться наближеними, як правило, варіаційними методами. Однак зрозуміло, що найбільш повну та якісну оцінку механічної системи можна одержати тільки на основі точного розв'язку диференціального рівняння. Відомо [3, 6], що диференціальне рівняння вільних поперечних коливань стрижня з урахуванням власної ваги має вигляд:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+q\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \qquad (1)$$

де $EI-$ поперечна жорсткість стрижня;

$m-$ інтенсивність розподіленої маси (погонна маса) стрижня;

$N(x)=qx-$ змінна поздовжня (стискаюча) сила, де $q-$ вага одиниці довжини стрижня;

$y(x,t)-$ поперечне переміщення точки вісі стрижня з координатою x в момент часу t (динамічний прогин).

Дане рівняння справедливе для моделі, в якій прийнято зневажати поздовжніми переміщеннями перерізів, їх поворотами та зсувами.

Після визначення з рівняння (1) динамічного переміщення $y(x,t)$, решта динамічних параметрів стану стрижня знаходяться за відомими формулами [3, 6].

$$\varphi(x,t)=\frac{\partial y}{\partial x};\; M(x,t)=-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\; Q(x,t)=\frac{\partial M}{\partial x}-qx\frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (2)$$

де:

$\varphi(x,t)-$ динамічний кут повороту;

$M(x,t)-$ динамічний згинальний момент;

$Q(x,t)-$ динамічна поперечна сила;

Застосовуючи метод Фур'є, розв'язок рівняння (1) знаходився у вигляді

$$y(x,t)=v(x)T(t), \qquad (3)$$

де $v(x)-$ амплітудне значення поперечного переміщення, що залежить тільки від змінної x; $T(t)-$ функція часу t.

Отримаємо два звичайні диференційні рівняння :

$$\ddot{T}(t)+p^2T(t)=0; \qquad (4)$$

$$EI\,v''''(x)+q(x\,v'(x))'-p^2 m v(x)=0,\; y(x,t)=v(x)T(t), \qquad (5)$$

де p^2- константа методу Фур'є.

Аналіз рівняння (6) показує, що рух механічної системи, яка розглядається, носить коливальний характер. Для побудови точного розв'язку рівняння (7) застосуємо метод прямого інтегрування, запропонований та розвинутий в [8].

Авторами було виведено формули для амплітудних параметрів вільних поперечних коливань стрижня, що виражені через початкові параметри й безрозмірні функції. Після реалізації заданих граничних умов за допомогою вищезгаданих формул, матимемо частотне рівняння відносно невідомого безрозмірного параметру

$$K = p\, l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}\,. \tag{8}$$

Після визначення коренів частотного рівняння $K_1, K_2, K_3, \ldots$, у відповідності з формулою (9) матимемо спектр частот коливань

$$p_j = \frac{K_j}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \ (j = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Знайдені точні розв'язки дозволять досліджувати вільні коливання стрижнів з урахуванням власної ваги за будь-яких граничних умов на кінцях.

Список літератури

[1] Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., *Vibration Problems in Engineering.* (John Wiley & Sons, New York, 1990).

[2] Бабаков И.М., *Теория колебаний*. (Москва, 1965).

[3] Balachandran B., Magrab E., *Vibrations, second edition* (Cengage Learning, Toronto,2009).

[4] Rao S.S., *Mechanical vibrations*. (Pearson, Prentice Hall, 2004).

[5] Shaker F. J., Lewis Research Center Report NASA TN D-8109 (December 1975).

[6] Василенко М.В., Алексейчук О.М., Теорія коливань і стійкості руху (Київ, Вища школа, 2004).

[7] Kukla S., B Skalmierski B., Journal of Theoretical and Applied Mechanics, **31 (2)**, 413-430 (1993).

[8] Крутій Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: дисертація на здобуття наукового ступеня Доктора технічних наук. (Одеса, ОДАБА, 2016).

EXACT SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF TRANSVERSE OSCILLATIONS OF THE ROD TAKING INTO ACCOUNT OWN WEIGHT

The free transverse oscillations of the rod of uniform cross section taking into account its own weight are considered in this work. The exact solution of the appropriate differential equation of rod's transverse oscillations, expressed in non-dimensional fundamental functions and initial parameters is attained for the first time. Due to the exact solution, the formulas in an explicit form for dynamic variables of rode state – deflections, angular displacement, bending moment and transverse force – were defined. The analytical form for equation of free oscillation frequency is defined. That has limited the finding of frequency to definition the unknown non-dimensional parameter through frequency equation. As a result, the presence of derivative exact solutions allows to investigate the free oscillations of rod with various types of boundary conditions.