УДК 539.3:624.046.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ОПОР МНОГОПРОЛЕТНОГО ПРОДОЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Бекшаев С.Я.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры fevs@ogasa.org.ua

Работа посвящена определению жесткости опор многопролетного шарнирно опертого стержня произвольного переменного сечения (рис. 1), обеспечивающей максимальное повышение критической силы (далее – КрС) при минимальных затратах.

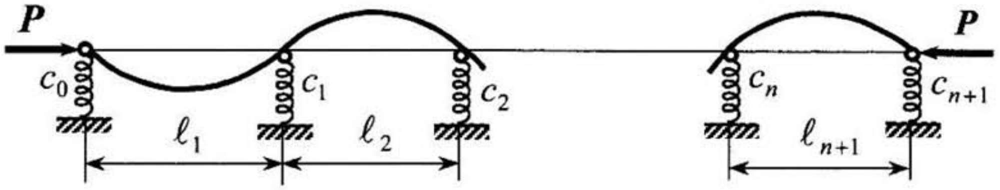

Рис. 1.

Используются обозначения:

(OL) – однопролетный стержень произвольной переменной изгибной жесткости, шарнирно опертый по концам O и L на жесткие опоры;

S^n – стержень, образованный из (OL) введением n промежуточных точечных шарнирных опор и заменой крайних опор опорами произвольной жесткости (рис. 1);

$P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$ – КрС стержня (OL), занумерованные в порядке возрастания;

j-я форма – форма потери устойчивости стержня (OL), отвечающая КрС P_j;

ℓ_j – расстояние между $(j-1)$-м и j-м узлами $(n+1)$-й формы;

c_j – коэффициент жесткости j-й опоры.

Сформулируем следующие задачи.

ЗМПУ – задача максимального повышения устойчивости – найти такие положения и коэффициенты жесткости c_j опор, которые обеспечивают максимальное значение КрС стержня S^n. Установлено [1], что это максимальное значение равно P_{n+1} и достигается при установке промежуточных опор в узлы $(n+1)$-й формы. При этом жесткость опор может оказаться избыточной, т.е. может быть уменьшена без уменьшения КрС. В связи с этим может быть поставлена

ОЗБ – обобщенная задача Бубнова – определить такие наборы коэффициентов жесткости промежуточных опор, решающих ЗМПУ, в которых уменьшение любого из коэффициентов ведет к уменьшению КрС. И.Г.Бубновым эта задача была решена для призматического стержня при $c_0 = c_{n+1} = \infty$ и одинаковых промежуточных опорах, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ [2].

В достаточно общей форме ОЗБ исследована Я.Л.Нудельманом [3], который предложил простой способ отыскания бесконечного множества ее решений. При этом остались не до конца выясненными вопросы полноты решения и эффективного определения всех наборов $c_0, c_1,, \ldots, c_{n+1}$, решающих ОЗБ.

ООЗБ – оптимизационная задача Бубнова – среди всевозможных наборов $c_0, c_1,, \ldots, c_{n+1}$, решающих ОЗБ, найти такой, для которого сумма коэффициентов $c_0 + c_1 + \ldots + c_{n+1}$ будет минимальной.

В настоящей работе представлены решения ОЗБ и ООЗБ, причем допускаются бесконечные значения не только для крайних, но и для некоторых из промежуточных опор.

1. **Решение ОЗБ**. Для того чтобы найти набор $c_0, c_1,, \ldots, c_{n+1}$ коэффициентов, находящихся между собой в произвольных наперед заданных отношениях, решающий ОЗБ, достаточно взять любую систему чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, находящихся в тех же отношениях, и найти наименьший корень P следующего детерминантного уравнения с трехдиагональной матрицей

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha_1}-\frac{\ell_1}{P} & -\frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}-\frac{\ell_2}{P} & -\frac{1}{\alpha_2} & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & & \frac{1}{\alpha_{n-1}}+\frac{1}{\alpha_n}-\frac{\ell_n}{P} & -\frac{1}{\alpha_n} \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{\alpha_n} & \frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_{n+1}}-\frac{\ell_{n+1}}{P} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Тогда искомые коэффициенты определяются соотношениями $c_j = \alpha_j \left(P_{n+1} / P \right)$.

2. **Решение ООЗБ**.

2.1. Набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$, решающий ООЗБ при заданных значениях c_0 и c_{n+1} коэффициентов жесткости крайних опор, определяется соотношениями

$$c_j = 2P_{n+1}\left(\frac{1}{\ell_j} + \frac{1}{\ell_{j+1}} \right) \text{ при } \quad j = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1, \tag{2}$$

$$c_1 = \frac{2P_{n+1}}{\ell_2} + \frac{1}{\dfrac{\ell_1}{P_{n+1}} - \dfrac{1}{c_0}}, \quad c_n = \frac{2P_{n+1}}{\ell_n} + \frac{1}{\dfrac{\ell_{n+1}}{P_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{n+1}}}, \tag{3}$$

а минимальная сумма

$$\left(\sum_1^n c_j \right)_{\min} = 4P_{n+1} \sum_2^n \frac{1}{\ell_j} + \frac{1}{\dfrac{\ell_1}{P_{n+1}} - \dfrac{1}{c_0}} + \frac{1}{\dfrac{\ell_{n+1}}{P_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{n+1}}}. \tag{4}$$

При этом КрС стержня S^n может достичь величины P_{n+1} только при $c_0 \geq P_{n+1}/\ell_1$ и $c_{n+1} \geq P_{n+1}/\ell_{n+1}$.

2.2. Если допустить варьирование жесткостей c_0 и c_{n+1} крайних опор и искать минимум суммы $c_0 + c_1 + \ldots + c_{n+1}$, коэффициенты жесткости опор, решающих ООЗБ, определяются соотношениями

$$c_j = 2P_{n+1}\left(\frac{1}{\ell_j} + \frac{1}{\ell_{j+1}} \right) \text{ при } j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\; c_0 = \frac{2P_{n+1}}{\ell_1},\; c_{n+1} = \frac{2P_{n+1}}{\ell_{n+1}}, \tag{5}$$

а минимальная сумма

$$\left(\sum_0^{n+1} c_j \right)_{\min} = 4P_{n+1} \sum_1^{n+1} \frac{1}{\ell_j}. \tag{6}$$

1. НудельманЯ.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л., ГТТИ, 1949, 176 С.
2. БубновИ.Г. Строительная механика корабля, Ч. 1, СПб, 1912, 330 С.
3. НудельманЯ.Л. Устойчивость упруго опертых балок. ПММ, т. III, вып. 4, 1939, С. 33 – 48.

ON THE OPTIMAL STIFFNESS OF THE SUPPORTS OF MULTI-SPAN LONGITUDINALLY COMPRESSED ROD

There are systems of hinge supports (including finite stiffness) of a multi-span rod that provide the maximum value of the critical force for a given number of supports. Among these systems, there are those in which an increase in the stiffness of any of the supports does not increase the critical force, and the reduction makes the critical force less. A method for determining the stiffness coefficients for all sets of such systems is proposed. The stiffness distribution between the supports of the optimal set for which the sum of the stiffness coefficients is minimal is also found.